REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Math
R

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

E. DESSENON,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LILLE

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

A. TARTINVILLE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

TOME DIXIÈME.
Années 1909 à 1910.
10

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, rue des Ecoles, 17.

291736
9.
33
30

QA
1
R486
anne cc 20

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

20e Année. — No 1. Octobre 1909.

PREMIÈRE PARTIE

TRAJECTOIRES, SOUS UN ANGLE CONSTANT, DE CONIQUES HOMOFOCALES

par M. **A. Durand**, professeur au lycée Saint-Louis.

Etant donnés deux axes rectangulaires, Ox, Oy, considérons un point M dont les coordonnées sont

$$x = c \operatorname{ch} t \times \cos \varphi \qquad \text{et} \qquad y = c \operatorname{sh} t \times \sin \varphi.$$

Quand φ *seul* varie de 0 à 2π, le point M décrit une *ellipse*, dont les demi-axes sont $c \operatorname{ch} t$ et $c \operatorname{sh} t$; donc quelle que soit la valeur du paramètre t, les foyers de cette ellipse sont les mêmes points F et F′,

$$(x = \pm c, \quad y = 0).$$

Quand on donne à t toutes les valeurs de 0 à $+\infty$, on obtient toutes les ellipses ayant F et F′ pour foyers; si t prend les valeurs négatives, on obtient les mêmes ellipses (mais décrites en sens opposé, φ variant toujours de 0 à 2π).

De même, si φ reçoit une valeur déterminée, et si l'on fait varier t de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit une *hyperbole* dont les demi-axes sont $c \cos \varphi$ et $c \sin \varphi$; les foyers de cette hyperbole sont donc, quel que soit φ, les mêmes points F et F′.

Si l'on attribue au paramètre φ toutes les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient toutes les hyperboles ayant F et F′ pour foyers; si on lui donne les valeurs négatives de 0 à $-\frac{\pi}{2}$, on obtient les mêmes courbes, décrites en sens contraire.

Si M se déplace sur une ellipse,

$$dx = -c \operatorname{ch} t \times \sin \varphi d\varphi, \qquad dy = +c \operatorname{sh} t \times \cos \varphi d\varphi.$$

Si M se déplace sur une hyperbole

$$d_1 x = +c \operatorname{sh} t \times \cos \varphi dt, \qquad d_1 y = +c \operatorname{ch} t \times \sin \varphi dt.$$

On a donc, quelles que soient les valeurs de φ et de t:

$$dx . d_1 x + dy . d_1 y \equiv 0,$$

ce qui exprime qu'une ellipse et une hyperbole homofocales quelconques se coupent à angle droit en tous les points qui leur sont communs.

Soit s l'arc d'ellipse, compté à partir d'un point quelconque, et s_1 l'arc d'hyperbole

$$ds^2 = c^2 [\operatorname{ch}^2 t . \sin^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 t . \cos^2 \varphi] d\varphi^2,$$
$$ds_1^2 = c^2 [\operatorname{ch}^2 t . \sin^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 t . \cos^2 \varphi] dt^2,$$

donc

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Si l'on établit entre φ et t une relation quelconque, le point M décrira une courbe dans le plan.

Soient ∂x et ∂y les différentielles pour un déplacement sur cette courbe, et $\partial \sigma$ la différentielle de l'arc, on aura

$$\partial x = dx + d_1x, \qquad \partial y = dy + d_1y,$$
$$\partial\sigma^2 = (dx + d_1x)^2 + (dy + d_1y)^2 = ds^2 + ds_1^2.$$

Soit V l'angle (que nous pouvons supposer aigu) de la tangente à la courbe que décrit M avec la tangente à l'ellipse qui a F et F′ pour foyers et passe en M, on aura

$$\cos V = \frac{dx.\partial x + dy.\partial y}{ds.\partial\sigma} = \frac{ds^2}{ds.\partial\sigma} = \frac{ds}{\partial\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cet angle V soit constant est donc que $\frac{ds_1}{ds}$ soit constant, c'est-à-dire que $\frac{dt}{d\varphi}$ le soit.

La valeur de cette constante est d'ailleurs tg V.

La relation entre t et φ est donc

$$t = (\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} V.$$

Les trajectoires sous l'angle V *des ellipses ayant pour foyers* F *et* F′ *sont donc les courbes dont les équations paramétriques sont*

$$x = c \operatorname{ch} [(\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} V] \cos\varphi, \qquad y = c \operatorname{sh} [(\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} V] \sin\varphi.$$

Pour obtenir une trajectoire, il faut donner à φ_0 une valeur déterminée, et faire varier φ de $-\infty$ à $+\infty$. Pour obtenir les différentes trajectoires (en nombre infini) il faut donner à φ_0 toutes les valeurs possibles. Parmi ces trajectoires nous remarquerons celles qui correspondent à $\varphi_0 = k\pi$. Elles passent par un foyer, et ce point est un *point d'arrêt*, car si l'on donne à φ la valeur $k\pi$, (avec $\varphi_0 = k\pi$), on a $y = 0$, $x = (-1)^k c$. Et si l'on donne à φ deux valeurs équidistantes de $k\pi$, $(k\pi \pm \alpha)$, on trouve les mêmes valeurs respectivement pour x et y.

Les autres trajectoires coupent FF′ en des points différents de F et F′, que l'on peut construire ; car $y = 0$ pour $\varphi = \varphi_0$ ou pour $\varphi = n\pi$. La première valeur de φ donne $x = c \cos\varphi_0$, les autres

$$x = (-1)^n c \times \operatorname{ch} [\operatorname{tg} V(n\pi - \varphi_0)].$$

Pour les valeurs de φ très grandes et positives, $\operatorname{ch} [(\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} V]$ et $\operatorname{sh} [(\varphi - \varphi_0) \operatorname{tg} V]$ tendent rapidement vers $\frac{1}{2} e^{(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V}$; donc quand on tourne sur la courbe dans le sens trigonométrique on se rapproche asymptotiquement de la spirale logarithmique

$$\rho = \left(\frac{c}{2} e^{-\varphi_0 \operatorname{tg} V}\right) e^{\varphi \operatorname{tg} V}.$$

De même quand φ tend vers $-\infty$, c'est-à-dire si l'on tourne sur la courbe dans le sens opposé, on se rapproche asymptotiquement de la spirale

$$\rho = \left(\frac{c}{2} e^{\varphi_0 \operatorname{tg} V}\right) e^{-\varphi \operatorname{tg} V}.$$

Cette seconde spirale est inverse de la première relativement à l'origine, la puissance étant $\frac{c^2}{4}$; mais on peut dire aussi que les deux spirales sont symétriques relativement à la droite Oz, qui fait l'angle φ_0 avec l'axe polaire.

On peut indiquer un mode de génération simple et intéressant de ces trajectoires.

Soient
$$x_1 = +ce^{(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V} \cos\varphi, \qquad y_1 = +ce^{(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V} \sin\varphi,$$
$$x_2 = +ce^{-(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V} \cos\varphi, \qquad y_2 = -ce^{-(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V} \sin\varphi,$$

les coordonnées de deux points P_1 et P_2. Le point P_1 décrit la spirale logarithmique $\rho_1 = ce^{(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V}$; le point P_2 décrit une autre spirale $\rho_2 = ce^{-(\varphi - \varphi_0)\operatorname{tg} V}$.

L'un quelconque de ces points est symétrique relativement à Ox de l'inverse de l'autre par rapport à O, la puissance étant c^2. Autrement dit, si $z_1 = x_1 + iy_1$ est le nombre complexe, affixe de P_1, l'affixe de P_2 est $z_2 = x_2 + iy_2 = \frac{c^2}{z_1}$.

Le point M *est le milieu de* P_1P_2.

On peut donc énoncer les résultats suivants.

Théorème I. — *Les trajectoires d'ellipses homofocales sous l'angle* V *se déduisent des spirales logarithmiques*

$$\rho = (ce^{-\varphi_0 \operatorname{tg} V})e^{\varphi \operatorname{tg} V}$$

par la transformation

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right):$$

Z représente l'affixe du point qui décrit la trajectoire, z l'affixe du point qui décrit la spirale (*).

Quant aux spirales, elles sont homothétiques de l'une d'entre elles par rapport au point O, ou se déduisent de l'une d'entre elles par rotation autour du point O.

On peut donner à l'énoncé une forme géométrique.

Théorème II. — *Considérons une spirale*

$$\rho = (ce^{-\varphi_0 \operatorname{tg} V})e^{\varphi \operatorname{tg} V}$$

et la spirale inverse de la première relativement à O, *la puissance étant* c^2. *Deux rayons* OP_1, OP_2 (*dont le produit est* c^2) *tournent autour de* O, *en sens contraire, avec des vitesses angulaires égales en valeur absolue, de façon à faire avec* Ox *des angles égaux, en sens contraire : le milieu* M *de* P_1P_2 *décrit une trajectoire sous l'angle* V *d'ellipses homofocales.*

Il est clair qu'une trajectoire sous l'angle V d'ellipses homofocales est trajectoire sous l'angle $\frac{\pi}{2} - V$ d'hyperboles homofocales aux ellipses.

CONCOURS DE 1908

POUR L'EMPLOI DE

COMMISSAIRE-CONTROLEUR DES SOCIÉTÉS D'ASSURANCES SUR LA VIE

1745. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

Faisons le changement de variable

$$x - 1 = \frac{1}{t}, \qquad \text{ou} \qquad x = 1 + \frac{1}{t}, \qquad dx = -\frac{dt}{t^2};$$

l'intégrale devient

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 - 5\left(1+\frac{1}{t}\right) + 6}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2t^2 - 3t + 1}{t^2}}},$$

ou, en faisant sortir t^2 du radical, et en désignant par $(\operatorname{sgn} t)$ le signe de t,

(*) On peut s'en rendre compte géométriquement ; cette transformation comme toute transformation $Z = f(z)$ conserve les angles. Or elle a la propriété de changer le système orthogonal d'ellipses et d'hyperboles homofocales en un système orthogonal de cercles concentriques et de droites passant par leur centre. Les trajectoires sous l'angle V de ce dernier système sont des spirales logarithmiques. La *Revue* a déjà publié (n° 5, 1909) une note de M. Michel sur cette transformation remarquable, à laquelle nous étions arrivé par une autre voie.

$$I = -\int \frac{dt}{(\operatorname{sgn} t)\sqrt{2t^2 - 3t + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{dt}{(\operatorname{sgn} t)\sqrt{\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}}.$$

On en déduit immédiatement

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{L}\left[t - \frac{3}{4} - (\operatorname{sgn} t)\sqrt{\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{L}\left[t - \frac{3}{4} - (\operatorname{sgn} t)\sqrt{t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}}\right].$$

Remplaçons maintenant t par $\frac{1}{x-1}$, nous obtenons

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{L}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\right] - \left[\operatorname{sgn}(x-1)\right]\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)^2}}.$$

ou

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{L}\left[\frac{7 - 3x}{4(x-1)} - \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{2}(x-1)}\right],$$

ou enfin

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{L}. \frac{7 - 3x - 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{4(x-1)}.$$

Henry NIOX-CHATEAU, lycée de Limoges.

Remarque. — M. Sire, dont nous recevons la solution au moment de mettre sous presse, pose $I = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}}$ et fait le changement de variable $\frac{x-3}{x-2} = u^2$, ce qui le conduit très simplement au résultat.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Ruines (Cantal); Jean Bing, à Paris ; R. Bouvaist ; J. D. Dufaut, à Poitiers ; G. Fourcry, à Reims ; Ch. Guillerme ; G. Lach, à Denain ; R. Manen, à Albi ; Edouard Millet, à Chateaudun ; Reboullat, à Villersexel ; A. Rousseau, à Landrecies ; Salleron, à Albi ; Eugène Silbermann, à Zurich ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; Joseph Vérots, à Lyon.

1746. — *Construire la courbe*

$$y = xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)} - 1.$$

Calculer à $\frac{1}{1000}$ *près l'ordonnée du maximum et celle du minimum et à* $\frac{1}{100}$ *près la plus petite racine de l'équation*

$$xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)} - 1 = 0.$$

La fonction

$$y = xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)} - 1$$

est continue pour toute valeur de x, excepté pour $x = 0$. Sa dérivée est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2\sqrt{3} - 4x + \sqrt{3}}{4x} e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)};$$

comme les racines du numérateur sont $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$, la dérivée change de signe quand x traverse l'une des valeurs 0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$. On en déduit immédiatement le sens de la variation de la fonction:

x	$-\infty$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$+$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		croît	|	décroît		croît		décroît	

Pour $x = -\infty$, l'exposant de e est égal à $+\infty$, par suite $y = -\infty$. Pour $x = -\varepsilon$, l'exposant de e est égal à $-\infty$, la puissance de e est égale à 0 et $y = 0$. Pour $x = +\varepsilon$, l'exposant de e est égal à $+\infty$, et le produit $xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ se présente sous la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Pour lever cette indétermination nous écrivons ce produit

$$xe^{\frac{\sqrt{3}}{4x}} . e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{4x}}}{\frac{\sqrt{3}}{4x}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}x} \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Quand x tend vers zéro par valeurs positives, $\frac{\sqrt{3}}{4x}$ croît indéfiniment par valeurs positives et le premier rapport augmente ainsi indéfiniment ; donc $y = +\infty$.

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $y = \sqrt{\frac{e}{3}} - 1$, et pour $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{\frac{3}{e}} - 1$.

Enfin pour $x = +\infty$, le produit $xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ se présente sous la forme $\infty \times 0$. Nous l'écrivons

$$xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}x} . e^{\frac{\sqrt{3}}{4x}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x}{e^{\frac{\sqrt{3}}{4}x}} \cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{4x}} \frac{4}{\sqrt{3}},$$

et comme le premier rapport est nul pour $x = +\infty$, on en conclut que y a pour limite zéro.

Le tableau de variations peut alors se compléter de la manière suivante :

x	$-\infty$		$-\varepsilon$	$+\varepsilon$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	croît	-1	$+\infty$	décroît	$\sqrt{\frac{e}{3}} - 1$	croît	$\sqrt{\frac{3}{e}} - 1$	décroît	0

Le coefficient angulaire de la tangente au point d'arrêt $A(x = 0,\ y = -1)$ est la limite de $\frac{y+1}{x}$ quand x tend vers zéro par valeurs négatives. Or nous avons

$$\frac{y+1}{x} = e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)};$$

et nous voyons que le second membre a pour limite zéro. Donc la tangente est parallèle à Ox.

Calculons maintenant le minimum et le maximum à $\frac{1}{1000}$ près.

Nous avons $\log e = 0{,}43429, \qquad -\log 3 = \bar{1}{,}52288,$

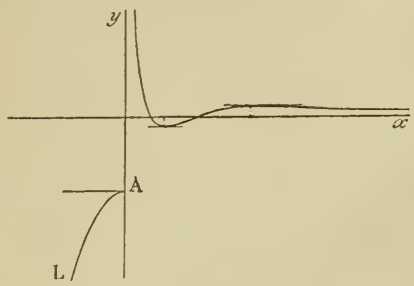
donc

$$\log \frac{e}{3} = \bar{1}{,}95717.$$

$$\log\sqrt{\frac{e}{3}} = \overline{1},97858 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\frac{e}{3}} = 0,9518\,;$$

par suite

$$\sqrt{\frac{e}{3}} - 1 = -0,048.$$



Puis

$$\log\sqrt{\frac{3}{e}} = -\log\sqrt{\frac{e}{3}} = 0,02142, \qquad \sqrt{\frac{3}{e}} = 1,0505,$$

$$\sqrt{\frac{3}{e}} - 1 = 0,050.$$

On en déduit la forme de la courbe. La branche infinie AL est parabolique dans la direction de l'axe des y.

Il résulte de là que la plus petite racine de l'équation

$$xe^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = 1$$

est comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ près, prenons les logarithmes (à base 10) des deux membres, nous obtenons la nouvelle équation

$$f(x) = \log x - \left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}\log e = 0,$$

dans laquelle nous allons faire quelques substitutions. Pour simplifier le calcul, il est bon de calculer à l'avance le produit $\frac{\sqrt{3}}{4}\log e$.

Nous avons $\log e = 0,43429$, puis

$$\log\log e = \overline{1},63778$$
$$\frac{1}{2}\log 3 = 0,23856$$
$$-\log 4 = \overline{1},39794$$

en additionnant

$$\log\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\log e\right) = \overline{1},27428$$

et

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\log e = 0,18805.$$

L'équation devient alors

$$f(x) = \log x - \left(x - \frac{1}{x}\right)0,18805 = 0.$$

Substituons 0, 3 à x, nous avons

$$f(0,3) = \log 0,3 + \frac{9,1 \times 0,18805}{3} = -0,52288 + 0,57041 = 0,04753,$$

résultat positif.

Si nous substituons 0,4, nous obtenons

$$f(0,4) = \log 0,4 + 2,1 \times 0,18805 = -0,39794 + 0,39490 = -0,00304,$$

résultat négatif. La racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

La valeur absolue de $f(0,3)$ étant plus de 10 fois plus grande que celle de 0,4, il est probable que la racine est plus voisine de 0,4 que de 0,3.

Si on essaie 0,38, on a

$$f(0{,}38) = \log 0{,}38 + \frac{0{,}8556 \times 0{,}18805}{0{,}38} = -0{,}42022 + 0{,}423\ldots,$$

résultat positif, et pour 0,39,

$$f(0{,}39) = \log 0{,}39 + \frac{0{,}8479 \times 0{,}18805}{0{,}39} = -0{,}40894 + 0{,}4088\ldots,$$

résultat négatif.

La racine est donc comprise entre 0,38 et 0,39. Sa valeur à $\frac{1}{100}$ près est 0,38.

R. BOUVAIST

Bonne solution par M. Amblard, à Ruines.

1747. — *On considère l'équation linéaire*

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0.$$

On pose

$$(2) \qquad y = uv$$

et on demande de déterminer la fonction u de manière que l'équation en v, qui sera aussi linéaire et du second ordre, manque de second terme.

Application à l'équation

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (2 - h^2x^2)y = 0.$$

Etablir l'intégrale et voir ce qu'elle deviendrait si on remplaçait h par ki $(i^2 = -1)$.

Remplaçons dans l'équation (1) y par uv, $\frac{dy}{dx}$ par $u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}$,

nous obtenons

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2} - 2f_1(x)\left[u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right] + f_2(x)uv = 0,$$

ou

$$(3) \qquad u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\left[\frac{du}{dx} - uf_1(x)\right]\frac{dv}{dx} + \left[\frac{d^2u}{dx^2} - 2f_1(x)\frac{du}{dx} + f_2(x)u\right]v = 0.$$

Pour que le coefficient de $\frac{dv}{dx}$ soit nul, il faut qu'on ait

$$\frac{du}{dx} - uf_1(x) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{u} = f_1(x)dx;$$

on en déduit $\qquad \mathrm{L}u = \int f_1(x)dx, \qquad$ et $\qquad u = e^{\int f_1(x)dx}.$

Remplaçons u par cette valeur dans l'équation (3), elle devient

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left[\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} - 2f_1(x)\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + f_2(x)\right]v = 0.$$

De la relation $\frac{du}{dx} = uf_1(x)$ on tire $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx}f_1(x) + uf_1'(x) = uf_1^2(x) + uf_1'(x)$,

ce qui nous donne

$$\frac{d^2v}{dx^2} + [f_1^2(x) + f_1'(x) - 2f_1^2(x) + f_2(x)]v = 0,$$

ou enfin

$$(4) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + [-f_1^2(x) + f_1'(x) + f_2(x)]\, v = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) sera égale au produit de l'intégrale générale de (4) par l'une quelconque des valeurs de $u = e^{\int f_1(x)dx}$.

Appliquons ce résultat à l'équation

$$(5) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (2 - h^2x^2)\, y = 0.$$

Nous avons $\qquad f_1(x) = -\frac{2}{x}, \quad f_2(x) = \frac{2}{x^2} - h^2.$

Nous en tirons

$$-f_1^2(x) + f_1'(x) + f_2(x) = -h^2,$$

et l'équation (4) s'écrit

$$(4)' \qquad \frac{d^2v}{dx^2} - h^2v = 0.$$

L'intégrale générale est $\qquad v = Ae^{hx} + Be^{-hx}.$

D'autre part l'équation $\frac{du}{u} = f_1(x)dx$ devient $\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}$; elle nous donne $u = \frac{1}{x^2}$.

L'intégrale générale de l'équation (5) est alors

$$\frac{Ae^{hx} + Be^{-hx}}{x^2}.$$

En remplaçant h par ki, l'équation (4) devient

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = 0,$$

son intégrale générale est $A \cos kx + B \sin kx$; celle de l'équation (1) est alors

$$\frac{A \cos kx + B \sin kx}{x^2}.$$

L. SIMON, à Châlons-sur-Marne.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Ruines; G. Bouligand, lycée de Nantes; J.-D. Dufaut, à Poitiers; G. Foucay, à Reims; G. Gandoin; G. Lach, à Denain; R. Manen, à Albi; Edouard Millet, à Chateaudun; Henry Niox-Chateau, lycée de Limoges; Janois.

Assez bonne solution de M. L. Sire.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1740. — *Trouver une courbe* (S) *telle que le cercle* (C) *décrit de chaque point de la courbe comme centre, avec le rayon de courbure comme rayon, soit orthogonal à un cercle fixe* (γ).

On construira les différentes formes de courbes obtenues, ainsi que leurs développées et leurs podaires par rapport au centre de (γ).

On construira, dans chaque cas, l'enveloppe du cercle (C). *Enfin on rectifiera toutes les courbes* (S).

Prenons pour origine le centre du cercle (γ). Soient x, y les coordonnées d'un point M d'une courbe (S), R le rayon de courbure en ce point, α l'angle polaire de la demi-tangente positive en M à (S). Pour que le cercle (C) soit orthogonal à un cercle fixe de centre O, il faut et suffit que la quantité $x^2 + y^2 - R^2$ soit constante. Ceci se traduit par l'équation

$$xdx + ydy = RdR,$$

ou
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \frac{dR}{d\alpha}. \tag{1}$$

La forme de cette équation nous fait alors songer à introduire la forme canonique de l'équation de la tangente à (S) ; soit donc
$$x \cos a + y \sin a = p \tag{2}$$
l'équation de cette tangente, où p désigne une fonction inconnue de a. L'angle a sera par exemple l'angle polaire de la demi-normale positive, de sorte que l'on aura
$$a = \alpha + \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$
$$R = -\left[p + \frac{d^2p}{da^2}\right].$$

L'équation (1) devient alors
$$x \sin a - y \cos a = \frac{dR}{da} = -\left[\frac{dp}{da} + \frac{d^3p}{da^3}\right].$$

D'autre part, en différentiant (2) par rapport à a, on a $-x \sin a + y \cos a = \frac{dp}{da}$.

Portons dans l'équation précédente, il vient
$$\frac{d^3p}{da^3} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = Aa^2 + Ba + C,$$

A, B, C désignant trois constantes arbitraires, et avant d'aller plus loin, nous allons faire voir que l'on peut, sans diminuer la généralité, ramener l'expression précédente de p à des formes réduites plus simples.

1er cas.— $A = 0$. — D'abord B ne sera pas nul, sans quoi l'on aurait comme courbe (S) un cercle de centre O, solution évidente, mais peu intéressante. Faisons alors tourner les axes d'un angle arbitraire φ. Si a' désigne le nouvel angle polaire de la demi-normale positive, nous aurons
$$a = \varphi + a'.$$

D'autre part, p ne change pas ; donc
$$p = Ba' + (B\varphi + C).$$

Choisissons alors l'angle φ pour que l'on ait
$$B\varphi + C = 0,$$
ce qui est possible, puisque $B \neq 0$.

Nous aurons alors, en supprimant l'accent de a' : $p = Ba$.

Enfin, si nous faisons une homothétie de rapport $\frac{1}{B}$, nous aurons
$$p = a. \tag{4}$$

Telle est la forme réduite à laquelle nous arrivons dans ce premier cas.

2e cas : $A \neq 0$. — Par une homothétie convenable, nous pouvons d'abord supposer $A = 1$. Si nous faisons ensuite tourner les axes de l'angle φ, nous aurons
$$p = (a' + \varphi)^2 + B(a' + \varphi) + C = a'^2 + a'(2\varphi + B) + \varphi^2 + B\varphi + C.$$

Prenons alors $B = -2\varphi$ et posons $h = \varphi^2 + B\varphi + C$;
nous obtenons finalement la seconde forme réduite
$$p = a^2 + h. \tag{5}$$

Arrivons maintenant à la construction des différentes courbes dont parle l'énoncé.

Pour le premier cas, il y a peu de chose à faire. En effet, l'équation de la normale à la courbe (S) est
$$-x \sin a + y \cos a = 1.$$

Elle enveloppe un cercle de centre O et de rayon un. Donc (S) est une développante de cercle. La podaire de (S) a pour équation polaire $\rho = \omega$.

C'est une spirale d'Archimède. Ces deux courbes sont trop connues pour qu'il y ait lieu de les construire. L'équation du cercle (C) est

$$X^2 + Y^2 - 2X(a \cos a - \sin a) - 2Y(a \sin a + \cos a) + 1 = 0.$$

Il est orthogonal à un cercle (γ) de centre O et de rayon un.

Pour avoir son enveloppe (E), dérivons par rapport à a :

$$X \sin a - Y \cos a = 0.$$

La corde de contact passe donc par O et a pour angle polaire a. Soit alors

$$X = \rho \cos a, \qquad Y = \rho \sin a.$$

Portons dans l'équation du cercle, il vient $\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0$.

Telle est l'équation polaire de (E).

Pour construire cette courbe, on peut, soit la discuter par rapport à ρ, soit la résoudre par rapport à a. Nous aurons par exemple

$$a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right).$$

On a immédiatement le tableau suivant :

ρ	0		1		$+\infty$
a	$+\infty$	décroît	1	croît	$+\infty$

L'origine est un point asymptote ; la droite $\omega = 1$ est tangente au point $\rho = 1$; on a un cercle asymptote de rayon infini. Enfin, on rendra la construction encore plus précise en remarquant que les deux points d'angle polaire a ont leur milieu sur la spirale d'Archimède $\rho = a$ et sont conjugués par rapport au cercle (γ). On a finalement la forme de courbe suivante, où nous figurons en pointillé la spirale d'Archimède et le cercle (γ).

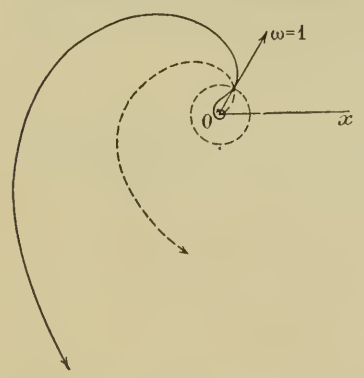


Fig. 1.

Passons au 2e cas. L'équation de la normale à (S) est

$$-x \sin a + y \cos a = 2a.$$

Elle est de même forme que l'équation de la tangente à la courbe (S) du premier cas, et, comme tout à l'heure, on verrait que cette normale enveloppe une développante du cercle de rayon 2 et de centre O. Traçons ce cercle et cette développante (S_0) en pointillé. Nous aurons les courbes (S) correspondant aux différentes valeurs de h en construisant les différentes développantes de (S_0).

Rien n'est plus facile, si l'on a construit auparavant la courbe (S_0). On a deux formes de courbes suivant la longueur du fil enroulé sur S_0 et le sens du déroulement. On voit que dans l'un des cas, on aura un point de rebroussement B.

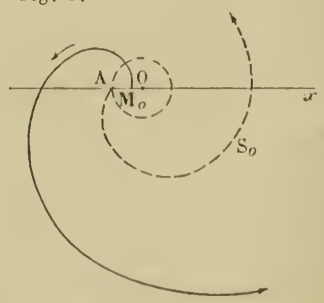


Fig. 2 : $h + 2 > 0$.

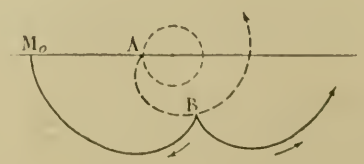


Fig. 3 : $h + 2 < 0$.

Tout ceci pourrait d'ailleurs se voir directement sur les équations paramétriques de la courbe,

qui sont

$$x = (a^2 + h)\cos a - 2a \sin a, \qquad y = (a^2 + h)\sin a + 2a \cos a.$$

On a ensuite

$$\frac{dx}{da} = \mathrm{R}\sin a = -(a^2 + h + 2)\sin a, \qquad \frac{dy}{da} = -\mathrm{R}\cos a = (a^2 + h + 2)\cos a.$$

Ceci montre bien que l'on a deux cas à distinguer suivant que $a^2 + h + 2$ peut s'annuler ou non, c'est-à-dire suivant que $h + 2 \leqslant 0$ ou $h + 2 > 0$; et que dans le premier cas, on aura un point de rebroussement pour $a = \sqrt{-(h+2)}$.

La podaire de (S) a pour équation polaire $\rho = \omega^2 + h$.

Elle est très facile à construire et a deux formes différentes suivant que h est positif ou négatif.

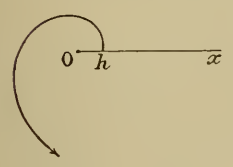


Fig. 4. $h > 0$.

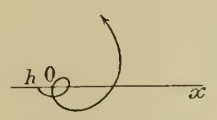


Fig. 5. $h < 0$.

Il faudrait, bien entendu, compléter par symétrie relativement à Ox.

Enfin, cherchons l'enveloppe (E) du cercle (C). Celui-ci a pour équation

$$X^2 + Y^2 - 2[(a^2 + h)\cos a - 2a \sin a]X$$
$$- 2[(a^2 + h)\sin a + 2a \cos a]\,Y - 4(1 + h) = 0.$$

Il est orthogonal à un cercle (γ) de centre O et de rayon $\sqrt{-4(1+h)}$. Pour avoir son enveloppe, on opère comme dans le premier cas et l'on arrive à l'équation polaire suivante :

$$\rho^2 - 2\rho(a^2 + h) - 4(1 + h) = 0.$$

Pour construire cette courbe, nous allons, comme tout à l'heure, résoudre l'équation par rapport à a. Nous avons

$$a^2 = \frac{(\rho + 2)(\rho - 2h - 2)}{2\rho}, \qquad \frac{d(a^2)}{d\rho} = \frac{\rho^2 + 4(h+1)}{2\rho^2} = \frac{\rho^2 - \rho_1^2}{2\rho^2}.$$

Il y a lieu de distinguer plusieurs cas, suivant la valeur de h. Nous aurons les trois tableaux suivants :

$h < -2$:

ρ	$-\infty$		$2h+2$		$-\rho_1$		-2		0		ρ_1		$+\infty$
a			0	cr.	a_1	déc.	0		$+\infty$	déc.	a_2	cr.	$+\infty$

$-2 < h < -1$:

ρ	$-\infty$		-2		$-\rho_1$		$2h+2$		0		ρ_1		$+\infty$
a			0	cr.	a_1	déc.	0		$+\infty$	déc.	a_2	cr.	$+\infty$

$h > -1$:

ρ	$-\infty$		-2		0		$2h+2$		$+\infty$
a		0	cr.	$+\infty$		0	cr.		$+\infty$

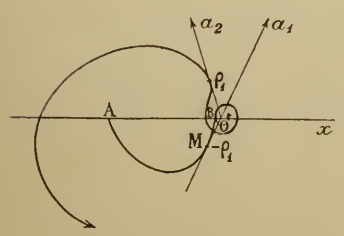


Fig. 6. $h < -1$.

Les deux premiers tableaux donnent la même forme de courbe. Elle se compose d'un arc fini AMB ayant deux points d'arrêt en A et B sur Ox, les tangentes en ces points étant également inclinées sur Ox ; et d'une sorte de spirale analogue à celle de la figure 1.

Le troisième tableau donne deux arcs de courbes séparés. Le premier a un point d'arrêt en A sur Ox et un point asymptote en O. Le second, qui est l'inverse du premier, la puissance d'inversion étant $-4(h+1)$, a un point d'arrêt en B et un cercle asymptote de rayon infini.

Il y a deux cas intermédiaires. Le premier, $h = -2$, donne la courbe de la figure 6, où l'arc AMB serait venu se réduire à un point de Ox. Le second, $h = -1$, est plus important. L'équation de la courbe se réduit alors à

$$\rho = 2(a^2 - 1).$$

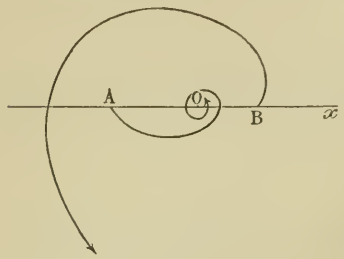


Fig. 7 : $h > -1$.

D'où l'on déduit sans aucune peine la courbe suivante.

Elle n'est plus anallagmatique, ceci provient de ce que le cercle (C) passe constamment à l'origine. On sait d'ailleurs que l'enveloppe (E) doit, dans ce cas, être l'homothétique de la podaire de (S) dans le rapport 2. C'est ce qu'on vérifie immédiatement, puisque nous avons trouvé que l'équation polaire de cette podaire était

$$\rho^2 = \omega^2 + h.$$

Remarquons enfin que la forme de la courbe de la figure 6 correspond au cas où le cercle (γ) est réel, l'anallagmatie étant par conséquent à puissance positive; celle de la figure 7 correspond au contraire au cas où le cercle (γ) est imaginaire, l'anallagmatie étant par suite à puissance négative.

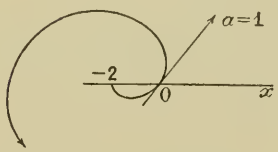


Fig. 8 : $h = -1$.

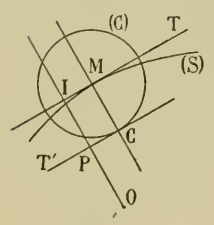
La rectification des courbes (S) est évidente. On a en effet

$$\frac{ds}{da} = R = -(p + p'') = -(Aa^2 + Ba + C + 2A),$$

d'où

$$s = -\left[\frac{A}{3}a^3 + \frac{B}{2}a^2 + (C + 2A)a\right] + s_0$$

Remarques géométriques. — Il est très facile d'obtenir la nature de la courbe (S) par voie géométrique. Considérons en effet une telle courbe. Orientons-la dans un sens quelconque. Soit s l'abscisse curviligne de M, α l'angle polaire de la demi-tangente positive MT, R la mesure algébrique du rayon de courbure MC en M, compté sur la demi-droite d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$.



Soit d'autre part OPI la corde de contact du cercle (C) avec son enveloppe. La considération d'un cercle infiniment voisin nous donne de suite la formule suivante :

$$R\,dR = \overline{IM}.ds,$$

où l'on mesure $\overline{IM}$ sur la demi-droite MT.

Or

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{dR}{d\alpha} = \overline{IM}.$$

Mais, si R' désigne la mesure algébrique du rayon de courbure de la développée de (S), rayon de courbure compté positivement sur la demi-droite d'angle polaire $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire sur la demi-droite CT' opposée à MT, on sait que

$$R' = \frac{dR}{d\alpha}.$$

Donc, en mesurant maintenant (IM) ou (PC) sur CT', on a

$$R' = \overline{CP}.$$

Ceci nous montre que, *quelle que soit la courbe* (S), *la corde de contact de* (C) *avec son enveloppe est la normale au point correspondant de la développée seconde de* (S).

Si l'on veut alors que (C) reste orthogonal à un cercle fixe de centre O, on sait qu'il est nécessaire et suffisant que cette corde de contact passe par O, et par suite que la développée seconde soit un cercle de centre O. On pourrait tirer de là une étude géométrique complète de la question, qui redonnerait les résultats établis par le calcul.

J. HAAG.

Bonne solution : M. Bouligand, à Nantes.
Bonne solution différente, de M. E. Hugé, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1909)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse.

6915. — Quel est le nombre des diagonales d'un polygone convexe de n côtés ?

6916. — Connaissant les restes des divisions d'un polynome $f(x)$ par $x-a$, $x-b$, $x-c$, calculer le reste de la division du même polynome par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$.

6917. — Calculer la somme $a+2a^2+3a^3+\dots+na^n$.

6918. — Des relations $\dfrac{a^2-bc}{\alpha}=\dfrac{b^2-ca}{\beta}=\dfrac{c^2-ab}{\gamma}$ déduire des quantités proportionnelles à

$$\alpha^2-\beta\gamma,\qquad \beta^2-\gamma\alpha,\qquad \gamma^2-\alpha\beta.$$

6919. — Calculer $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

6920. — On considère la suite des nombres impairs, qu'on divise en groupes de telle manière que le premier groupe contienne un nombre, le deuxième groupe deux nombres, le troisième trois, ... Trouver la somme des nombres du n^e groupe.

6921. — Déterminer une suite de nombres $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ tels que l'on ait pour toute valeur de n $u_1+u_2+\dots+u_n=3n^2$.

6922 — Montrer que la fonction logarithmique est continue.

6923. — La fonction tg x est continue.

6924. — Trouver la limite de l'expression

$$\frac{(an+b)^2+(an+2b)^2+\dots+[an+(n-1)b]^2}{n^3}$$

lorsque n augmente indéfiniment.

6925. — Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix},$$

et trouver sa dérivée.

6926. — Décomposer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ en facteurs linéaires.

6927. — Discuter les systèmes d'équations linéaires

$$\begin{aligned}
&(a_1-b_1)x_1+(a_2-b_1)x_2+\dots+(a_n-b_1)x_n=0,\\
&(a_1-b_2)x_1+(a_2-b_2)x_2+\dots+(a_n-b_2)x_n=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(a_1-b_n)x_1+(a_2-b_n)x_2+\dots+(a_n-b_n)x_n=0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a^3+a^2x+ay+z=0, && \frac{x}{h-a}+\frac{y}{h-b}+\frac{z}{h-c}=1,\\
&b^3+b^2x+by+z=0, && \frac{x}{h'-a}+\frac{y}{h'-b}+\frac{z}{h'-c}=1,\\
&c^3+c^2x+cy+z=0; && \frac{x}{h''-a}+\frac{y}{h''-b}+\frac{z}{h''-c}=1.
\end{aligned}$$

6928. — Étudier les séries dont les termes généraux sont

$$nx^{n-1},\quad nx^n\mathrm{L}\left(a+\frac{1}{n}\right),\quad \frac{n-1}{n!},\quad \frac{1}{n(n+1)}\ \text{(somme)},\quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ \text{(somme)},\quad \frac{1}{a+bx^n},\quad \sin\frac{x^n}{n},\quad \cos\frac{x^n}{n},$$

$$\frac{1}{n^n}\left(\text{valeur à } \frac{1}{1000} \text{ près}\right),\quad 1-\cos\frac{x}{n},\quad e^{\alpha n(n-1)},\quad \frac{1}{n^\alpha(\mathrm{L}n)^\beta},\quad \mathrm{L}(1+n)^{\frac{1}{n^2}}.$$

6929. — Calculer $\sqrt[3]{e}$ à $\dfrac{1}{1000}$ près.

6930. — Étudier la série dont le terme général est $\mathrm{L}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$. Peut-on calculer la somme de cette série ?

6931. — Sur une droite indéfinie on porte les longueurs $OA_1=1$, $OA_2=3$, ... $OA_n=2n-1$, et sur une perpen-

diculaire à la droite au point O on prend une longueur $OB = 1$. On joint BA_1, BA_2, ... BA_n, et on considère la somme des angles $\widehat{OA_1B} + \widehat{OA_2B} + \cdots + \widehat{OA_nB}$. Cette somme a-t-elle une limite quand n augmente indéfiniment?

6932. — Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k, \ldots$ les racines positives de l'équation $\operatorname{tg} x = x$. Étudier la série

$$\cos^n x_1 + \cos^n x_2 + \cdots + \cos^n x_k + \cdots,$$

n étant fixe.

6933. — Soient $u_1, u_2, \ldots$ les aires des boucles de la courbe $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que la série $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ est convergente.

6934. — Calculer la somme de la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \cdots$$

6935. — Dérivée de $(\sin x)^{Lx}$.

6936. — Trouver la dérivée de la fonction $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1-x^2}$ et expliquer le résultat.

6937. — Etudier les variations des fonctions

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}, \quad 2x^3 - 5x^2 + 1, \quad x^3 - 13x - 12, \quad (x-1)^4(x-2)^2(x-3), \quad xe^x, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad x - \mathrm{L}\operatorname{ch} x, \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2}, \quad e^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{\sin 3x + 2\sin 5x + \sin 7x}{\sin 5x + \sin 3x}, \quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x.$$

6938. — Trouver pour $x = 0$ les limites des fonctions

$$\frac{2x - \sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}, \quad \frac{x - \sin x}{\mathrm{L}(1+x) - x - \dfrac{x^2}{2}}, \quad (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

6939. — Trouver pour m infini les limites des fonctions

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{m}} + b^{\frac{1}{m}}}{2}\right)^m, \quad \left(\cos\frac{a}{m} + x\sin\frac{a}{m}\right)^m, \quad \left(1 + \frac{x}{m} + \frac{x}{m^2}\right)^m, \quad \frac{1}{m}\sqrt[m]{(m+1)(m+2)\ldots 2m}, \quad \left(\frac{m^2+mx+1}{m^2-my+3}\right)^m.$$

6940. — Trouver pour m infini la limite de $\left(\dfrac{m+x}{m-y}\right)^m$ et en déduire la relation $e^x.e^y = e^{x+y}$.

6941. — Trouver pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ les limites des fonctions

$$\frac{\mathrm{L}(1-\sin^2 x)}{\operatorname{tg} x}, \quad (\operatorname{tg} x)^{\cos x}, \quad (\operatorname{cotg} x)^{\cos x}.$$

6942. — Etant donnée la fonction $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, calculer $xf'_x + yf'_y + zf'_z$.

6943. — Montrer que la quantité $\mathrm{E} = f(a+h) - f(a) - hf'\left(a + \dfrac{h}{2}\right)$ est du troisième ordre infinitésimal par rapport à h, et calculer $\dfrac{\mathrm{E}}{h^3}$.

6944. — Etant donnée la formule des accroissements finis

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$

trouver la limite de θ quand h tend vers zéro.

6945. — Même question pour la formule de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

6946. — Soit M un point de la courbe $y = f(x)$ ayant pour abscisse a, M′ et M″ les points d'abscisses $a - h$ et $a + h$. Les perpendiculaires à Ox menées par M′ et M″ rencontrent la tangente en M aux points P′ et P″. Montrer que l'infiniment petit $\overline{P'M'} - \overline{P''M''}$ est de la forme Ah^3 et calculer A.

6947. — L'équation $x\left[\sin\dfrac{y}{x} + e^{\frac{x}{y}}\right] - ky = 0$ définit y comme fonction implicite de x; calculer $\dfrac{dy}{dx}$.

6948. — Condition pour que $Pdx + Qdy$ soit une différentielle exacte.

6949. — La quantité $3xdy + ydx$ est-elle une différentielle exacte? Déterminer une fonction $\lambda(x, y)$ telle que

$$3x\lambda(x, y)dy + y\lambda(x, y)dx$$

soit une différentielle exacte.

6950. — Développer $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ suivant les puissances ascendantes de x. Montrer que les coefficients sont de la forme ea_n, a_n étant un nombre rationnel.

6951. — Peut-on développer $\mathrm{L}x$ ou $\operatorname{arc\,tg} x$ suivant les puissances de $\dfrac{1-x}{1+x}$?

6952. — Développer en série la fonction $\sin x \cos^5 x$ en faisant le produit des séries qui représentent $\sin x$ et $\cos x$.

6953. — Trouver les dérivées d'ordre n des fonctions

$$\frac{1}{x^2+1},\quad \arccos x,\quad \frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1},\quad \frac{1}{x^4+1},\quad \frac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$$
$$\cos(ax+b),\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x},\quad L(1+x+x^2+x^3).$$

6954. — Calculer le nombre x défini par l'équation $\operatorname{th} x = \frac{1}{2}$.

6955. — Calculer $\operatorname{sh}\frac{x}{3}$ en fonction de $\operatorname{sh}\frac{x}{2}$.

6956. — Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = 1$.

6957. — Calculer $\operatorname{ch} mx$ en fonction de $\operatorname{ch} x$.

6958. — Chercher la limite du produit $\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{a}{4}\ldots\operatorname{ch}\frac{a}{2^n}$ pour n infini. En déduire que la série qui a pour terme général $L\operatorname{ch}\frac{a}{2^n}$ est convergente et trouver la somme de cette série.

6959. — Etudier les équations

$$x^3-7x-1=0,\quad x^3-3abx+a^3+b^3=0,\quad 2x^3-5x^2+1=0,\quad 5x^3+12x^2-2x-1=0,$$
$$2x^3-4x^2+9x+3=0,\quad x^4-3x^2-6x\sqrt{2}-6=0,\quad x^{10}-3x^5+2=0,\quad x^4-4x^2+8x\sqrt{3}-12=0,$$
$$x^4+x^3-2x^2+5x-1=0,\quad x^4-x-1=0,\quad 2(x^2-x-1)^2-x^2+x=0,\quad x^4-4x^3+3x^2-5x+1=0,$$
$$\sqrt[3]{1+\frac{2x}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{2x}{3}}=1,\quad \sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{x}}=\sqrt{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}},\quad \cos^3 x+3\cos^2 x-6\cos x+1=0.$$

6960. — Discuter les équations

$$ax+b\cos x+c=0,\quad \sin x-mx=0,\quad x\sin x+\cos x(1-\cos x)^2=0,$$
$$\frac{1}{\cos x}+\frac{8}{\sin x}=a,\quad e^{2x}=\frac{k+x}{k-x},\quad e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{\sqrt{x^3+3}}{x-1},\quad L\cos x-\sin x+3=0.$$

6961. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 4x^2+5xy+y^2=0,\\ x^2-8xy+4y^2=1;\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{121}{13},\\ x+y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=a,\\ z+t=b,\\ xy=zt,\\ x^3+y^3+z^3+t^3=c;\end{cases}\qquad \begin{cases} y^2-z^2=x,\\ z^2-x^2=y,\\ x^2-y^2=z;\end{cases}\qquad \begin{cases} x=z^2,\\ y=x^2,\\ z=y^2.\end{cases}$$

6962. — Trouver cinq nombres en progression arithmétique connaissant leur somme et la somme de leurs cinquièmes puissances.

6963. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3+px+q=0$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$.

6964. — Soient x_1, y_1 les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$, x_2, y_2 celles de l'équation $a'x^2+b'x+c'=0$; former l'équation qui admet pour racines $x_1x_2+y_1y_2$ et $x_1y_2+x_2y_1$

6965. — Étant donnée l'équation du quatrième degré $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, former l'équation qui admet pour racines les sommes des racines deux à deux de l'équation proposée.

6966. — Déterminer le nombre p de façon que l'équation $x^5-px+56=0$ ait deux racines dont le produit soit égal à 1.

6967. — Étant donnée une équation du troisième degré dont le produit des racines est égal à 1, calculer la fonction symétrique $\sum\frac{a}{ab+a+1}$.

6968. — Eliminer x entre les deux équations $x^3-3x^2+2=0$, $x^5+px+q=0$.

6969. — Calculer la fonction symétrique $\sum\frac{a}{b}$ pour l'équation $x^3+px+q=0$.

6970. — Eliminer x et y entre les équations $x^4+y^4=a$, $x^3-y^3=b$, $x^2+y^2=c$.

6971. — Toute transformation rationnelle relative à une équation du troisième degré peut se ramener à une transformation homographique.

6972. — Déterminer a, b, c de façon que ces nombres soient les racines de l'équation $x^3+ax^2+bx+c=0$.

6973. — On associe deux à deux les racines d'une équation du sixième degré. Résoudre l'équation sachant qu'il existe entre les racines de chaque couple la même relation involutive.

6974. — On considère une équation du troisième degré à coefficients réels admettant une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Conditions pour que le triangle dont les sommets ont pour affixes les trois racines soit équilatéral.

6975. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3+px+q=0$, calculer la fonction

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

6976. — Calculer Σa^3b^2c pour l'équation $x^4 + px + q = 0$.

6977. — Quelle relation doit-il exister entre les coefficients de l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ pour que cette équation ait deux racines dont le produit ou la somme soit égal à 1 ?

6978. — Couper un hémisphère par un plan parallèle à la base de façon que les deux volumes obtenus soient équivalents.

6979. — Vérifier que l'équation $x^5 - 551x + 115 = 0$ admet deux racines dont le produit est égal à 1 et calculer ces deux racines.

6980. — Soient $\alpha, \beta, \ldots$ les racines d'une équation algébrique $f(x) = 0$. Former l'équation qui admet comme racines $\alpha + \frac{1}{\alpha}, \beta + \frac{1}{\beta}, \ldots$

6981. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; former l'équation qui a pour racines $ab^2 + bc^2 + ca^2$ et $ac^2 + cb^2 + ba^2$.

6982. — Montrer que l'équation $x^5 - 209x + 56 = 0$ admet deux racines dont le produit est égal à 1 et calculer ces deux racines.

6983. — On considère une équation du troisième degré qui a une racine réelle a et deux racines imaginaires conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$. Soient A, M_1, M_2 les points ayant pour affixes les trois nombres, le point A étant sur Ox. Quelle relation doit-il exister entre les coefficients de l'équation pour que le triangle AM_1M_2 soit rectangle en A ?

6984. — Condition pour que l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ ait une racine double.

6985. — Résoudre une équation du septième degré sachant qu'elle a une racine triple et une racine double.

6986. — Etant donnée l'équation $x^3 + px + q = 0$, trouver une transformation homographique permutant les racines.

6987. — Former une équation du quatrième degré dont les racines a, b, c, d soient telles que a, b, c soient en progression arithmétique et b, c, d en progression géométrique.

6988. — Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, il en est de même de l'équation $f(x) + \lambda f'(x) = 0$, quel que soit λ.

6989. — Soient a, b, c les racines de l'équation $f(x) \equiv x^3 + px + q = 0$; former l'équation qui admet comme racines $f'(a), f'(b), f'(c)$.

6990. — Déterminer le nombre p de façon que l'équation $x^4 - 8x^3 + px^2 + 2x + 1 = 0$ ait deux racines dont le produit soit égal à 1.

6991. — On donne un hémisphère de rayon R ; couper cet hémisphère par un plan parallèle à la base divisant l'hémisphère en deux volumes dont le rapport soit donné.

6992. — Déterminer α de façon que l'équation $3x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 180x + \alpha = 0$ ait une racine double. *A priori*, quel est le nombre des solutions ?

6993. — Etant donnée l'équation $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$, faire la transformation $y = 2 - x^2$ et expliquer le résultat obtenu.

6994. — Résoudre l'équation $3x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$ sachant que le produit des deux racines est égal à -1.

6995. — Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés sont racines de l'équation $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

6996. — Trouver les racines communes aux deux équations $x^m - 1 = 0$, $x^p - 1 = 0$.

6997. — Former l'équation aux carrés des différences de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

6998. — Reconnaître si l'équation $5x^3 - x + 1 = 0$ admet une racine de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant des nombres rationnels.

6999. — Condition pour que l'équation $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ ait une racine triple.

7000. — Eliminer x entre les équations $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ et $x^2 + ax + b = 0$.

7001. — Calculer les intégrales

$$\int \frac{(x-p)(x-q)}{\left(x - \frac{p+q}{2}\right)^2} dx, \quad \int \frac{x^3 dx}{x^4+1}, \quad \int \left(x + \frac{2}{x-3}\right) dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad \int \frac{dx}{1-x^5}, \quad \int \frac{x dx}{x^4 - 3x^3 - 47x^2 + 147x - 98}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(1-x^3)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int_0^1 \sqrt{x^2+10x+1}\, dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^{12} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} dx, \quad \int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} dx, \quad \int x^4\sqrt{1-x^2}\, dx,$$

$$\int \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+1} dx; \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}, \quad \int_0^{\pi} \frac{2\sin x - \cos x}{3\cos x + \sin x} dx, \quad \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x - \cos a},$$

$$\int \cos^3 x\,dx, \qquad \int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-2\sin x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin^4 x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^n x},$$

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^2 x+\cos x-3}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin^5\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}};$$

$$\int \frac{\sin 3x\,e^x}{\sin x}dx, \qquad \int \cos x\,\mathrm{ch}\,x\,dx, \qquad \int \sin x\,\mathrm{sh}\,x\,dx, \qquad \int x^n e^x\,dx, \qquad \int x^2\,\mathrm{ch}\,x\,dx,$$

$$\int \frac{x^2dx}{(\cos x+x\sin x)^2}, \qquad \int \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{ch}\,a}, \qquad \int \mathrm{arc\,tg}\frac{a+x}{1-ax}dx.$$

7002. — Calculer le moment d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à l'un de ses axes, d'un tore par rapport à son axe, d'un disque elliptique par rapport à son centre ou à un sommet, d'un prisme droit ayant pour bases des triangles équilatéraux par rapport à la droite qui joint les centres des bases.

7003. — Calculer l'aire comprise entre les deux courbes $y=\mathrm{ch}\,x$, $y=\mathrm{sh}\,x$, l'axe Oy et une ordonnée quelconque.

7004. — On donne une circonférence ayant pour centre l'origine de deux axes rectangulaires; trouver l'ordonnée moyenne du premier quadrant.

7005. — On divise une demi-circonférence de diamètre AB en n parties égales par les points $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Calculer la valeur moyenne de AM_i.

7006. — Trouver le centre de gravité d'un hémisphère, la densité en chaque point étant une fonction $f(z)$ de la distance z de ce point au plan de base de l'hémisphère. Cas particulier : $f(z)=kz$, $f(z)=k(R-z)$.

7007. — Intégrer les équations différentielles

$$xy'+y+3x^2y^2=0, \qquad \frac{y'}{y}=\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}, \qquad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}, \qquad xy'+y=y^2\mathrm{L}x,$$

$$xy'-x^2y=(\mathrm{L}x)^2, \qquad xy'^2-2yy'-x=0, \qquad 2xy'-ye^x=\sin x, \qquad 2xy'+y+3x^2y^2=0,$$

$$x^2y'-xy=e^x, \qquad y'=\frac{axy}{x^2+y^2}, \qquad y'\sin x-y\cos x+1=0, \qquad y=x+y\left(y'+\frac{1}{y'}\right),$$

$$xy'^2-2yy'-x=0, \qquad yy'(1+x^2)+\frac{x}{2}y=\sqrt{1+x^2}, \qquad [cx^3+(1+c^2)y^3]dx=[cy^3+(1+c^2)x^3]dy,$$

$$4y^2(1+y'^2)-(x+yy')^2=0, \qquad x+yy'=a(1+y'^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$y''\cos x-2y'\sin x-\cos x=0, \qquad y''=a+y'^2, \qquad (1+x^2)y''+xy'=\sqrt{1+x^2};$$

$$3y''-2y'-y=x^2, \qquad y''+\frac{2y'}{a}+\frac{y}{a^2}=e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}, \qquad y''+2y'+5y=2e^{3x}, \qquad y''-y'-6y=\frac{1}{2}e^{-2x},$$

$$y''+9y=2\cos 3x+5\sin 3x, \qquad y''-2y'+y=13e^x, \qquad y''-y=x^2+1, \qquad y''-6y'+9y=e^x+e^{-x}, \qquad y''-2y'+y=\sin x,$$

$$y''+y=\sin^5 x, \qquad y''+y=\cos^3 x, \qquad y''+2y'+y=\cos^3 x, \qquad y''+y=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2},$$

$$y''-3y'+2y=e^x+\cos x, \qquad y''-2y'+y=x^m e^x, \qquad y''-5y'+4y=\sin\frac{x}{2}e^{4x}+\cos\frac{x}{2}e^x+x^2,$$

$$y''-7y'+12y=xe^{4x}, \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+9y=7e^{3t}+\sin t.$$

7008. — Intégrer l'équation différentielle $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+a^2y=0$ au moyen du changement de variables $x=\cos t$.

7009. — On donne l'équation différentielle $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2y}{x}\dfrac{dy}{dx}+y=0$; on prend comme nouvelle fonction $z=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}$. Que devient l'équation différentielle ?

7010. — Quelles doivent être les fonctions p et q pour que l'équation $\dfrac{d^2y}{dx^2}+p\dfrac{dy}{dx}+qy=0$ admette deux intégrales u et v vérifiant la relation $u^2+v^2=1$?

7011. — Intégrer le système $y=\dfrac{dz}{dx}$, $z=\dfrac{dy}{dx}$.

II. — Trigonométrie

7012. — Calculer $\cos mx$ en fonction de $\cos x$.

7013. — On donne $2\cos x=a+\dfrac{1}{a}$. Calculer $\cos mx$.

7014. — Calculer $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{5}$.

7015. — Calculer le produit $\sin\dfrac{x}{m}\sin\dfrac{2x}{m}\cdots\sin\dfrac{(m-1)x}{m}$.

7016. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ connaissant $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ connaissant $\cos x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{a}{4}$ connaissant $\operatorname{tg} a$, $\cos\frac{a}{5}$ connaissant $\operatorname{tg} a$.

7017. — Rendre calculable par logarithmes les deux sommes

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \dots + \cos[a+(n-1)h],$$
$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin[a+(n-1)h].$$

7018. — Trouver la limite du produit $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ quand n augmente indéfiniment.

7019. — Résoudre les équations :

$$\sin 3x = \cos 2x, \qquad \frac{\cos^4\theta}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4\theta}{\sin^2 x} = 1, \qquad \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}, \qquad \cos^3 x + \sin^3 x = 1,$$

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}, \qquad \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = a, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} 5x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = m.$$

7020. — Eliminer t entre les deux équations $x = \cos 2t$, $y = \cos 3t$.

7021. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin x + \sin y = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = a, \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sin x + b\sin y = a\sin\theta, \\ a\sin(\theta - x) + b\sin(\theta - y) = b\sin\theta; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = a\cos y, \\ \sin y = b\cos z, \\ \sin z = c\cos x. \end{cases}$$

7022. — Dans un triangle rectangle la médiane issue du sommet de l'angle droit décompose le triangle rectangle en deux triangles isocèles. On donne les rayons des cercles inscrits dans ces triangles isocèles ; résoudre le triangle rectangle.

7023. — Dans tout triangle on a $(p-a)\sin\frac{A}{2} = a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

7024. — Quelle est la forme d'un triangle dans lequel on a $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

7025. — Dans un triangle on donne l'angle A et la relation $h_a = h_b + h_c$; calculer B et C.

7026. — Dans un triangle on donne p, R et S. Former l'équation du troisième degré qui a pour racines a, b, c.

7027. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois hauteurs ; 2° a, A, h_a ; 3° R, r, r_a ; 4° a, r, r_a ; 5° le périmètre et les angles (construction géométrique) ; 6° a, A et la médiane m_a.

7028. — Soient A′, B′, C′ les points où le cercle inscrit à un triangle ABC touche les côtés BC, CA, AB. Connaissant les éléments du triangle ABC, calculer ceux du triangle A′B′C′.

7029. — Dans un triangle sphérique on a $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

7030. — Construire les courbes qui ont pour équations en coordonnées rectilignes

$$y = \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x - 1}}, \qquad y = x \pm \sqrt{x^2 - 5x + 6}, \qquad y^2 = x - x^3, \qquad y = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}},$$

$$y^2 = x(1-x)^3, \qquad y^4 = x^3(x-1), \qquad y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad y = \pm\sqrt{1+x} \pm \sqrt{1-x} \text{ (aire de la boucle)},$$

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - x - 1}, \qquad y = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2}, \qquad y = x\sqrt{1+x^2} + x^2 - 2;$$

$$x^3 + y^3 = a^3 \text{ (points d'inflexion)}, \qquad xy^2 - 3y(x+y) + 2x^2 = 0, \qquad xy^2 + x^3 - x^2 + y = 0,$$

$$y^5 + 2x^2y^2 - x^3, \qquad (x+y)(x-y)^2 - 3x = 0, \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1,$$

$$2y^5 - 5x^2y^2 + 3x = 0, \qquad xy^2 + y^3 - y^2 + x = 0, \qquad (x-2y)(x^2 - y^2) + 2x - y = 0, \qquad y^2 - 2xy + x^2 + x^4 - x^6 = 0,$$

$$xy^2 + (x+y)y + 1 = 0, \qquad (x-1)^2(x-y) + x + y = 0, \qquad x^2(x^2 + y^2) - 4x^2y + 3y^2 = 0, \qquad x^m y^p = a^{m+p};$$

$$y = x^3 e^x \text{ (aire)}, \quad y = e^{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}, \quad y = x\cot\frac{x}{a}, \quad y = x\sin x, \quad y = x(x - \operatorname{L}x), \quad y = \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right),$$

$2\arcsin x = 3\arcsin y$.

7031. — Construire les courbes définies par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1+t}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t} \\ y = \dfrac{1+t^2}{t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^3}, \\ y = \dfrac{1+t^2}{1-t^3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2t^2-1}{\sqrt{t^2-1}}, \\ y = \dfrac{t^3-1}{\sqrt{t^2-1}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t(a^4-t^4)}{a^4+t^4}, \\ y = \dfrac{2a^2t^3}{a^4+t^4}. \end{cases}$$

7032. — Construire les courbes définies par les équations en coordonnées polaires

$$\rho = a(1+\cos 8\omega), \quad \rho = a + b\cos 3\omega, \quad r = \frac{1}{\cos\theta + \sin 2\theta}, \quad \rho = \frac{\cos 3\omega}{\sin 2\omega}, \quad \rho = \frac{1-\cos\omega}{2\sin^3\omega}, \quad \rho = \frac{1}{2\sin\omega - \cos\omega},$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1-2\cos\omega}, \quad \rho = a\,\frac{1+\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}\omega}, \quad \rho = \frac{a}{2+\cos\omega}, \quad \rho = \sqrt{\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}}, \quad \rho = \cos\omega - \frac{1}{4\cos\omega}, \quad \rho = \frac{1-2\cos\omega}{\cos\omega + \sin\omega},$$

$$\rho = \cos\omega + \frac{1}{\cos\omega + \sin\omega}, \quad \rho = \cos\omega + \frac{1}{\cos 2\omega}, \quad \rho = 1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \quad \rho = \operatorname{tg}\frac{3\omega}{2}, \quad \rho = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \quad \rho = \frac{p}{1-2\cos\frac{\omega}{2}},$$

$$\rho = ae^{\lg\omega}, \quad \frac{1}{\rho} = a\cos^2\frac{\omega}{2} + 2b\cos\frac{\omega}{2} + c\sin^2\frac{\omega}{2}, \quad \rho = \frac{\cos\omega}{\omega}.$$

7033. — On donne deux droites Ox, Oy faisant un angle de 45°. Sur Ox on prend deux points A et A′ tels que $OA = OA' = a$, et sur Oy un point B tel que $OB = b$. Démontrer que la longueur x définie par l'égalité $x = \sqrt[4]{a^4+b^4}$ est moyenne proportionnelle entre AB et A′B.

7034. — On donne un angle $\widehat{AOB} = \theta$ sur les côtés duquel on prend des longueurs $OA = a$, $OB = b$. En A et en B on élève des perpendiculaires sur OA et OB respectivement ; ces perpendiculaires se coupent au point C. Calculer l'aire du quadrilatère OACB en fonction de a, b, θ.

7035. — Soient (x,y), (x',y'), (x'',y'') les coordonnées de trois points par rapport à un système d'axes faisant l'angle θ. Montrer que la quantité $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} \sin\theta$ ne change pas si l'on fait une transformation de coordonnées quelconques. Interprétation géométrique.

7036. — Construire la courbe $y^2 = \dfrac{a^2x^2}{a^2-x^2}$. Montrer que la courbe est unicursale, et exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction rationnelle d'un paramètre.

7037. — On considère les courbes définies par l'équation $x^n y^p = a^{n+p}$. Examiner si les intégrales $\int_a^{+\infty} y\,dx$ et $\int_a^{+\infty} x\,dy$ ont un sens.

7038. — Représentation du cercle en coordonnées polaires. Montrer que l'inverse d'un cercle passant par l'origine par rapport à ce point est une droite.

7039. — Propriétés de la spirale logarithmique. Rectification ; aire.

7040. — Calculer le rayon de courbure R de l'enveloppe de la droite $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$, p étant une fonction de θ. Si l'on pose $r^2 = p^2 + p'^2$, démontrer que $R = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(r^2)}{dp}$.

7041. — La normale en un point M d'une courbe rencontre Ox au point N. Sur la perpendiculaire à Ox au point N on prend une longueur NP égale à k. MN, k désignant une constante. Trouver la tangente à la courbe lieu du point P. Montrer que cette tangente rencontre Ox au même point que la tangente en M à la courbe donnée.

7042. — Étant donnée la chaînette $y = \operatorname{ch} x$, trouver le rayon de courbure et le centre de courbure. Propriétés relatives à la longueur de l'arc, à l'ordonnée et à la distance du pied de l'ordonnée à la tangente.

7043. — Un cercle C′ roule sans glisser sur un cercle fixe C de rayon triple et à l'intérieur. Etudier la courbe décrite par un point du cercle variable.

7044. — Sur la tangente en un point M d'une ellipse on porte dans un sens déterminé une longueur constante $MP = l$. Evaluer l'aire comprise entre l'ellipse et la courbe lieu du point P.

7045. — Longueur d'un arc de parabole.

7046. — Centre de courbure de la courbe $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$. Développée.

7047. — Propriétés des courbes parallèles.

7048. — La polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle est l'inverse de la podaire de cette courbe par rapport au centre du cercle.

7049. — Trouver la longueur de l'arc de courbe enveloppée par la droite $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$, p étant une fonction de φ.

7050. — Construire la courbe $x^2y^2 - xy(x+y) + x^2 - y^2 = 0$. Trouver les points doubles. Montrer que la courbe est unicursale, et exprimer les coordonnées d'un point en fonction rationnelle d'un paramètre.

7051. — Un cercle se déplace en roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon quatre fois plus grand. Trouver les équations paramétriques du lieu d'un point quelconque du cercle mobile.

7052. — Trouver l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des coniques ayant même sommet, même direction d'axe et même paramètre.

7053. — Démontrer que le rayon de courbure R en un point d'une courbe plane est donné par la formule

$$R^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

7054. — Lieu des pôles des normales à une conique.

7055. — Etudier la développée de la courbe $y = \sin x$.

7056. — On fait rouler un cercle γ sur un cercle égal C. Lieu d'un point du cercle γ. Montrer que ce lieu est une cardioïde.

7057. — Rectifier la courbe $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$.

7058. — On donne l'équation différentielle $x + yy' = \frac{2ay'}{\sqrt{1+y^2}}$ et on considère toutes les courbes intégrales (C). Former l'équation différentielle que vérifient toutes les courbes polaires réciproques des courbes (C) par rapport à la parabole $x^2 - 2y = 0$. Intégrer cette équation et en déduire l'intégrale de l'équation proposée.

7059. — Trouver les longueurs des tangentes issues du point (a, b) à la courbe $xy = 1$.

7060. — Construire la courbe $y = \cos \sqrt{x}$. Cas où x est négatif. Rayon de courbure au point de rencontre avec Oy.

7061. — Tangente en un point d'une podaire.

7062. — Trouver des polynomes P, Q, R satisfaisant à l'une des identités $P^2 + Q^2 \equiv R^2$, $(P^2 + Q^2)^2 \equiv 4PQR^2$.

7063. — Représentation paramétrique de la lemniscate. Relation qui doit exister entre les paramètres de quatre points de la courbe pour que ces quatre points soient sur un cercle. Etant donné un point de la lemniscate, trouver l'intersection du cercle osculateur en ce point avec la courbe. Y a-t-il des points où le cercle osculateur rencontre la courbe en quatre points confondus ?

7064. — Trouver l'aire comprise entre une parabole et sa développée.

7065. — Si une courbe est unicursale, sa développée est aussi unicursale.

7066. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, deux points A et A' sur Ox (OA = OA'), deux points B et B' sur Oy (OB = OB'). Lieu des points M d'où l'on voit AA' et BB' sous des angles égaux.

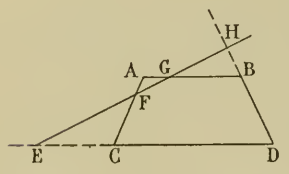
7067. — Etablir l'existence du cercle osculateur à la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$.

7068. — Développée d'une courbe. Propriétés de l'arc.

7069. — Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $\rho^2 = \lambda^2 \frac{\pi - \omega}{\omega}$, λ étant le paramètre.

7070. — Sur la tangente en M à une courbe C on porte une longueur constante MP. Montrer que la normale en P au lieu de ce point passe par le centre de courbure de la courbe C au point M.

7071. — On donne un trapèze isocèle ABCD et une droite qui rencontre les côtés aux points E, F, G H. Trouver l'enveloppe de cette droite de façon que E et G soient conjugués harmoniques par rapport à F et H.



7072. — Etant donnée la courbe $y^2 = x^3$, former l'équation du diamètre des cordes parallèles à la direction $y = x$.

7073. — Par l'origine O on mène une droite rencontrant la courbe $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ au point A, et par le point A on élève une perpendiculaire à OA. Trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire.

7074. — Trouver l'aire d'un limaçon de Pascal sans point double, en le considérant comme podaire d'un cercle. Interpréter géométriquement le résultat.

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1909 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Mathématiques.

1818. — On considère le quadrant AB d'une ellipse qui a pour demi-axes a et b. On demande :

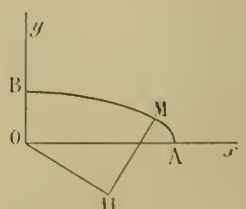
1° De déterminer le pied M de la normale qui passe à une distance du centre égale à $a - b$;

2° De calculer la différence de longueur des deux arcs AM et MB en supposant $a = 3^m$ et $b = 1^m$.

On prendra pour variable le paramètre φ qui représente un point quelconque de l'ellipse par les formules

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi.$$

Pour déterminer la position du point M on formera l'équation qui donne la valeur correspondante de φ; puis on cherchera cette valeur pour $a = 3^m$, $b = 1^m$.



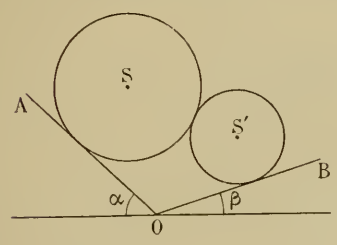
OA = 3m.
OB = 1m.
OH = 2m.

On écrira ensuite l'expression des deux intégrales qui représentent les longueurs AM et MB, et on les calculera en employant 5 trapèzes pour la première et 10 pour la seconde : la longueur des arcs sera exprimée en centimètres, et l'approximation devra être supérieure au demi-centimètre.

Dans les opérations logarithmiques il est inutile d'interpoler.

(*24 mai, de 8 h. à midi.*)

I. — **1819**. Un point se meut dans un plan de telle façon que le vecteur représentant sa vitesse soit à chaque instant la résultante de deux vecteurs constants : l'un, de direction fixe ; l'autre, perpendiculaire au rayon joignant le point à une origine fixe. Trouver la trajectoire et déterminer l'accélération.



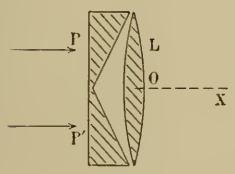
II. — **1820**. Deux sphères homogènes pesantes S et S' de rayons différents reposent sur deux plans OA, OB, qui se coupent suivant une horizontale et forment des angles donnés α, β avec le plan horizontal. En outre ces deux sphères sont tangentes entre elles. Trouver la position d'équilibre du système en supposant que tous les frottements soient négligeables.

(*26 mai, de 8 h. à 11 h.*)

Physique.

I. — Décrire *brièvement* les méthodes expérimentales de mesure du grossissement d'une lunette astronomique, en supposant connue la théorie de l'instrument.

II. — **1821**. Un faisceau de rayons lumineux parallèles tombe sur un système optique formé de deux prismes identiques P et P' et d'une lentille mince convergente L. La lumière arrive normalement sur les deux prismes qui sont opposés par leurs arêtes, puis, après réfraction dans ces prismes, traverse la lentille, dont l'axe principal OX est parallèle au faisceau incident.



On demande de :

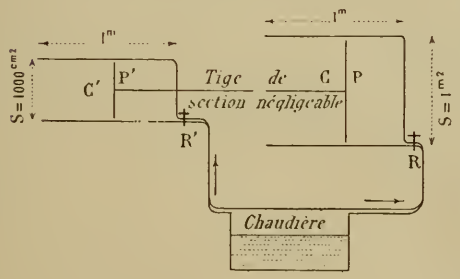
1° Calculer la distance des deux points lumineux que l'on observe dans le plan focal de la lentille lorsque la lumière incidente est monochromatique.

Angle au sommet des prismes	15°
Indice du verre des prismes	$\frac{3}{2}$
Distance focale de la lentille.	10 cm.

2° *Décrire* les phénomènes observés lorsque la lumière incidente est blanche (la lentille n'est pas achromatisée).

III. — **1822**. On se propose de faire le vide dans un cylindre C derrière un piston P. On dispose pour cela de deux moyens différents :

a) On peut par un robinet R mettre le fond du cylindre en communication avec une chaudière et envoyer derrière le piston P de la vapeur d'eau. Celle-ci est à une pression juste suffisante pour déplacer P, qui est supposé glisser sans frottement.



Quand le piston a été ainsi poussé à fond de course, on l'immobilise dans cette position par un dispositif mécanique quelconque, on ferme le robinet R et on laisse la vapeur se condenser sous l'action du refroidissement par les parois du cylindre, la température finale étant assez basse pour que la tension de la vapeur puisse être alors négligée.

b) On peut aussi réaliser le vide derrière le piston P, en laissant le robinet R fermé et en fixant à P la tige d'un second piston P', qui se meut dans un cylindre C', ainsi que le représente la figure. La traction sur P s'effectue alors en envoyant par le robinet R' de la vapeur dans le cylindre C' à une pression juste suffisante pour déplacer le piston P', qui glisse sans frottement. On demande :

1° Le travail en kilogrammètres qu'effectue la vapeur en poussant soit le piston P dans le procédé *a*, soit le piston P' dans le procédé *b* ;

2° Le nombre de grandes calories qu'il faut fournir à la chaudière pour chauffer et vaporiser l'eau nécessaire à une opération, soit dans le procédé *a*, soit dans le procédé *b* et, par suite, quel est celui de ces deux procédés qui est le plus avantageux en ce qui concerne la dépense en combustible. On ne tiendra pas compte

dans ces calculs de la condensation de la vapeur au contact des pistons et des parois des cylindres pendant la durée de l'admission de la vapeur.

3° L'avantage de l'un des procédés sur l'autre subsiste-t-il si on tient compte de cette condensation, en admettant que pistons et parois des cylindres ont même épaisseur dans les deux appareils, sont constitués par le même métal et que ces pièces sont chauffées par la condensation de la température ambiante de 16° à la température de la vapeur, sans se refroidir appréciablement par conductibilité ou rayonnement pendant ce temps?

Section du cylindre C	1 mètre carré.
Section du cylindre C′	1000 cm².
Section de la tige de P′	négligeable.
Course des deux pistons	1 mètre.
Température de l'eau d'alimentation de la chaudière . .	16°.
Pression atmosphérique.	1^{kg} par cm².
Poids de 1^{m3} d'air à 0° et sous la pression de 1^{kg} par cm² .	$1^{kg},3$.
Coefficient de dilatation de l'air	$\frac{1}{270}$.
Densité par rapport à l'air de la vapeur d'eau	$\frac{5}{8}$.
Nombre q de grandes calories nécessaires pour chauffer un kilogramme d'eau de 0° à t° et le vaporiser à cette température sous la tension maximum de la vapeur	$q = 606 + 0,3\,t$.
Relation entre la tension maximum p de la vapeur d'eau, en kg par cm² et la température t.	$p = \left(\frac{t}{100}\right)^4$.

Nota. — La précision demandée dans les deux problèmes est celle que donne la règle à calculs ordinaire de 26cm de longueur.

(*27 mai, de 8 h. à midi.*)

QUESTION PROPOSÉE

1823. — On considère une courbe (S) et le cercle (Γ) décrit sur le rayon de courbure de la courbe en M, comme diamètre.

1° Déterminer les courbes (S) pour lesquelles le cercle (Γ) est tangent à Ox. Construire celle de ces courbes qui passe à l'origine.

2° Trouver pour cette courbe le lieu (Σ) du centre I de (Γ).

3° Soit P la projection de I sur Ox; montrer que l'on a

$$\text{arc } OM = 2OP.$$

4° Montrer que les tangentes en M à (S) et en I à (Σ) se coupent sur Ox.

J. Haag.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de* 1908.)

Physique et Chimie

1749. — *Dans un tube de porcelaine rempli de coke et porté au rouge on fait passer un courant d'air chaud chargé de vapeur d'eau.*

On recueille dans un eudiomètre 200 *centimètres cubes du mélange gazeux ainsi obtenu. Après agitation*

avec un excès de potasse, le volume du gaz est réduit à 192 centimètres cubes. On expulse la potasse, on rince la chambre eudiométrique, on y introduit la quantité de gaz tonnant nécessaire pour rendre la combustion complète et on fait jaillir dans le mélange une étincelle électrique; le volume s'abaisse à 157 centimètres cubes. Une nouvelle agitation avec de la potasse amène enfin ce volume à 135 centimètres cubes. Une addition d'acide pyrogallique au liquide, qui brunit, prouve d'ailleurs que le mélange final contient encore de l'oxygène.

Sachant que toutes les mesures de volume sont effectuées sur des gaz saturés de vapeur d'eau et ramenées à la même pression et à la même température, l'on dira :

1° *Quels sont les gaz qui constituent le mélange analysé, supposé sec ;*

2° *Quelle est la composition centésimale, en volumes, de ce mélange ;*

3° *Quelle est la valeur, approchée à un centimètre près par excès, de sa densité δ par rapport à l'air.*

On supposera que les gaz étudiés obéissent rigoureusement aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

On admettra que l'air utilisé est composé uniquement d'oxygène et d'azote en proportions normales, et l'on adoptera pour les poids moléculaires de l'azote atmosphérique et des autres éléments chimiques les valeurs usuelles en nombres entiers.

1° Le mélange contient de l'*azote* puisqu'il est produit avec de l'air, du *gaz carbonique* puisque la potasse produit une absorption, de l'*oxyde de carbone* puisqu'après combustion il y a de nouveau absorption par la potasse, de l'*hydrogène* puisque le courant d'air était chargé de vapeur d'eau, de l'*oxygène* (quelque invraisemblable que ce soit) puisqu'il y a combustion et que le mélange final en contient encore.

2° Soient x, y, z, u et v les volumes respectifs de ces cinq gaz.

D'après le volume initial, on a $x + y + z + u + v = 200$.

D'après la première absorption par la potasse, $y = 8$.

D'après la seconde absorption, $z = 22$.

La combustion produit une diminution de $192 - 157 = 35$; or la combustion de l'hydrogène fait disparaître un volume $\frac{3}{2}u$ et celle de l'oxyde de carbone un volume $\frac{1}{2}z$;

donc
$$\frac{3}{2}u + \frac{1}{2}z = 35,$$
d'où
$$u = 16.$$

Pour simplifier, supposons l'air formé de 1 volume d'oxygène pour 4 d'azote. L'oxygène de l'air initial, dont le volume est $\frac{1}{4}x$ et celui de l'eau décomposée par le coke, dont le volume est $\frac{1}{2}u$, se retrouvent, dans le mélange analysé, partie à l'état libre (volume v), partie dans le gaz carbonique (volume y) et partie dans l'oxyde de carbone $\left(\text{volume } \frac{1}{2}z\right)$.

Donc
$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}u = v + y + \frac{1}{2}z.$$

La première et la dernière équation, combinées avec les valeurs trouvées pour y, z et u, donnent
$$x = 132 \qquad \text{et} \qquad v = 22.$$

Donc, pour 100 volumes du mélange, on a

Azote	66,
Gaz carbonique.	4,
Oxyde de carbone	11,
Hydrogène.	8,
Oxygène.	11.

3° Les poids moléculaires de ces gaz sont respectivement 28, 44, 28, 2 et 32. Leurs densités sont respectivement égales aux quotients de ces nombres par 28,9. En appliquant la règle des mélanges, nous aurons

$$100\delta = \frac{66 \times 28 + 4 \times 44 + 11 \times 28 + 8 \times 2 + 11 \times 32}{28,9},$$

$$\delta = 0,934.$$

Bonne solution de M. R. Manen, à Albi.

1750. — *On a préparé une eau savonneuse de masse spécifique* μ.

On commence par mesurer sa hauteur d'ascension h *dans un tube capillaire de diamètre* $2r$.

On plonge ensuite un instant dans ce liquide le tube de dégagement d'un gaz de densité δ; *après avoir arrêté le courant gazeux, on attend que la bulle formée soit en équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère ambiante, où règne la pression* p_a; *on mesure alors son diamètre* $2R$.

1° *Exposer très brièvement quels sont les phénomènes capillaires mis en jeu par ces expériences, et montrer comment on peut les expliquer par l'existence d'une tension superficielle* A, *dont on donnera la définition.*

2° *Donner les relations qui lient les grandeurs littérales précitées, l'accélération* g *de la pesanteur et la pression* p *qui règne à l'intérieur de la bulle, et justifier les formules employées par l'étude de l'équilibre du liquide dans le tube de diamètre très petit* $2r$:

a) Ecrire la condition d'équilibre du très petit volume de liquide compris entre le ménisque que, conformément à l'expérience, l'on suppose de forme sensiblement sphérique, et le plan de section droite qui lui est tangent en son sommet ;

b) En déduire la hauteur h *de la colonne soulevée ;*

c) En admettant, sans démonstration, la légitimité de l'extension de la formule trouvée au paragraphe a) au cas d'une surface libre sphérique de courbure finie, et en supposant égales les tensions superficielles du liquide au contact de l'air et du gaz gonflant la bulle, établir l'équation qui détermine p.

3° *Calculer, d'après les données numériques ci-dessous, la valeur de la différence* $p - p_a$, *qui sera exprimée successivement en* C. G. S. *et en fraction de kilogramme par centimètre carré ; donner également la valeur de la tension superficielle en* C. G. S *et en milligrammes par millimètre.*

Par une légère secousse, on détache la bulle du tube maintenu vertical de manière à l'abandonner dans l'atmosphère sans vitesse initiale ; la bulle s'élève et, au bout du temps t, *crève en arrivant au contact du plafond du laboratoire, élevé de* H *au-dessus de l'extrémité du tube.*

4° *Donner l'expression littérale des forces qui sollicitent la bulle d'épaisseur* e *plongée dans l'air de masse spécifique* a ; *en déduire celle de l'accélération* γ *qu'elles lui impriment ; on négligera les variations de ces forces pendant le déplacement de la bulle et la résistance que l'air oppose à son mouvement.*

5° *Calculer la valeur numérique de l'accélération* γ *en* C. G. S., *et, avec un seul chiffre significatif, celle de l'épaisseur* e *en fraction de millimètre.*

Données numériques en C. G. S. : $\mu = 1$, $h = 3$, $2r = 0,1$, $2R = 10$, $t = 5$, $H = 410$.

On donnera à δ *la valeur trouvée au paragraphe* 3 *du problème de chimie* (0,94) ; *on supposera la pression atmosphérique* p_a *voisine de la normale et la température voisine de* 15° *centigrades.*

1° On explique l'ascension observée dans la première expérience en supposant le liquide sollicité par des actions qui s'exercent tout le long de la ligne de raccordement de sa surface libre avec la paroi du tube ; l'action exercée sur un élément ds de cette ligne est normale à cet élément, tangente à la surface du liquide et peut être représentée par $A\,ds$, A désignant la force par unité de longueur ou tension superficielle.

Dans la seconde expérience, il existe un excès de la pression intérieure sur la pression extérieure ; cet excès s'explique par la même théorie qui permet de relier l'excès de pression à l'intérieur d'un ballon et la tension de l'étoffe, théorie qu'on trouve dans les cours de physique.

2° *a*) Négligeons le poids du petit volume considéré. Les seules forces verticales qui déterminent son équilibre sont alors celles qui proviennent des pressions extérieure et intérieure p et p' et de la tension superficielle le long du cercle de raccordement avec la paroi du tube. Les premières ont pour résultante, de bas en haut, $\pi r^2(p'-p)$; les secondes, en supposant le ménisque hémisphérique, $2\pi r A$. Donc

$$\pi r^2(p'-p) + 2\pi r A = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad p - p' = \frac{2A}{r}.$$

b) D'autre part, en comparant les pressions sur le plan général de la surface libre et sur le plan tangent au sommet du ménisque, on a $p - p' = h\mu g$. En égalant cette expression à la précédente, on a

$$(2) \qquad h = \frac{2A}{\mu g}\,\frac{1}{r}.$$

c) Supposons l'expression (1) générale. En comparant successivement les pressions p et p_a à celle qui règne dans la masse du liquide constituant la bulle, on trouve facilement

$$(3) \qquad p - p_a = \frac{4A}{R}.$$

3° L'application numérique des formules (2) et (3) donne, en unités C. G. S.,

$$A = 74 \qquad \text{et} \qquad p - p_a = 59.$$

Avec les autres unités, on a

$\mu g = 1$ milligramme par millimètre cube,
$A = 7{,}5$ milligrammes par millimètre,
$p - p_a = 0{,}00006$ en kilogramme par centimètre carré.

4° Les forces qui sollicitent la bulle se composent de son poids et de la poussée de l'air ; ce qui représente une résultante verticale de bas en haut égale à

$$f = \frac{4}{3}\pi R^3 a g - \frac{4}{3}\pi R^3 a\delta g - 4\pi R^2 e\mu g = \frac{4}{3}\pi R^2[Ra(1-\delta) - 3e\mu]g.$$

Cette force donne l'accélération γ à la masse de la bulle $\frac{4}{3}\pi R^3 a\delta + 4\pi R^2 e\mu$. On peut donc écrire, en divisant tout par $\frac{4}{3}\pi R^2$,

$$[Ra(1-\delta) - 3e\mu]g = [Ra\delta + 3e\mu]\gamma.$$

5° L'accélération γ est liée à l'espace parcouru H et au temps t par la relation

$$H = \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

dont l'application numérique donne $\gamma = 32{,}8$, soit presque exactement $\frac{1}{30}g$.

En portant cette valeur dans l'équation précédente, faisant $\delta = 0{,}94$ et $a = \frac{1}{800}$, on trouve

$$e = 0^{\text{cm}}{,}00006.$$

MATHÉMATIQUES.

I. — **1751**. — *Dans un triangle rectiligne* ABC *on désigne par :*
a, b, c, les longueurs des trois côtés ;
b' la projection du vecteur CA *sur le vecteur* CB *;*

c' la projection du vecteur BA *sur le vecteur* BC ;
h_a la hauteur relative au côté a.

On demande de calculer $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ *et h_a en fonction de a, b, c ; et de démontrer la relation*

$$\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{b+c+a}{b+c-a}.$$

Dans tous les cours de trigonométrie on établit les formules

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$ah_a = 2S = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$2p$ désignant le périmètre $a+b+c$ et S la surface.

On en déduit $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

On a $$b' = CA\cos(CA, CB) = b\cos C, \qquad c' = BA\cos(BA, BC) = c\cos B;$$
par suite

$$\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{b(1+\cos C)}{c(1-\cos B)} = \frac{b\cos^2\frac{C}{2}}{c\sin^2\frac{B}{2}}.$$

Or $$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{ab}, \qquad \sin^2\frac{B}{2} = \frac{(p-a)(p-c)}{ac},$$

d'où $$\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{p}{p-a} = \frac{b+c+a}{b+c-a}.$$

On peut encore obtenir cette formule de la manière suivante. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A, on a

$$\overline{AH}^2 = c^2 - c'^2 = b^2 - b'^2;$$

on en tire $$\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{c+c'}{b-b'} = \frac{b+c+b'+c'}{b+c-(b'+c')},$$

ou, comme $b'+c' = a$,

$$\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{b+c+a}{b+c-a}.$$

J. GUILLOUD, lycée de Nice.

Bonnes solutions par MM. R. Bouvaist ; G. Lach ; M. Mazet, à Sétif ; R. Manen ; Henry Niox-Chateau ; Edmond Rème ; A. Rousseau ; P. Salleron ; L. Simon ; L. Sire.

II. — **1752**. — *Calculer les dérivées des fonctions de x suivantes :*

$$L\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}, \qquad L(x+\sqrt{x^2+a}), \qquad L(x-\sqrt{x^2+a}).$$

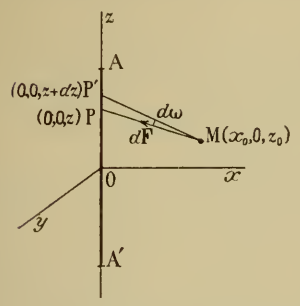
On a $$\left(L\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$[L(x+\sqrt{x^2+a})]' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

$$[L(x-\sqrt{x^2+a})]' = \frac{1}{x-\sqrt{x^2+a}}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right] = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

R. B., R. MANEN, L. SIMON.

III. — **1753**. — *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et deux points* A *et* A′ *situés sur* Oz *de part et d'autre de* O, *à des distances* $OA = OA' = l$.



Soit z *l'ordonnée d'un point quelconque* P *de la droite* AA′. *Chaque élément infinitésimal* $PP' = dz$ *de cette droite* AA′ *exerce sur tout point* M *de l'espace une attraction* dF *qui a pour valeur*

$$dF = \frac{dz}{R^2} \quad \textit{et est dirigée dans le sens } MP.$$

(R *désigne la longueur* MP.)

On demande d'étudier le champ de force produit par le segment de droite AA′. *Ce champ étant de révolution autour de* Oz, *on peut supposer que le point* M *se trouve dans le plan* $y = 0$. *Soient* $(x_0, 0, z_0)$ *les coordonnées de* M.

1° *Démontrer que les lignes de force sont des hyperboles ayant leurs foyers en* A *et* A′, *et que les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution.*

On commencera par établir la formule

$$dF = \frac{d\omega}{x_0},$$

dans laquelle $d\omega$ *représente l'angle des deux droites* MP *et* MP′.

On admettra d'ailleurs sans démonstration que les seules courbes dont la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs MA *et* MA′ *sont les ellipses et les hyperboles ayant leurs foyers en* A *et* A′.

2° *Démontrer que l'attraction au point* M *a pour valeur*

$$F = \frac{k}{\sqrt{rr'}}.$$

Dans cette formule r *et* r' *représentent les rayons vecteurs* MA *et* MA′. k *est une quantité qui reste constante sur une même surface de niveau.*

3° *On décompose l'attraction* F *suivant les deux rayons vecteurs* MA *et* MA′. *Démontrer que ces composantes restent constantes lorsque le point* M *se déplace sur une surface de niveau.*

4° *Calculer le potentiel en* M. *Ce potentiel est donné par la formule*

$$V = \int \frac{dz}{R}.$$

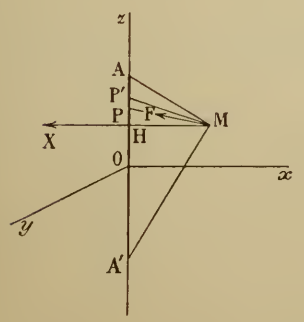
Faire successivement le calcul en choisissant comme variables d'intégration :

1° $u = z + R$; 2° $u = R$; 3° $u = z$; 4° $u = \omega$;

ω *désignant l'angle de* Oz *avec* PM.

On utilisera les résultats obtenus dans les questions I et II. Vérifier l'identité des solutions et exprimer V *en fonction de* $r + r'$.

1° Si on appelle ω l'angle que fait MP avec une parallèle à l'axe des x menée par le point M, MX, et orientée dans le sens MH, vers Oz, et si on prend pour sens positif de rotation de ω le sens de MA′ vers MA, on voit que $d\omega$ est l'accroissement de cet angle et que $d\omega$ a le signe de dz ; d'autre part la somme des variations de ω est égale à l'angle de MA′ avec MA, que nous appellerons α.



Le triangle rectangle MHP donne

$$z - z_0 = x_0 \operatorname{tg} \omega, \qquad dz = \frac{x_0 d\omega}{\cos^2 \omega};$$

par suite,

$$dF = \frac{x_0 d\omega}{R^2 \cos^2 \omega},$$

et, comme

$$x_0 = R \cos \omega,$$

$$dF = \frac{d\omega}{x_0}.$$

Appelons β l'angle de MA′ avec MH, γ l'angle de MH avec MA, de telle sorte que $\beta+\gamma=\alpha$. Les projections de la force dF sur les deux axes MA′ et MA seront $\frac{\cos(\beta+\omega)d\omega}{x_0}$ et $\frac{\cos(\gamma-\omega)d\omega}{x_0}$.

La projection de la résultante F sur MA′ est donc $\int_{-\beta}^{\gamma}\frac{\cos(\beta+\omega)d\omega}{x_0}$, et celle de la même force sur MA est $\int_{-\beta}^{\gamma}\frac{\cos(\gamma-\omega)d\omega}{x_0}$; elles sont égales toutes les deux à $\frac{\sin\alpha}{x_0}$, ce qui montre que la force F est dirigée suivant la bissectrice intérieure de l'angle A′MA.

Il en résulte que les lignes de niveau sont des ellipses ayant pour foyers les points A et A′, et les lignes de force, des hyperboles ayant les mêmes foyers.

2° Soit F l'intensité de la résultante, nous avons alors $F\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{x_0}$, puis $F=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{x_0}$. Telle est l'intensité de la résultante.

D'autre part, en évaluant de deux façons l'aire du triangle MAA′, nous avons $2lx_0=rr'\sin\alpha$; la force MF a donc pour valeur

$$F=\frac{4l\sin\frac{\alpha}{2}}{rr'\sin\alpha}=\frac{2l}{rr'\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Or $r\cos\frac{\alpha}{2}$ est la distance du foyer A à la tangente à l'ellipse qui passe au point M, $r'\cos\frac{\alpha}{2}$ est la distance du foyer A′ à la même tangente, et l'on sait que le produit de ces deux nombres est constant et égal au carré du demi petit axe ; donc

$$rr'\cos^2\frac{\alpha}{2}=b^2=\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2-l^2;$$

par suite $$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{\sqrt{rr'}},\qquad\text{et}\qquad F=\frac{2l}{b\sqrt{rr'}}=\frac{k}{\sqrt{rr'}}.$$

Ce nombre k est évidemment constant sur toute l'ellipse qui constitue la ligne de niveau du point M.

3° Les deux composantes de F suivant les rayons vecteurs MA et MA′ sont égales ; soit f leur valeur commune ; on a évidemment $F=2f\cos\frac{\alpha}{2}$, et, comme F a pour valeur $\frac{2l}{rr'\cos\frac{\alpha}{2}}$, on a

$$f=\frac{l}{rr'\cos^2\frac{\alpha}{2}};$$

d'ailleurs nous venons de voir que $rr'\cos^2\frac{\alpha}{2}$ a pour valeur b^2 ; donc f est égal à $\frac{l}{b^2}$ et cette quantité est constante sur toute la surface de niveau du point M.

4° Proposons-nous de calculer le potentiel $V=\int\frac{dz}{R}$, relatif à l'attraction de tous les éléments du segment AA′. Nous avons

$$R=\sqrt{x_0^2+(z-z_0)^2},$$

et, par suite,

$$dR=\frac{(z-z_0)dz}{R}.$$

1° L'intégration directe est évidente : on a en effet

$$\int\frac{dz}{R}=\int\frac{dz}{\sqrt{(z-z_0)^2+x_0^2}}=L(z-z_0+\sqrt{(z-z_0)^2+x_0^2}).$$

2° En prenant R comme variable indépendante, on a $\frac{dz}{R} = \frac{dR}{z - z_0}$; or $z - z_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$; donc

$$\int \frac{dR}{z - z_0} = \int \frac{dR}{\sqrt{R^2 - x_0^2}} = L(R + \sqrt{R^2 - x_0^2}).$$

3° Si on appelle ω l'angle de MP avec MX, nous avons vu que

$$z - z_0 = x_0 \operatorname{tg} \omega \qquad \text{et} \qquad R = \frac{x_0}{\cos \omega},$$

donc

$$dz = \frac{x_0 d\omega}{\cos^2 \omega},$$

et

$$\int \frac{dz}{R} = \int \frac{d\omega}{\cos \omega} = L \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right).$$

On pouvait tout aussi bien se servir de l'angle que fait MP avec Oz ; c'est le complément de celui-ci.

4° Posons enfin $u = z + R.$

Nous aurons successivement

$$du = dz + dR, \qquad (u - z)^2 = x_0^2 + (z - z_0)^2,$$

puis

$$2z(u - z_0) = u^2 - x_0^2 - z_0^2, \qquad z = \frac{u^2 - x_0^2 - z_0^2}{2(u - z_0)};$$

donc

$$R = u - z = \frac{(u - z_0)^2 + x_0^2}{2(u - z_0)}.$$

Calculons maintenant dz; nous pouvons le calculer directement ou à l'aide de $dz = du - dR$. Le calcul direct est plus rapide et donne

$$dz = \frac{(u - z_0)^2 + x_0^2}{2(u - z_0)^2} du.$$

Nous voyons donc finalement que $\int \frac{dz}{R} = \int \frac{du}{u - z_0} = L(u - z_0).$

Appliquons ces divers résultats au calcul du potentiel : dans le premier cas, les limites sont $-l$ et $+l$; dans le second, r' et r; dans le troisième, $-\beta$ et γ; dans le quatrième, $r' - l$ et $r + l$. Les quatre expressions de V sont donc

$$V = L \frac{l - z_0 + \sqrt{x_0^2 + (l - z_0)^2}}{-l - z_0 + \sqrt{x_0^2 + (l + z_0)^2}}, \qquad V = L . \frac{r + \sqrt{r^2 - x_0^2}}{r' + \sqrt{r'^2 - x_0^2}},$$

$$V = L \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}, \qquad V = L \frac{r + l - z_0}{r' - l - z_0}.$$

Il est visible que les deux premières et la quatrième sont identiques.

D'autre part, $l - z_0$ est la projection de r sur AA', $l + z_0$, la projection de r' sur A'A ; d'après la question **1751**, nous avons donc

$$\frac{r + l - z_0}{r' - l - z_0} = \frac{p}{p - 2l},$$

en désignant par $2p$ le périmètre du triangle. Nous avons donc enfin

$$V = L \frac{r + r' + 2l}{r + r' - 2l}.$$

Transformons maintenant la troisième expression. Elle peut s'écrire

$$V = L \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)},$$

puisque les angles $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$ sont complémentaires. Or $\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$ est égal à l'angle $\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$, à l'angle $\frac{A'}{2}$; d'autre part, on sait que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-2l)(p-r)}{p(p-r')}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{(p-2l)(p-r')}{p(p-r)}};$$

donc

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \frac{p-2l}{p},$$

et l'on retrouve bien

$$V = L\frac{p}{p-2l}.$$

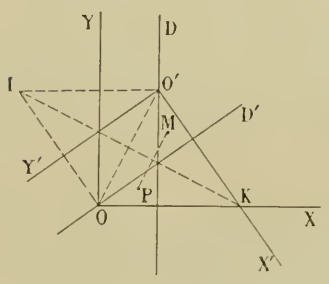
Bonnes solutions : MM. J. Guilloud, lycée de Nice ; P. Salleron ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; Amblard, à Ruines.

CONCOURS DE 1909 (*Suite.*)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

1824. — Soit un plan fixe XOY, dont les axes font l'angle $+\frac{\pi}{2}$, et qui contient une droite D ayant pour équation $X = a$.



Soit un plan mobile X'O'Y' dont les axes font l'angle $-\frac{\pi}{2}$ et qui entraîne dans son mouvement la droite D' ayant pour équation $X' = a$.

Le plan X'O'Y' glisse sur le plan XOY de telle sorte que les droites D et D' passent respectivement par les points O' et O.

Etudier la courbe décrite par un point quelconque $M(X' = x_0,\ Y' = y_0)$ entraîné dans le mouvement du plan X'O'Y'.

On remarquera que la figure formée par les six droites OX, O'X', OY, O'Y', D, D' est symétrique par rapport à la perpendiculaire IK élevée sur le milieu de OO'. Le symétrique de M par rapport à IK est donc fixe.

Soit P ce point. On cherchera l'équation de la trajectoire de M par rapport à des axes Px, Py, parallèles à OX et OY.

1° Démontrer que la trajectoire de M est une courbe du troisième ordre ayant un point double et passant par les point cycliques.

2° Déterminer les points M du plan X'O'Y' dont les trajectoires ont leurs tangentes au point double : *a)* confondues ; *b)* réelles et distinctes ; *c)* rectangulaires.

Démontrer que la trajectoire de M est :

une cissoïde oblique lorsque les tangentes au point double sont confondues ;

une strophoïde oblique — — rectangulaires ;

une podaire de parabole dans le cas général (on rappelle que la podaire est le lieu des projections d'un point sur les tangentes).

3° Etablir les réciproques des résultats 1° et 2°.

Les résultats 1°, 2°, 3° devront être établis par l'analyse.

4° On élève en O et O' les perpendiculaires OI, O'I aux droites D' et D. Chercher le lieu géométrique du point I dans le plan fixe et dans le plan mobile.

En déduire par la géométrie que la trajectoire de M est une podaire de parabole.

5° Généralisation. — Reprendre l'étude du déplacement du plan X'O'Y', mais en remplaçant les droites $D(X = a)$ et $D'(X' = a)$ par une courbe quelconque C et sa symétrique inverse C'.

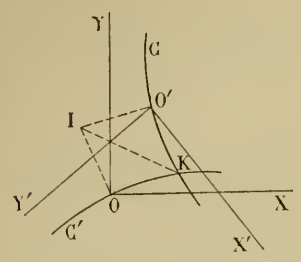
La courbe C ayant pour équations

$$X = f(u), \qquad Y = \varphi(u),$$

la courbe C' aura pour équations

$$X' = f(u'), \qquad Y' = \varphi(u').$$

Lorsque $u' = u$ le point (X', Y') est dit l'homologue du point (X, Y).



On peut toujours faire glisser le plan X'O'Y' sur le plan fixe XOY de telle sorte que les courbes C et C' passent respectivement par les points O' et O, et qu'en outre le point O' considéré comme faisant partie de C ait pour homologue le point O.

On demande d'établir les résultats suivants :

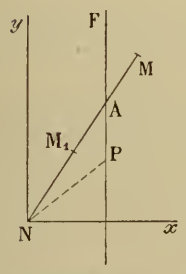
a) Soit I l'intersection des normales en O,O' aux courbes C' et C ; la perpendiculaire IK abaissée de I sur OO' est tangente en I aux lieux géométriques de ce point dans le plan fixe et dans le plan mobile.

b) Soit M un point entraîné dans le mouvement du plan X'O'Y' ; la trajectoire de M est la podaire d'une courbe semblable à la courbe I.

6° Appliquer les résultats 5° au cas où la courbe C est un cercle.

7° *Définitions et théorèmes à démontrer. — Strophoïde oblique* : Soient deux points N,P et une droite F passant par P. On mène par le point N une sécante mobile qui coupe F au point A et l'on porte sur cette sécante :

$$AM = AM_1 = AP.$$

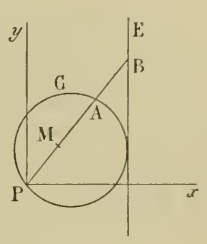


La courbe décrite par les points M et M_1 est, par définition une strophoïde oblique.

Cissoïde oblique : Soit une circonférence C, P un point de cette circonférence, E une tangente quelconque. On mène par P une sécante variable PAB et l'on prend PM = AB.

La courbe ainsi obtenue est la cissoïde oblique.

Démontrer que si, dans la définition de la cissoïde oblique on remplace la tangente E par un diamètre quelconque du cercle C, le lieu de M est une strophoïde oblique.



Si l'on remplace la tangente E par une droite quelconque, le lieu de M est une podaire de parabole.

Calcul trigonométrique.

1825. — L'équation

$$\operatorname{tg}\theta + 2\theta = 0$$

a une racine voisine de $\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{\pi}{2} + \Omega$.

Calculer, avec l'approximation que comportent les tables employées la valeur en grades et fraction décimale de grades de l'angle mesuré par l'arc Ω du cercle de rayon un.

L'on emploiera la méthode de résolution suivante :

L'équation donnée peut s'écrire

$$\log \operatorname{cotg}\Omega = \log\pi + \log\left(1 + \frac{\Omega}{100}\right),$$

$\frac{\Omega}{100}$ étant petit, l'équation

$$\log \operatorname{cotg}\Omega_1 = \log\pi$$

donne une valeur approchée Ω_1 de Ω.

Une valeur plus approchée Ω_2 est donnée par

$$\log \operatorname{cotg}\Omega_2 = \log\pi + \log\left(1 + \frac{\Omega_1}{100}\right).$$

Enfin, de Ω_2, l'on peut déduire une valeur encore plus approchée Ω_3 par le même procédé.

Si l'on calcule la valeur $f(\Omega_3)$ de l'expression

$$\log \operatorname{cotg}\Omega_3 - \log\pi\left(1 + \frac{\Omega_3}{100}\right),$$

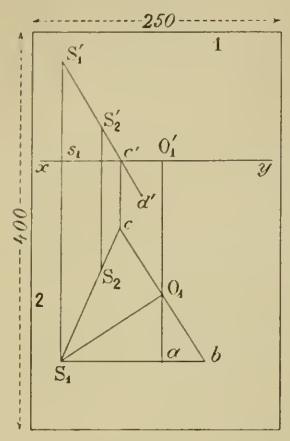
la valeur cherchée Ω sera obtenue par la résolution de l'équation

$$\frac{\Omega - \Omega_3}{-f(\Omega_3)} = K,$$

où la constante K a une valeur que l'on calculera à l'aide des tables.

Epure.

1826. — *Intersection de deux cônes ayant une génératrice commune et coupés par le plan horizontal suivant des cercles.*



Cadre 250×400 millimètres.

Données
- S'_1 à 30^{mm} des côtés 1 et 2.
- $S'_1 s_1 = 100^{mm}$.
- $s_1 S_1 = 200^{mm}$ ($S_1 ab$ parallèle à xy).
- $S_1 a = 100^{mm}$.
- $a O_1 = 65^{mm}$ ($O_1 b$ perpendiculaire à $S_1 O_1$).

Le premier cône a pour sommet S_1, S'_1 et pour directrice le cercle de centre O_1, O'_1 et de rayon $O_1 b$, situé dans le plan xy.

On trace le diamètre bO_1c et la génératrice S_1c, S'_1c'.

Le second cône est un cône de révolution à axe vertical, ayant en commun avec le premier la génératrice S_1c, S'_1c'. Sa section par le plan xy est un cercle ayant pour rayon $S_2c = 45^{mm}$.

Les génératrices du cône de révolution sont prolongées dans les deux sens; autrement dit il s'agit du solide formé par la réunion de deux cônes de révolution opposés par leur sommet commun S_2, S'_2.

On demande de représenter en faisant la distinction des parties vues et cachées:

1° En projection horizontale, ce qui reste du cône S_1, limité à sa partie inférieure par le plan horizontal xy, quand on suppose enlevée la partie comprise à l'intérieur du double cône S_2;

2° En projection verticale le solide commun au cône S_1 et au double cône S_2. Ce solide commun sera limité à sa partie inférieure par un plan horizontal passant par le point d', symétrique de S'_1 par rapport à S'_2.

On reproduira à l'encre (traits noirs discontinus ou traits continus de couleur) la construction de l'asymptote, celle d'un point courant de l'intersection avec la tangente, ainsi que celles de tous les points remarquables avec les tangentes.

L'emploi du pistolet pour le tracé des courbes est interdit. Cadre à l'encre. Titre : Intersection de cônes.

Physique.

1° Etablir la relation

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{r},$$

n_1 et n_2 étant les indices de deux milieux séparés par une surface en forme de calotte sphérique de sommet S et de rayon r, p_1 et p_2 les distances SP_1 et SP_2 au sommet de la surface d'un point P_1 de l'axe principal et de son image P_2 par réfraction à travers cette surface.

Montrer la généralité de la formule en faisant certaines conventions de signe.

2° En déduire la formule générale des lentilles minces formées d'un milieu d'indice n séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2.

3° Trouver les relations nécessaires et suffisantes que le système doit vérifier pour être achromatique. En particulier peuvent-elles exister si l'un des milieux est l'atmosphère ?

Chimie.

1827. — Un poids P de bioxyde de manganèse est divisé en deux parties, p et $P - p$.

On chauffe p avec un excès d'acide chlorhydrique jusqu'à cessation de tout dégagement gazeux, et l'on fait passer le gaz obtenu dans une solution concentrée et chaude de potasse. La solution est ensuite évaporée à sec, puis calcinée au rouge vif. Pendant la calcination on recueille le gaz qui se dégage ; il occupe le volume V.

L'autre partie est calcinée au rouge, et le gaz recueilli occupe également le volume V.

1° Quel est le rapport $\frac{p}{P}$?

2° On mélange le volume 2V de gaz à une petite quantité d'air, occupant le volume x. Pour évaluer x, on introduit le volume total $2V + x$ dans un eudiomètre, et on le mélange à un volume double de bioxyde d'azote. La réaction terminée, on absorbe les vapeurs nitreuses par la potasse, et l'on constate le volume résiduel V. Tout calcul fait on trouve $x = 10^{cm3}$.

On demande quel était le poids initial de bioxyde de manganèse, P ; et quelle quantité de bioxyde d'azote aurait été suffisante pour provoquer une réaction complète dans l'eudiomètre.

On prendra $O = 16$, $Mn = 55$. On admettra que tous les volumes sont mesurés dans les conditions normales 0° et 760^{mm}, et que les molécules gazeuses occupent dans ces conditions $22^{l}, 32$. Enfin, on supposera que l'air est formé simplement par le mélange de 79 volumes d'azote avec 21 volumes d'oxygène.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. N° 2. Novembre 1909.

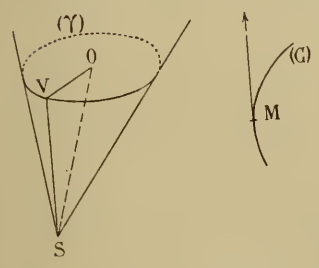
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES COURBES DONT LES TANGENTES SONT PARALLÈLES AUX GÉNÉRATRICES D'UN CONE DU SECOND DEGRÉ

par M. **Th. Caronnet.**

Soit une courbe (C) dont les tangentes sont parallèles aux génératrices d'un cône du second ordre S.



Si un point M décrit (C) suivant une loi quelconque donnée, l'hodographe relatif à ce mouvement sera une courbe située sur le cône S (l'origine de l'hodographe étant le sommet S).

Or, le cône S est capable de deux séries de cercles ; soit (γ) l'un d'eux.

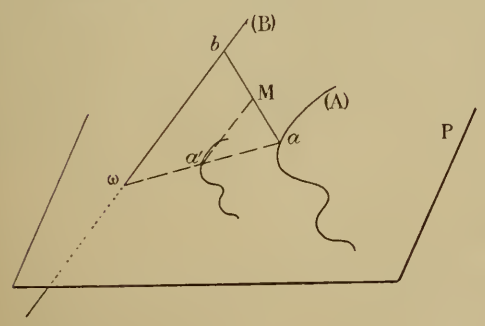
On peut supposer le mouvement de M réglé de façon que l'hodographe de ce mouvement soit le cercle (γ). Alors, les courbes (C) sont les trajectoires des mouvements qui ont pour hodographe (γ).

Déterminons ces trajectoires.

Le point O étant le centre du cercle (γ) et SV étant équipollent à la vitesse du point M, nous avons l'équipollence

$$(SV) = (SO) + (OV) = \frac{1}{2}\,[(2.SO) + (2.OV)].$$

Donc : 1° dans un plan (P) parallèle au plan du cercle (γ), traçons une courbe quelconque (A) et supposons qu'un point a décrive (A) avec la vitesse d'intensité constante $2.\overline{OV}$; 2° traçons une droite quelconque (B) parallèle à SO et supposons qu'un point b décrive (B) avec la vitesse constante $2.\overline{SO}$.



La vitesse du milieu M de ab est la demi-somme géométrique des vitesses des points a et b, elle est donc équipollente à SV.

En résumé : *Si deux points a et b sont animés, l'un d'un mouvement plan et uniforme, l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme, le milieu* M *de ab décrit une courbe* (C) *dont les tangentes sont parallèles aux génératrices d'un cône du second degré.*

On peut dire encore :

Toute courbe (C) *est le lieu du milieu d'une droite qui se déplace en s'appuyant sur une courbe plane* (A) *et sur une droite* (B) *et qui découpe sur ces deux lignes des segments proportionnels.*

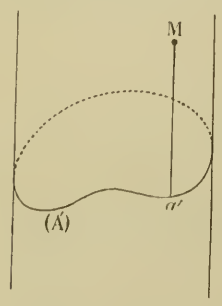
***

Si le cône S est de révolution, SO est l'axe du cône et est perpendiculaire au plan du cercle (γ).

Par suite, la droite (B) est perpendiculaire au plan (P). On sait que dans ce cas les courbes (C) sont des *hélices*.

Quand la droite (D) est oblique au plan (P) les courbes (C) pourraient donc, par analogie, recevoir la dénomination d'*hélices obliques*.

D'ailleurs, joignons a à la trace ω de la droite (B) et traçons Ma' parallèle à (B) ; comme $\frac{\omega a'}{\omega a} = \frac{1}{2}$, a' décrit une courbe (A') homothétique de (A) par rapport à ω ; donc, la courbe (C) lieu de M appartient au cylindre ayant pour directrice (A') et dont les génératrices sont parallèles à B. D'autre part, comme $\overline{a'M} = \frac{1}{2}\overline{\omega b}$ est une fonction linéaire du temps, de même que l'arc décrit par a', on est conduit à ce nouveau mode de description des courbes (C).



Soit un cylindre quelconque et une section plane (A'), *sur chaque génératrice* a'M *portons une longueur* a'M *proportionnelle à l'arc de la courbe* (A') ; *le point* M *décrit une hélice droite ou oblique suivant que la section* (A') *est droite ou oblique*

***

La recherche analytique des courbes (C) n'offre pas de difficulté, et nous exposerons deux méthodes.

I. Soit le cône

$$\text{(S)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Les cosinus directeurs de la génératrice du point (x, y, z) sont proportionnels à x, y et z.

Pour qu'une courbe, lieu du point (X, Y, Z), ait ses tangentes parallèles aux génératrices du cône (S), il faut donc que

$$\frac{dX}{x} = \frac{dY}{y} = \frac{dZ}{z},$$

donc, en vertu de l'équation (S), on aura

$$\frac{dX^2}{a^2} + \frac{dY^2}{b^2} - \frac{dZ^2}{c^2} = 0.$$

Posons $\frac{X}{a} = X'$, $\frac{Y}{b} = Y'$, et soit s' l'arc de la courbe lieu du point (X', Y', 0), il vient

$$dX'^2 + dY'^2 - \frac{dZ^2}{c^2} = 0$$

ou

$$ds'^2 - \frac{dZ^2}{c^2} = 0,$$

d'où nous tirons

$$Z = cs' + k.$$

En résumé, si

$$X' = f(s'), \qquad Y' = \varphi(s')$$

sont les équations d'une courbe quelconque du plan Oxy, s' étant son arc, les courbes (C) ont pour équations paramétriques

$$X = af(s'), \qquad Y = b\varphi(s'), \qquad Z = cs' + k.$$

Quand $a = b$, le cône (S) est de révolution et les courbes (C) sont des hélices.

II. On peut encore remarquer que les courbes (C) sont identiques aux courbes dont les plans osculateurs sont parallèles aux plans tangents au cône (S).

Soit donc un plan parallèle à un plan tangent au cône

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta - \frac{z}{c} = -\varphi(\theta),$$

$\varphi(\theta)$ étant une fonction quelconque donnée; ce plan enveloppe une développable dont l'arête de rebroussement est précisément une courbe (C).

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe (C) seront donc les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta - \frac{z}{c} &&= -\varphi(\theta),\\ -&\frac{x}{a}\sin\theta + \frac{y}{b}\cos\theta &&= -\varphi'(\theta),\\ -&\frac{x}{a}\cos\theta - \frac{y}{b}\sin\theta &&= -\varphi''(\theta).\end{aligned}\right.$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} x &= a[\varphi''\cos\theta + \varphi'\sin\theta],\\ y &= b[\varphi''\sin\theta - \varphi'\cos\theta],\\ z &= c[\varphi + \varphi''].\end{aligned}\right.$$

NOTE SUR LA STROPHOÏDE

par M. **Louis Sire**, à Lyon.

Dans un mémoire sur les cubiques nodales (*), M. Lemoyne a établi les propriétés suivantes :

Si par le point double O *d'une cubique nodale circulaire on mène deux couples de cordes en involution*, OM, OM', ..., *les cercles* OMM', ... *ont un second point commun.*

Si cette involution est formée de couples de droites OM, OM', ... *également inclinées sur une sécante quelconque issue du point double, les droites isotropes sont homologues dans l'involution; le cercle correspondant à ces droites touche la courbe aux points cycliques; le point d'intersection des tangentes en ces points, qui est le foyer singulier de la cubique, est par suite le centre de ce cercle.*

Appliquons ces considérations à la strophoïde. Soit l'involution des droites OM, OM', ... également inclinées sur les tangentes au point double O; ces tangentes au point double sont les rayons doubles de l'involution et les cercles correspondants sont les cercles osculateurs en O à la strophoïde. D'autre part les cercles OMM', ... ont leurs centres en ligne droite; de là ce théorème :

La droite joignant les centres de courbure d'une strophoïde en son point double passe par son foyer singulier.

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Places d'élèves-ingénieurs réservées aux conducteurs.)

Concours de 1908.

1756. — 1° *Former l'équation générale de troisième degré dont l'équation dérivée admette pour racines* 0 *et* 1.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1904).

2° *L'équation demandée peut se mettre sous la forme*

(1) $$2x^3 - 3x^2 + a = 0,$$

a désignant une constante arbitraire. Indiquer, au moyen du théorème de Rolle, comment varie avec a le nombre des racines réelles de l'équation (1).

3° *Quelles sont les racines de l'équation* (1) *lorsque a prend les valeurs au passage desquelles le nombre des racines réelles de cette équation se modifie?*

4° *Si l'on fait* $a = 0{,}7$, *on reconnaît que l'équation* (1) *a une racine comprise entre* 0,6 *et* 0,7. *Calculer cette racine à* 0,001 *près par la méthode de Newton appliquée une seule fois en partant de ces deux nombres* 0,6 *et* 0,7.

1. Le premier membre de l'équation dérivée étant $x(x-1)$, ou $x^2 - x$, à un facteur constant près, celui de l'équation proposée sera $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \lambda$ ou, en multipliant par 6, $2x^3 - 3x^2 + a$, a désignant une constante.

2. Considérons l'équation $$f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + a = 0,$$
et appliquons-lui le théorème de Rolle. Les racines de la dérivée étant 0 et 1, nous avons les signes de substitution suivants

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	a	$a-1$	$+$

Si $a < 0$, l'équation admet une seule racine réelle supérieure à 1.

Si $0 < a < 1$, l'équation admet trois racines réelles.

Si $a > 1$, l'équation admet une seule racine réelle négative.

3. Pour $a = 0$, l'équation admet la racine double 0 et la racine simple $\frac{3}{2}$.

Pour $a = 1$, l'équation admet la racine double 1 ; et le premier membre s'écrit
$$2x^3 - 3x^2 + 1 \equiv (x-1)^2(2x+1),$$
donc elle admet en outre la racine simple $-\frac{1}{2}$.

4. Posons maintenant $$f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + 0{,}7.$$
Nous avons $$f(0{,}6) = +0{,}052, \qquad f(0{,}7) = -0{,}084.$$

Donc l'équation admet une racine comprise entre 0,6 et 0,7. Comme la fonction $f''(x) = 6(2x-1)$ est positive quand x est compris entre 0,6 et 0,7, nous appliquerons la méthode de Newton à la limite 0,6, et nous prendrons pour nouvelle valeur approchée
$$0{,}6 - \frac{f(0{,}6)}{f'(0{,}6)}.$$

Or, nous avons $f'(x) = 6(x^2 - x)$, $f'(0{,}6) = -1{,}44$; donc
$$-\frac{f(0{,}6)}{f'(0{,}6)} = \frac{0{,}052}{1{,}44} = 0{,}0361\ldots$$

Nous obtenons ainsi la valeur approchée par défaut 0,6361. Si on substitue 0,637, on obtient
$$f(0{,}637) = -0{,}000357294\,;$$
on en conclut que la racine est inférieure à 0,637. Elle est donc comprise entre 0,636 et 0,637 ; sa valeur à $\frac{1}{1\,000}$ près est 0,636.

André COURTOIS, lycée de Douai.

Bonnes solutions par MM. Jean Bing ; R. Bouvaist ; Fourcy ; M. Jacquemetton, lycée de Douai ; C. Jacquet ; G. Lach ; M. Mazet, à Sétif ; Henry Niox-Chateau ; Naboulet, à Libourne ; Rebouillat, à Villersexel ; E. Rême, à Alger ; A. Rousseau, à Landrecies ; P. Salleron, à Albi ; Jean Soudet, à Versailles ; H. Janois.

1757. — *Calculer l'expression de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de* $y = \cos^2 x$.

Soit $y = \cos^2 x$; on peut écrire

$$y = \frac{\cos 2x + 1}{2},$$

$$y' = -\sin 2x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -2^2\sin\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right) = 2^2\cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right), \quad \ldots$$

On est conduit à penser que l'on a

$$(1) \qquad y^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

La loi est vraie pour $n = 1, 2, 3$. Supposons-la vraie pour $y^{(n)}$ et démontrons qu'elle subsiste pour $y^{(n+1)}$.

En différentiant la relation (1), on a

$$y^{(n+1)} = -2^n\sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) = 2^n\cos\left[2x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

ce qui démontre la proposition.

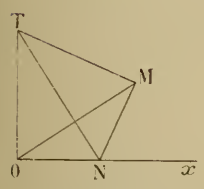
On a donc $$y^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Si $n = 4k$, $y^{(n)} = 2^{n-1}\cos 2x$; pour $n = 4k+1$, $y^{(n)} = -2^{n-1}\sin 2x$; pour $n = 4k+2$, $y^{(n)} = -2^{n-1}\cos 2x$; pour $n = 4k+3$, $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin 2x$.

NABOULET, à Libourne.

Bonnes solutions par MM. Bing; Bouvaist; Darmon; Jacquet; Lach; Manen; Rousseau; Salleron; Soudet; L. Sire.

1758. — *Trouver par l'analyse la courbe plane telle que si l'on considère le quadrilatère* MTON *ayant pour côtés la tangente* MT, *la normale* MN, *l'axe polaire* ONx *et la perpendiculaire* OT *à cet axe, les diagonales de ce quadrilatère soient perpendiculaires l'une sur l'autre.*



La tangente au point M (x, y) a pour équation

$$Y - y = y'(X - x);$$

elle rencontre Oy au point T qui a pour ordonnée $y - xy'$.

De même, la normale au même point, ayant pour équation

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

rencontre Ox au point N qui a pour abscisse $x + yy'$.

Le coefficient angulaire de la droite NT est donc $\dfrac{xy' - y}{x + yy'}$; celui de OM est $\dfrac{y}{x}$. On doit donc avoir

$$\frac{(xy' - y)y}{(x + yy')x} = -1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

On en tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

C'est une équation homogène. Posons $y = tx$, $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$; l'équation devient

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{x} = -\frac{2tdt}{t^2+1}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$Lx = -L(t^2+1) + LC,$$

ou

$$x(t^2+1) = C;$$

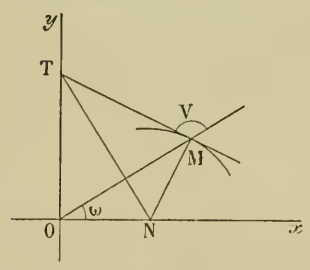
et, en remplaçant t par $\frac{y}{x}$,

$$x^2 + y^2 - Cx = 0.$$

Les courbes intégrales sont des cercles tangents à l'origine à Oy.

NÉVEJANS, lycée de Douai.

Deuxième solution. — Les points O et M sont situés sur le cercle qui a pour diamètre TN, et comme OM est perpendiculaire à TN, les points O et M sont symétriques par rapport à TN. On a donc $ON = NM$, $OT = TM$, et $\omega = V - \frac{\pi}{2}$.



On en déduit

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{\operatorname{tg} V} = -\frac{\rho'}{\rho},$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\operatorname{tg}\omega\, d\omega.$$

En intégrant, on obtient

$$L\rho = L\cos\omega + LC,$$

ou

$$\rho = C\cos\omega,$$

équation qui représente tous les cercles tangents à Oy au point O.

Henry MOX-CHATEAU, lycée de Limoges.

Bonnes solutions par MM. Jean Bing, à Paris; Bouligand, à Nantes; R. B. : G. Coulange, école des Anglais; André Courtois, à Douai; Darmon; Foucry, à Reims : C. Jacquet; Gaston Labadie, a Toulouse : G. Lacu, à Denain; R. Manen, à Albi : Naboulet, à Libourne; Rebouillat, à Villersexel; Edmond Rème, à Alger; A. Rousseau, à Lanlrecies; Salleron, à Albi : Jean Soudet, à Versailles; Joseph Vérots, école des Anglais, à Lyon; L. Montaut; L. Sire.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1741. — *Une ellipse* E *a son centre en un point donné* O *et est tangente à un plan donné* P, *la distance du point* O *au plan* P *étant égale à la moitié* OB *du petit axe* BB'. *On la fait rouler sans glisser sur le plan* P, *le centre restant en* O. *Quel est le lieu du point de contact de l'ellipse avec le plan ?*

L'ellipse étant dans sa position initiale, on considère les ellipsoïdes, en nombre simplement infini, qui ont deux sommets opposés en B *et* B', *qui passent par l'ellipse* E *et qui sont tangents au plan* P. *Les ellipsoïdes se raccordent le long de l'ellipse* E; *si on les suppose entraînés par cette ellipse, ils roulent sur le plan* P.

Conformément à une note qui a paru dans la *Revue*, nous entendrons l'énoncé comme il suit : En disant que la courbe roule sur le plan P, on veut dire qu'elle reste tangente à la trajectoire du point de contact, qu'elle roule sur cette trajectoire ; il n'y a pas dérapage. Le fait que la courbe roule *sans glisser* est alors une propriété de la figure dont il faut établir l'exactitude.

1° Prenons comme position initiale de l'ellipse celle pour laquelle le point de contact avec le plan P

est un sommet A situé sur le grand axe. Désignons par r et θ les coordonnées polaires d'un point du plan de l'ellipse, par V l'angle du rayon vecteur avec la tangente à une courbe décrite par ce point, O étant le pôle, OA étant l'axe polaire ; désignons de même par r_1 et θ_1 les coordonnées polaires d'un point du plan P, par V_1 l'angle du rayon vecteur avec la tangente à une courbe décrite par ce point, le pôle étant le pied O_1 de la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan P, O_1A étant l'axe polaire.

Soient M un point de la courbe Γ tracée dans le plan P sur laquelle roule l'ellipse E, MT la tangente en ce point. La condition de contact s'obtient en écrivant que les projections sur MT des rayons vecteurs OM et O_1M sont égales, ce qui donne

$$r \cos V = r_1 \cos V_1.$$

Soient s l'arc décrit par le point M sur l'ellipse E, s_1 l'arc décrit par le point M sur la courbe Γ. On a

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \qquad \cos V_1 = \frac{dr_1}{ds_1}.$$

La condition de contact devient

$$\frac{rdr}{ds} = \frac{r_1 dr_1}{ds_1}.$$

Mais on a constamment

$$r^2 = r_1^2 + b^2$$

et par suite

$$rdr = r_1 dr_1.$$

La condition de contact s'écrit alors

$$ds = ds_1,$$

ce qui exprime que le roulement a lieu sans glissement.

Introduisons l'anomalie excentrique φ du point M de l'ellipse. Si x et y sont les coordonnées de M dans le système rectiligne adjoint au système polaire, dans le plan de l'ellipse, on a

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi,$$

et par suite

$$r_1^2 = r^2 - b^2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) - b^2 = c^2 \cos^2 \varphi,$$

d'où

$$(1) \qquad r_1 = c \cos \varphi.$$

On a en outre

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2.$$

La condition de contact s'écrit alors

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\theta_1^2,$$

c'est-à-dire, puisque $dr_1 = -c \sin \varphi d\varphi$,

$$(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2 = c^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2 + c^2 \cos^2 \varphi d\theta_1^2,$$

c'est-à-dire encore

$$b^2 d\varphi^2 = c^2 \cos^2 \varphi d\theta_1^2,$$

d'où, avec une orientation convenable du plan P,

$$d\theta_1 = \frac{b}{c} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi,$$

et, par suite, en intégrant et remarquant que θ_1 est nul quand φ est nul,

$$(2) \qquad \theta_1 = \frac{b}{c} \mathrm{L}\, \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Les équations paramétriques (1) et (2) déterminent la courbe Γ. Pour avoir l'équation polaire de cette courbe, tirons $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ de l'équation (2),

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = e^{\frac{c\theta_1}{b}},$$

et portons dans l'équation (1) mise sous la forme

$$r_1 = c \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{2c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)};$$

nous obtenons

$$r_1 = \frac{2ce^{\frac{c\theta_1}{b}}}{1 + e^{\frac{2c\theta_1}{b}}} = \frac{2c}{e^{\frac{c\theta_1}{b}} + e^{-\frac{c\theta_1}{b}}} = \frac{c}{\operatorname{ch}\frac{c\theta_1}{b}}.$$

La courbe est symétrique par rapport à OA et la moitié de la courbe obtenue en faisant varier θ_1 de 0 à $+\infty$ est formée d'une spirale partant du point A, s'enroulant dans le sens positif autour du point O_1 qu'elle admet comme point asymptote.

Remarquons que la longueur de l'arc infini qui constitue cette moitié de la courbe Γ est égale au quart de la longueur de l'ellipse.

2. Un ellipsoïde S qui a deux sommets opposés en B et B′, qui passe par l'ellipse E et qui est tangent au plan P admet le plan OO_1A comme plan principal, et par rapport à l'ellipse d'intersection de S par le plan OO_1A le diamètre A′OA admet un diamètre C′OC conjugué, qui est parallèle au plan P. En faisant varier la longueur C′C, on obtient tous les ellipsoïdes S.

Si l'on considère le cylindre circonscrit à un ellipsoïde S parallèlement à O_1A, la courbe de contact, qui est plane, passe par les points B, B′ et A ; c'est donc l'ellipse E. Les ellipsoïdes S se raccordent le long de cette ellipse. D'autre part, la section droite de ce cylindre par le plan BO_1B' est une ellipse qui admet pour demi-axes OB et OO_1 ; mais par hypothèse, $OO_1 = OB$; la section droite du cylindre est un cercle et le cylindre est de révolution. Par suite, la distance de O au plan tangent à l'ellipsoïde S en un point quelconque de l'ellipse E est constante et égale à b.

Cela posé, supposons que l'ellipse E roule sur le plan P à partir de la position initiale choisie. Si M est le point de contact de l'ellipse E avec le plan P, le plan tangent en M à l'ellipsoïde S est tel que la distance du point O à ce plan soit égale à la distance du point O au plan P. Il ne peut donc que coïncider avec le plan P ou avec le symétrique du plan P par rapport au plan passant par O et par la tangente en M à la courbe Γ. Mais pour la position initiale A du point M, le plan tangent à l'ellipsoïde coïncide avec le plan P. Dans le mouvement continu de l'ellipse, le plan tangent en M à l'ellipsoïde ne cesse pas de coïncider avec le plan P. L'ellipsoïde S roule bien sur le plan P.

Bonnes solutions : MM. J. D. Dufaut, à Poitiers ; Amblard.

1748. — 1° *Construire la courbe* (S), $\rho = \frac{a}{\operatorname{th}\omega}$, *et déterminer en particulier la position de cette courbe par rapport à son asymptote.*

2° *On mène la symétrique de* MO *par rapport à la tangente en* M *à* (S) ; *cette droite rencontre la perpendiculaire à* OM *au point* O *en un point* P. *Trouver le lieu de ce point.*

3° *On fait tourner* (S) *autour de* O. *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes ainsi obtenues. Construire une de ces courbes* (T).

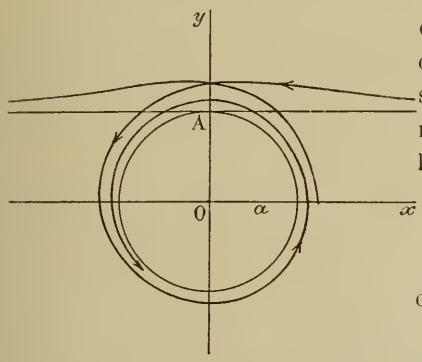
4° *On considère le cercle* (Γ) *de centre* O *et de rayon* a. *Trouver le lieu des centres des cercles* (C) *orthogonaux à* (Γ) *et tels que le diamètre passant par* O *ait une extrémité sur la courbe* (T) *précedemment construite.*

Donner une construction géométrique des points de contact du cercle (C) *avec son enveloppe.*

1° Pour construire la courbe

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{th}\omega},$$

il faut évidemment faire varier ω de $-\infty$ à $+\infty$. Mais le changement de ω en $-\omega$ change ρ en $-\rho$; par conséquent, la courbe se compose de deux parties symétriques par rapport à Oy : l'une, obtenue en faisant varier ω de 0 à $+\infty$; et l'autre, qui correspond aux valeurs négatives de ω. Il suffit de construire la première, et nous nous bornerons à faire varier ω de 0 à $+\infty$.



Pour $\omega = +\varepsilon$, ρ est égal à $+\infty$; quand ω croît, $\operatorname{th}\omega$ croît et ρ décroît ; pour les grandes valeurs de ω, $\operatorname{th}\omega$ est voisin de 1, ρ est supérieur à a et tend vers a ; par conséquent, la courbe se compose d'une infinité de spires dont les rayons vecteurs sont rapidement voisins de a et diminuent lentement en tendant vers a ; la courbe est asymptote au cercle $\rho = a$.

Nous aurons l'asymptote, en cherchant la limite de la fonction

$$\delta = \rho \sin\omega = a \operatorname{ch}\omega . \frac{\sin\omega}{\operatorname{sh}\omega},$$

quand ω tend vers 0.

Or les deux infiniment petits $\sin\omega$ et $\operatorname{sh}\omega$ sont tous deux équivalents à ω ; donc la fonction δ a pour limite $d = a$. Nous aurons donc l'asymptote en portant sur Oy une longueur égale à a et en menant par le point A, ainsi obtenu, une parallèle à Ox ; c'est la tangente au cercle $\rho = a$, au point le plus haut.

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\delta - d$, pour les valeurs positives et infiniment petites de ω. Mais

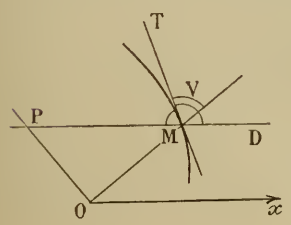
$$\delta - d = a \operatorname{ch}\omega \frac{\sin\omega}{\operatorname{sh}\omega} - a,$$

et, comme $\operatorname{sh}\omega$ est positif ainsi que a, il suffira de reconnaître le signe de $u = \operatorname{ch}\omega \sin\omega - \operatorname{sh}\omega$; pour y parvenir aisément, nous développerons cette expression en série, et nous aurons

$$u = \left(1 + \frac{\omega^2}{2} + \cdots\right)\left(\omega - \frac{\omega^3}{6} + \cdots\right) - \left(\omega + \frac{\omega^3}{6} + \cdots\right);$$

la fonction u a pour partie principale $\frac{\omega^3}{6}$; cette quantité est positive, donc δ est plus grand que d et la courbe est, par rapport à l'asymptote, du côté des y positifs.

2° Soit (D) la symétrique de MO par rapport à la tangente MT au point M. Cette droite sera déterminée entièrement par l'angle V_1 qu'elle forme avec le rayon vecteur. Or, il est visible sur la figure que cet angle est égal à 2V, en appelant V l'angle de la tangente avec le rayon vecteur ; d'autre part, le ρ du point P où cette droite rencontre l'axe $\omega + \frac{\pi}{2}$ est égal à $-\rho \operatorname{tg} V_1$, c'est-à-dire à $-\rho \operatorname{tg} 2V$, ou enfin à $\frac{-2\rho \operatorname{tg} V}{1 - \operatorname{tg}^2 V}$. Nous savons d'ailleurs que



$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = -\operatorname{sh}\omega \operatorname{ch}\omega ;$$

par conséquent, en remplaçant encore dans l'expression précédente le ρ de la courbe (S) par $\frac{a}{\operatorname{th}\omega}$, nous aurons l'équation

$$\rho = \frac{2a \operatorname{ch}^2\omega}{1 - \operatorname{sh}^2\omega \operatorname{ch}^2\omega},$$

dans laquelle ρ désigne le rayon vecteur du point P et ω l'angle polaire du point M ; nous obtiendrons donc l'équation en coordonnées polaires du lieu de P en y remplaçant ω par $\omega - \frac{\pi}{2}$, et nous avons ainsi définitivement

$$\rho = \frac{2a \operatorname{ch}^2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \operatorname{sh}^2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ch}^2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}$$

3° Supposons la courbe (S) invariablement liée à l'axe polaire Ox, et faisons tourner le système d'un angle quelconque α autour du point O ; l'axe polaire vient occuper la position Ox_1 et la nouvelle équation de la courbe (S) est $\rho_1 = \frac{a}{\operatorname{th} \omega_1}$; mais les coordonnées dans l'ancien système sont reliées aux précédentes par les formules

$$\rho = \rho_1, \qquad \omega = \alpha + \omega_1.$$

L'équation de la courbe (S) après la rotation α est donc

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{th}(\omega - \alpha)}.$$

Les nouvelles courbes forment un faisceau, un système à un paramètre.

Pour obtenir leurs trajectoires orthogonales, il suffit d'exprimer qu'en un point commun à la courbe (S) et à l'une des trajectoires (T), l'angle V_1 de la seconde courbe est égal à $V + \frac{\pi}{2}$; on a donc : $\operatorname{tg} V_1 = -\operatorname{cotg} V$, c'est-à-dire $\frac{\rho_1}{\rho_1'} = -\frac{\rho'}{\rho}$, et, par suite, $\rho_1' = -\frac{\rho^2}{\rho'}$, puisque $\rho_1 = \rho$.

La dérivée de la fonction ρ_1 qui définit la courbe (T) est donc fournie, en fonction de ω, par l'équation

$$\rho_1' = -\frac{\rho^2}{\rho'} = a \operatorname{ch}^2(\omega - \alpha).$$

Il n'y a plus qu'à supprimer l'indice de la fonction ρ et à éliminer $\omega - \alpha$ entre cette équation et l'équation $\rho = \frac{a}{\operatorname{th}(\omega - \alpha)}$, pour obtenir l'équation différentielle des trajectoires orthogonales.

Nous avons successivement

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\operatorname{ch}(\omega - \alpha)}{\operatorname{sh}(\omega - \alpha)}, \quad \text{puis} \quad \frac{\operatorname{ch}(\omega - \alpha)}{\rho} = \frac{\operatorname{sh}(\omega - \alpha)}{a} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}, \quad \text{et enfin} \quad \rho' = a\,\frac{\rho^2}{\rho^2 - a^2}.$$

Dans cette équation différentielle, les variables se séparent immédiatement :

$$\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2}\, d\rho = a\, d\omega.$$

L'intégration est alors facile et nous fournit le système de courbes

$$\rho + \frac{a^2}{\rho} = a(\omega - \omega_0).$$

Toutes ces courbes sont égales ; elles dérivent de l'une d'elles par une rotation arbitraire ω_0 autour du point O. Nous construirons celle qui correspond à $\omega_0 = 0$, c'est-à-dire celle qui a pour équation $\rho + \frac{a^2}{\rho} = a\omega$.

La construction de cette courbe est facilitée par les remarques suivantes : sur chaque axe ω qui passe au pôle, il y a deux points M′ et M″ de la courbe, dont les ρ sont racines de l'équation du second degré précédente et vérifient les relations

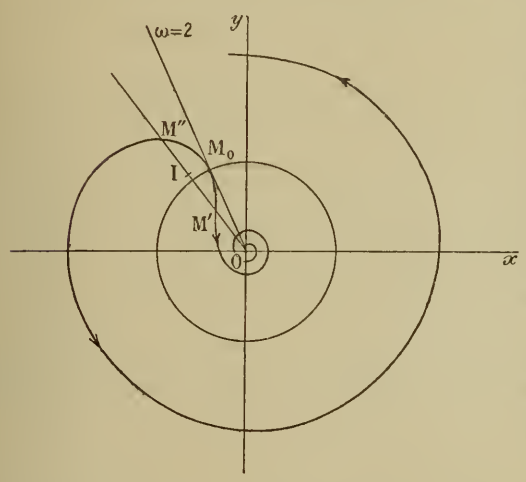
$$\rho'\rho'' = a^2, \qquad \frac{\rho' + \rho''}{2} = \frac{a\omega}{2}.$$

La première montre que la courbe est anallagmatique par rapport au point O, que les deux points M′ et M″ sont toujours conjugués harmoniques par rapport aux points de rencontre de l'axe ω avec le cercle $\rho = a$.

La deuxième montre que le lieu des milieux des cordes M′M″ est la spirale d'Archimède $\rho = \frac{a\omega}{2}$.

Au surplus, nous voyons que le changement de ω en $-\omega$ change ρ en $-\rho$, ce qui montre que la courbe est symétrique par rapport à Oy, et qu'il suffit, comme au début, de faire varier ω de 0 à $+\infty$. Mais l'équation du second degré en ρ n'a ses racines réelles que si $\omega^2 - 4 > 0$; par conséquent ρ n'existe qu'à partir de la valeur $\omega = 2$, et à ce moment,

$$\rho' = \rho'' = a,$$



les deux points M′ et M″ sont confondus sur le rayon vecteur $\omega = 2$, au point de rencontre avec le cercle; la courbe, au départ, est donc tangente à ce rayon vecteur. Ensuite, le point M′, fourni par l'équation

$$\rho' = \frac{a\omega - a\sqrt{\omega^2 - 4}}{2},$$

pénètre à l'intérieur du cercle; le point M″, qui correspond à l'équation

$$\rho'' = \frac{a\omega + a\sqrt{\omega^2 - 4}}{2},$$

passe à l'extérieur, et le milieu I de ces deux points décrit la spirale d'Archimède $\rho = \frac{a\omega}{2}$; le point I s'éloigne donc du pôle, et le point M′ s'en rapproche continuellement et indéfiniment, pendant que le point M″ s'éloigne de plus en plus et jusqu'à l'infini; alors le point M′ décrit une infinité de spires de plus en plus petites et asymptotiques au point O, et le point M″ une infinité de spires dont l'éloignement grandit sans cesse, jusqu'à l'infini.

4° Envisageons maintenant le cercle (C) décrit sur M′M″ comme diamètre; ce cercle est orthogonal au cercle (Γ) ($\rho = a$); c'est donc le cercle variable indiqué dans la quatrième partie; par conséquent le lieu de son centre est le lieu du point I, c'est la spirale $\rho = \frac{a\omega}{2}$.

Soient I et I′ deux points infiniment voisins de cette spirale. Les cercles (C) et (C′) correspondants ont même puissance a^2 par rapport au point O, leur sécante commune passe en ce point et est perpendiculaire à la tangente II′ à la spirale au point I. De là découle sans peine la construction géométrique des points caractéristiques du cercle (C).

On trouverait d'ailleurs sans aucune difficulté l'équation de leur lieu, c'est-à-dire l'enveloppe des cercles (C), et cette courbe est aussi anallagmatique par rapport au point O, avec une puissance d'inversion égale à a^2.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1909)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

7075. — Une courbe en coordonnées polaires est définie par les relations $\rho = f(s)$, $\omega = \varphi(s)$, s désignant l'abscisse curviligne du point correspondant de la courbe. Montrer qu'il existe une relation entre $f(s)$ et $\varphi(s)$. On mène la tangente MT dans le sens positif des arcs; déterminer le cosinus et le sinus de l'angle que fait la demi-droite définie par l'angle polaire ω avec la demi-droite MT.

7076. — Déterminer les points de contact des tangentes issues de l'origine à la chainette $y = \operatorname{ch} x$.

7077. — Rectifier la courbe $y^2 = \frac{2}{3}x^3$. Développante.

7078. — D'un point M d'une parabole de sommet O on abaisse MP perpendiculaire sur la tangente au sommet. Calculer l'aire OMP.

7079. — Trouver les trajectoires orthogonales des courbes $(x^2 + y^2)^2 - \lambda(x^2 - y^2) = 0$.

7080. — Construire la courbe $x = a \cos 3t$, $y = a \cos 2t$ et déterminer l'aire de la boucle.

7081. — Trouver une courbe telle que son rayon de courbure soit coupé en son milieu par une droite fixe.

7082. — On considère une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. D'un point M de la courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, et on joint le point P au point A où la tangente en M rencontre Oy. Déterminer la courbe de telle manière que PA soit perpendiculaire à OM.

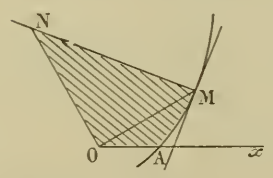
7083. — Trouver les courbes dans lesquelles la sous-tangente est : 1° constante ; 2° proportionnelle à l'abscisse.

7084. — Trouver une courbe telle que la bissectrice de l'angle que fait la tangente avec Ox rencontre Oy en un point fixe.

7085. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy. D'un point M d'une courbe C on abaisse MP perpendiculaire sur Ox et du point P on abaisse PT perpendiculaire sur la tangente au point M. Déterminer la courbe de façon que le point T décrive une développante de la courbe C.

7086. — La normale et la tangente en un point M d'une courbe rencontrent les axes Oy et Ox aux points N et T. Déterminer la courbe de façon que l'on ait ou bien $\overline{ON}.\overline{OT} = a^2$, ou bien $\overline{OM}^2 = k.\overline{ON}.\overline{OT}$.

7087. — Trouver une courbe telle que le rayon vecteur mené de l'origine soit moyenne proportionnelle entre l'ordonnée y et la portion de l'axe des x comprise entre la normale et la tangente.



7088. — On considère une courbe rencontrant Ox au point A. En un point quelconque M de cette courbe on mène la normale qui rencontre en N la perpendiculaire à OM menée par le point O. Déterminer la courbe de façon que l'aire OAMN soit proportionnelle à l'angle AOM.

7089. — Trouver une courbe telle que la tangente et la normale divisent harmoniquement un segment fixe.

7090. — Du point O on abaisse OP perpendiculaire sur la normale à une courbe. Déterminer la courbe de façon que $OP \cos^3 POx$ soit constant, Ox étant une droite fixe passant par le point O.

7091. — Trouver une courbe telle que le centre de courbure en un point M se projette sur Oy au point de rencontre de cet axe et de la tangente en M.

7092. — Trouver une courbe telle que la projection sur Ox du centre de courbure en un point M se trouve sur la tangente en ce point.

7093. — Trouver une courbe telle que l'on ait $\frac{\overline{ON}}{\overline{OT}} = k$, N et T étant les points de rencontre de la normale et de la tangente en un point quelconque avec Ox, et k une constante.

7094. — Etant donné un cercle, déterminer une courbe telle que le centre de courbure en un point M soit situé sur la polaire du point M par rapport au cercle.

7095. — Trouver une courbe telle que la normale limitée à Ox soit proportionnelle à la distance du point O à la tangente.

7096. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure en chaque point soit proportionnel à la distance de l'origine à la tangente. On considérera la courbe comme enveloppe de la droite $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, p étant une fonction inconnue de α.

7097. — Trouver une courbe telle qu'un point quelconque de la courbe et le centre de courbure en ce point soient conjugués par rapport à un cercle donné. La courbe obtenue est-elle unicursale ?

7098. — Trouver une courbe telle que la tangente et la normale en chaque point rencontrent Ox en deux points symétriques par rapport au point O.

7099. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox aux points T et N. Déterminer la courbe de façon que le centre de gravité du triangle MNT se déplace sur une droite donnée.

7100. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure en un point quelconque soit inversement proportionnel à l'ordonnée de ce point.

7101. — Trouver une courbe telle que l'on ait en chaque point M $\frac{OM}{MN} = k$, MN désignant la longueur de la normale limitée à Ox.

7102. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T et Oy au point T'. Déterminer la courbe de façon que l'on ait $\frac{\overline{TM}}{\overline{T'M}} = k$. Examiner ce qui se passe si on change k en $-k$.

7103. — Lieu des points de contact des tangentes menées par un point aux coniques $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}$, quand p varie.

7104. — On considère l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ qui représente une ellipse réelle. Condition pour que le point (x_0, y_0) soit à l'intérieur de cette ellipse.

7105. — Trouver l'enveloppe d'une corde d'une conique dont la projection orthogonale sur son diamètre conjugué est constante.

7106. — Par un point M d'une parabole on mène deux droites symétriques par rapport à la normale en ce point. Elles coupent la parabole en deux points P et Q. Trouver l'enveloppe de la droite PQ.

7107. — Soient OM et OM′ deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ; trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMM′.

7108. — Trouver le rapport anharmonique des quatre sommets d'une ellipse.

7109. — Déterminer le centre de l'hyperbole définie par les équations paramétriques $x = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$, $y = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$.

7110. — Equation générale des coniques homofocales d'une conique donnée.

7111. — Lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole $y^2 - 2px = 0$ deux normales également inclinées sur la bissectrice des axes de coordonnées.

7112. — Trouver l'axe, le sommet et le paramètre de la parabole $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 3x = 0$.

7113. — Trouver les axes de la conique $2(3x + 4y)^2 + 3(4x - 3y)^2 - 12 = 0$.

7114. — Trouver les foyers de la courbe $(x - a)(y - b) = k$.

7115. — Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à une ellipse qui tourne autour de son foyer.

7116. — Enveloppe des cordes d'une parabole qui sont vues du sommet sous un angle de 45°.

7117. — Trouver l'enveloppe d'une droite qui rencontre les côtés d'un triangle en trois points tels que l'un d'eux soit le milieu des deux autres.

7118. — Former l'équation réduite de la conique $x^2 - 2xy - y^2 + x + y = 0$.

7119. — D'un point P on mène les tangentes PA et PB à la parabole $y^2 - 2px = 0$. Les normales en A et B se coupent en un point Q. Calculer les coordonnées du point Q en fonction de celles du point P.

7120. — Déterminer les coordonnées des points du plan d'une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ tels que les tangentes issues de ces points à l'ellipse aient pour coefficients angulaires m' et m''. En déduire les foyers.

7121. — Trouver l'enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'une parabole perpendiculaires à l'axe.

7122. — Lieu des pieds des normales issues d'un point aux coniques du faisceau $x^2 - y^2 - 2\lambda xy - a^2 = 0$.

7123. — D'un point M d'une parabole on abaisse MP perpendiculaire sur l'axe et MQ perpendiculaire sur la tangente au sommet. Trouver l'enveloppe de PQ ; déterminer le point limite.

7124. — On considère un cercle variable bitangent à une ellipse, la corde des contacts étant parallèle au petit axe. Trouver le lieu des extrémités du diamètre parallèle au petit axe.

7125. — Trouver géométriquement le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse.

7126. — Construire la courbe $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$. Former l'équation générale des coniques asymptotes à Oy et rencontrant Ox aux points qui ont pour abscisses $+1$ et -1. Chaque conique rencontre la courbe donnée en deux points A et B. Montrer que AB est parallèle à une direction fixe.

7127. — Trouver l'enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe et ayant son centre sur une ellipse donnée.

7128. — Soit D la polaire d'un point P par rapport à une conique. Par le point P on mène une sécante quelconque PMM′, et par les points M et M′ on abaisse MH et M′H′ perpendiculaires sur D. Trouver une relation entre MH et M′H′.

7129. — On donne une parabole, la tangente au sommet et deux tangentes fixes. Une tangente variable rencontre ces droites aux points a, b, c. Démontrer que le rapport $\frac{ab}{ac}$ est constant.

7130. — Enveloppe du côté d'un angle droit dont l'autre côté est tangent à un cercle et dont le sommet décrit une droite.

7131. — Lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à une conique.

7132. — Foyer de la conique $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2y = 0$.

7133. — Montrer que les courbes intégrales de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 + y^2}{1 + x^2}}$ sont des coniques. Trouver leurs axes et leur enveloppe.

7134. — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$ et un point M (x_0, y_0) de cette courbe ; former l'équation de l'hyperbole équilatère qui rencontre la parabole en quatre points confondus au point M.

7135. — On considère une hyperbole équilatère et un point M de cette courbe. Combien y a-t-il de paraboles rencontrant l'hyperbole en quatre points confondus au point M ? Expliquer le résultat et déterminer le foyer de la parabole trouvée.

7136. — Trouver le rapport anharmonique des quatre points d'une ellipse qui se projettent sur le grand axe aux foyers.

7137. — Etant donnée la parabole $y^2 - 2px = 0$, trouver l'équation de la normale dont le coefficient angulaire est égal à m. Lieu du point tel que parmi les trois normales qu'on peut mener de ce point à la parabole, il y en ait deux rectangulaires.

7138. — On donne une conique, deux points A et B sur cette conique ; on mène les tangentes en ces points qui se coupent au point M. On joint un point P de la conique aux points A et B, et par le point M on mène une sécante qui rencontre PA et PB aux points C et D. Démontrer que les points C et D sont conjugués par rapport à la conique.

7139. — Soient AB et CD deux cordes d'un cercle de centre O faisant l'angle θ, et soit ω le centre de l'hyperbole équilatère passant par les quatre points A, B, C, D. On abaisse ωP perpendiculaire sur AB et OQ perpendiculaire sur CD. Montrer que $\frac{\omega P}{OQ} = \cos\theta$.

7140. — La tangente en un point M d'une parabole rencontre l'axe en un point T. Lieu du point P symétrique de T par rapport au point M.

7141. — Trouver l'enveloppe d'une droite formant avec deux droites fixes un triangle d'aire constante.

7142. — Soient A et A' les sommets du grand axe d'une ellipse et C un point quelconque de l'ellipse. Trouver sur l'ellipse un point C' tel que le rapport anharmonique (AA'CC') soit égal à -1, et un point D tel que $(ACA'D) = -1$.

7143. — On donne une ellipse et un point A. Déterminer un triangle ABC, rectangle en A, qui soit conjugué par rapport à l'ellipse.

7144. — Etant donnée la conique $y^2 = 2px + qx^2$, déterminer le centre de courbure à l'origine et aux autres sommets.

7145. — Trouver l'équation de l'ensemble des asymptotes de la conique $x^2 + 2xy - y^2 + 8x - 1 = 0$.

7146. — Démontrer que les équations $x = 1 + 2t + 3t^2$, $y = 3 + 2t + t^2$ représentent une parabole. Coordonnées du sommet et du foyer.

7147. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux tangentes faisant un angle donné. Solutions analytique et géométrique.

7148. — Soit MM' un diamètre variable d'une ellipse. Lieu du point de rencontre de la tangente en M et de la normale en M'.

7149. — D'un point P on peut mener trois normales PA, PB, PC à une parabole. Construire la résultante de ces trois vecteurs.

7150. — Etudier la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, les axes de coordonnées faisant l'angle $\frac{\pi}{3}$.

7151. — On considère une hyperbole ayant pour axes Ox et Oy. Une tangente quelconque rencontre Ox au point A et Oy au point B. Lieu du quatrième sommet du rectangle construit sur OA et OB.

7152. — On donne deux droites fixes OL et OM et un point P. Par ce point on mène une sécante variable rencontrant les droites aux points A et B. Lieu du point de concours des hauteurs du triangle OAB.

7153. — On donne une droite D et deux droites Δ et Δ' perpendiculaires à D. On considère un cercle C tangent à D et Δ, et un cercle C' tangent à D et Δ', ces deux cercles étant tangents. On demande l'enveloppe de la tangente commune au point de contact. La courbe trouvée est-elle unicursale ? Trouver sa polaire réciproque par rapport à un cercle.

7154. — Trouver l'enveloppe d'une droite telle que la somme des carrés des distances des quatre sommets d'un rectangle à cette droite soit constante.

7155. — La tangente et la normale en un point M d'une ellipse rencontrent le petit axe aux points T et N. Former l'équation du cercle circonscrit au triangle MNT.

7156. — Trouver l'aire comprise entre les deux paraboles $y^2 - 2px = 0$, $x^2 - 2py = 0$.

7157. — Lieu d'un point tel que sa polaire par rapport à une ellipse soit à une distance constante d'un point fixe du grand axe.

7158. — On donne une conique et deux tangentes fixes dont les points de contact sont A et B. Une tangente variable rencontre les tangentes fixes en α et β. Lieu du point de rencontre de $A\beta$ et $B\alpha$.

7159. — On donne le grand axe d'une ellipse en grandeur et en position et une tangente. Construire les foyers de l'ellipse et le point de contact de la tangente.

7160. — On donne deux ellipses ayant mêmes axes ; trouver le lieu des points d'où l'on voit ces ellipses sous un même angle.

7161. — Etudier la nature de la conique $y^2 = 2px + qx^2$. Dans le cas où cette conique est une ellipse, reconnaître si l'origine est sommet du grand axe ou du petit axe.

7162. — On suppose construite la parabole $y = ax^2 + bx + c$. Trouver sur la figure les quantités a, b, c.

7163. — Trouver sur la parabole $y = ax^2 + bx + c$ deux points symétriques par rapport à la deuxième bissectrice des axes, $x + y = 0$.

7164. — Propriétés d'une tangente mobile à une parabole par rapport à deux tangentes fixes.

7165. — Soit M un point quelconque d'une ellipse ayant pour foyers F et F' ; trouver la relation qui existe entre les angles F et F' du triangle MFF'.

7166. — Trouver toutes les coniques qui coupent orthogonalement l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ aux quatre points de rencontre.

7167. — D'un point M d'une ellipse on abaisse MA et MB perpendiculaires sur les axes. Montrer que la droite AB est normale à une ellipse fixe (*).

(*) Voir Revue, n° de septembre 1905, p. 295.

7168. — La tangente en un point variable d'une hyperbole équilatère rencontre les asymptotes aux points A et B. On construit sur AB un triangle équilatéral ABC. Lieu du point C.

7169. — Trouver les foyers de la conique $y^2 = 2px + qx^2$.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

7170. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires, une droite A passant par l'origine et un point P. On fait tourner le point P d'un angle droit autour de la droite ; calculer les coordonnées du point après la rotation.

7171 — Trouver les équations de la perpendiculaire commune aux deux droites $x = y = z$ et $x = y + 1$, $z = 2y - 1$. Plus courte distance.

7172. — On donne trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ ayant une droite commune. Que représente l'équation $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$?

7173. — Distance d'un point à une droite. Exprimer cette distance en fonction des coordonnées plückériennes.

7174. — Perpendiculaire commune aux deux droites $x = az + p$, $y = 0$, et $y = bz + q$, $x = 0$.

7175. — Trouver les bissectrices des deux droites $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, $\frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'}$.

7176. — Perpendiculaire commune aux deux droites $x = az + p$, $y = bz + q$ et $y = 0$, $z = 0$.

7177. — Démontrer que les tangentes à la courbe $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ font un angle constant avec une direction fixe. Section droite du cylindre s'appuyant sur cette courbe et parallèle à la direction fixe.

7178 — On considère la surface $x^2 - 2py = 0$ et la direction Δ qui a pour cosinus directeurs $\sin\alpha$, 0 et $\cos\alpha$. Trouver sur la surface des courbes telles que les tangentes fassent l'angle α avec la direction Δ.

7179. — Que représentent les équations $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$, $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t$?

7180. — On donne trois axes rectangulaires et la sphère qui a pour équations $(x - a)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ $(a > R)$. Trouver la surface engendrée par une parallèle au plan des xy, rencontrant Oz et tangente à la sphère. Trouver la courbe de contact de la sphère et de la surface. Calculer le volume compris entre la surface, le plan des xy et la sphère.

7181. — Plan osculateur au point (t_0) de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Intersection du plan et de la courbe.

7182. — Etudier la surface $y = x \operatorname{tg}\frac{z}{h}$. Trouver sur cette surface les courbes telles que le plan osculateur en un point soit tangent à la surface en ce point.

7183. — On considère la courbe $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $z = h\varphi$. Trouver le rayon de courbure en un point ; interpréter le numérateur et le dénominateur de l'expression obtenue. Calculer l'arc de cette courbe et le comparer à un arc d'ellipse.

7184. — Lieu des points de l'espace par lesquels on peut mener à la courbe $y = x^2$, $z = x^3$ deux plans osculateurs rectangulaires.

7185. — On considère la surface définie par les équations paramétriques $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = av + \varphi(u)$ Plan tangent en un point.

7186. — Etant donnée la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, et deux points M et M' de cette courbe, calculer l'ordre infinitésimal de la distance du point M' au plan osculateur à la courbe au point M, l'infiniment petit principal étant la distance MM'. Cas où le plan osculateur est stationnaire.

7187. — Etant donnée la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$, si l'on a quel que soit t

$$\begin{vmatrix} f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \\ f'''(t) & \varphi'''(t) & \psi'''(t) \end{vmatrix} = 0,$$

la courbe est plane.

7188. — Plan tangent en un point de la surface $z = \frac{2axy}{x^2 + y^2}$. Trouver sur cette surface les courbes telles que les plans osculateurs soient tangents à la surface. Projections de ces courbes sur le plan des xy.

7189. — Trouver les équations d'un cercle de rayon R dont le centre est sur la droite $x = y = z$ et dont le plan est perpendiculaire à cette droite. Former l'équation du cône ayant ce cercle pour base et dont le sommet a pour coordonnées α, β, γ.

7190. — Si le plan osculateur d'une courbe passe par un point fixe, la courbe est plane.

7191. — Etudier les normales qu'on peut mener d'un point à une cubique gauche.

7192. — Mener par un point de l'espace une droite rencontrant la courbe $y = x^2$, $z = x^3$ en deux points.

7193. — Surface engendrée par un arceau de cycloïde tournant autour de sa base. Même problème pour un demi-arceau de cycloïde tournant autour de la tangente en son point de rebroussement.

7194. — Trouver le plan osculateur en un point t_0 de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Intersection de ce plan et de la courbe.

7195. — On donne dans l'espace des points $M_1, M_2, \ldots M_n$ et des nombres correspondants $m_1, m_2, \ldots m_n$. Trouver le lieu d'un point P tel que $\Sigma m_i PM_i^2 = k$, k étant un nombre fixe.

7196. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point A sur Oy $(OA = a)$, deux points B et B′ sur Ox, $(OB = OB' = b)$, et on considère la parabole qui a pour sommet le point A, pour axe Oy et qui passe par les points B et B′. On fait tourner cette parabole autour de Oy, calculer le volume du paraboloïde engendré, limité au plan passant par le point O et perpendiculaire à Oy.

7197. — On considère la courbe $x = \frac{A}{t-a}$, $y = \frac{B}{t-b}$, $z = \frac{C}{t-c}$. Equation du plan passant par trois points t_1, t_2, t_3. Plan osculateur.

7198. — Trouver la surface engendrée par une droite rencontrant Oz sous un angle constant et s'appuyant sur le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$.

7199. — Trouver l'équation du cône de révolution ayant pour sommet le point (x_0, y_0, z_0), pour axe la droite $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$ et pour demi-angle au sommet θ.

7200. — Lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique.

7201. — Existe-t-il des cordes d'une hélice circulaire passant par un point donné dans l'espace ?

7202. — Aire engendrée par une cycloïde tournant autour de sa base.

7203. — Trouver la surface engendrée par une ellipse tournant autour d'un de ses axes.

7204. — Trouver l'équation du cône qui a pour sommet le point (1, 2, 1) et pour directrice la courbe $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$.

7205. — Des propriétés des différentielles totales, déduire l'équation du plan tangent en un point de la surface $f(x, y, z) = 0$.

7206. — Soient $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + h = 0$ et $ux + vy + wz + p = 0$ les équations d'une sphère et d'un plan. On suppose que a, b, c, h, u, v, w, p sont fonctions d'un paramètre t. Le cercle section engendre une surface ; former l'équation du plan tangent à cette surface en un point du cercle. Démontrer que toute sphère passant par le cercle touche la surface en deux points.

7207. — Étudier la surface $z = \frac{axy}{x^2 + y^2}$. Équations générales des génératrices.

7208. — Projection stéréographique. Application à la représentation paramétrique d'une sphère.

7209. — On considère une surface $f(x, y, z, \alpha) = 0$ dont l'équation renferme le paramètre α. Montrer que chacune de ces surfaces est tangente à une surface fixe en tous les points d'une certaine courbe.

7210. — Trouver l'enveloppe du plan $\frac{Ax}{\lambda - a} + \frac{By}{\lambda - b} + \frac{Cz}{\lambda - c} = 1$.

7211 — Démontrer que tout plan variable dépendant d'un seul paramètre peut être considéré comme le plan osculateur en un point d'une courbe gauche.

7212. — Trouver l'équation de la surface de révolution engendrée par l'axe Ox tournant autour d'une droite également inclinée sur les axes de coordonnées

7213. — Trouver sur une sphère les courbes qui coupent sous un angle constant les grands cercles passant par un diamètre donné.

7214. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et trois sphères ayant pour centre le point O et pour rayons a, b, c. Par le point O on mène une demi-droite rencontrant les sphères aux points A, B, C ; par le point A on mène un plan parallèle au plan yOz, par le point B un plan parallèle au plan zOx et par le point C un plan parallèle au plan xOy. Lieu du point de rencontre de ces plans. Plan tangent en un point du lieu.

7215. — Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite parallèle au plan des xy et s'appuyant sur les droites $x = a$, $y = mz$, et $x = 0$, $y = 0$.

7216. — Que représentent les équations $x = \operatorname{ch} u + v \operatorname{sh} u$, $y = \operatorname{sh} u + v \operatorname{ch} u$, $z = u + v$? Trouver le contour apparent de la surface sur le plan des xy.

7217. — Trouver l'équation du cône de révolution ayant pour sommet l'origine, pour axe la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ et pour demi-angle au sommet θ.

7218. — Condition pour que le plan $ux + vy + wz = 0$ coupe le cône $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ suivant deux droites rectangulaires.

7219. — Étudier la nature des quadriques définies par les équations :

$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 4xz - 4yz = 1$ (équation réduite), $(x - y)(y - z) + z - x = 0$ (axe),
$(x - y)(y - z) + z - 2x = 0$ (sommet), $x^2 - 2yz = x + y$, $x^2 - y^2 - 2x - z = 0$ (génératrices rectilignes),
$yz = x$, $x^2 - 2yz = 0$ (sections circulaires), $yz + zx + xy = \lambda$, $z = 2x \pm \sqrt{y}$,
$2x^2 + 2y^2 + 4yz - 12x + 6y = 0$, $3xy - 2x^2 + y^2 - 3z^2 = 1$ (axes), $x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2z = 0$,
$x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = 0$, $z = x + y \pm \sqrt{x^2 - x}$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z)^2 = 0$,
$z^2 - 2xy = m$, $(x + y)^2 = x + y + z$ (plans principaux), $(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 1$,
$x^2 + 6xy + 9y^2 + 5xz + 2x - m = 0$, $x^2 + y^2 - 2yz + 2x - 1 = 0$,
$(x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 - 2(x + y + z) = 0$ (axe), $4xy + z^2 - 2yz + 4zx - 4x = 0$,
$x^2 - 2xy - z^2 - 2yz + 2x - 1 = 0$, $x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 1 = 0$ (sections circulaires),
$x^2 + z^2 + 2yz - 3xy + 4x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 - 2yz + 3x = 0$.

7220. — Équation générale des paraboloïdes hyperboliques admettant le plan des xy comme plan directeur. Peut-on simplifier l'équation ? On considère une génératrice parallèle au plan des xy. Trouver une génératrice de l'autre système qui lui soit perpendiculaire. Lieu du point de rencontre de ces deux génératrices.

7221. — Le rapport anharmonique de quatre points d'une génératrice d'une quadrique est égal au rapport anharmonique des quatre plans tangents.

7222. — Comment faut-il projeter un ellipsoïde sur un plan pour que sa projection ait la plus petite aire possible ?

7223. — La normale en un point d'un ellipsoïde rencontre les plans principaux aux points M, N, P. Lieu du centre de gravité des trois points M, N, P.

7224. — On donne la surface $xy = z$ et la droite D, $x = y = z$. On considère une génératrice quelconque G de la surface et on prend le pied M sur G de la perpendiculaire commune à D et G. Lieu du point M.

7225. — Deux quadriques circonscrites à une même quadrique se coupent suivant deux courbes planes.

7226. — Si deux quadriques se touchent en trois points, elles sont circonscrites.

7227. — Trouver le volume d'un segment de quadrique compris entre deux plans parallèles.

7228. — Etant donné un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et un point (x_0, y_0, z_0), trouver le lieu des droites passant par ce point qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à l'ellipsoïde.

7229. — Lieu d'un point tel que la perpendiculaire abaissée de ce point sur son plan polaire par rapport à un ellipsoïde passe par un point fixe. Former l'équation du cône ayant pour directrice le lieu trouvé et pour sommet le centre de l'ellipsoïde.

7230. — Trouver l'équation du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, les génératrices ayant pour paramètres directeurs α, β, γ.

7231. — Lieu des points d'une quadrique par où passent deux génératrices rectangulaires

7232. — Etudier la surface définie par l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ ax & by & cz \\ m & n & p \end{vmatrix} = \lambda.$$

7233. — Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à trois plans fixes est constante. Montrer que les plans fixes sont trois plans diamétraux conjugués de la quadrique obtenue.

7234. — Propriétés homographiques des génératrices des surfaces du deuxième degré.

7235. — Lieu des points d'où l'on peut mener à un paraboloïde elliptique trois plans tangents formant un trièdre trirectangle.

7236. — Conditions pour que Oz soit direction principale de la quadrique $f(x, y, z) = 0$. Résoudre dans ce cas l'équation en S.

7237. — On donne un point A sur Ox, un point B sur Oy et un point C sur Oz. Former l'équation de l'ellipsoïde admettant comme diamètres conjugués AO, AB et AC.

7238. — Exprimer que la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 + \lambda = 0$ est bitangente à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

7239. — Former l'équation d'un paraboloïde hyperbolique passant par l'axe des z, par une droite du plan des xy perpendiculaire à Ox et admettant comme plan directeur le plan $y = mz$.

7240. — Condition pour qu'un cône du deuxième degré soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit ou circonscrit.

7241. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône.

7242. — Autour de quels axes faut-il faire tourner l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$ pour qu'elle engendre une quadrique.

7243. — On mène par l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires une droite quelconque OD sur laquelle on porte les longueurs constantes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Par les points A, B, C on mène des plans perpendiculaires à OD, et on prend le point A_1 où le premier de ces plans rencontre Ox, le point B_1 où le deuxième rencontre Oy, enfin le point C_1 où le troisième rencontre Oz. Montrer que le plan $A_1B_1C_1$ est tangent à un ellipsoïde.

7244. — Trouver les génératrices de la surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ qui sont perpendiculaires à la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

7245. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les plans tangents à un ellipsoïde.

7246. — Conditions pour que la fonction la plus générale du deuxième degré à trois variables $f(x, y, z)$ soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires.

7247. — Montrer que deux quadriques qui ont une génératrice commune se touchent en deux points de cette génératrice.

7248. — On considère l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ et une génératrice G parallèle au plan des xz. On mène la perpendiculaire commune à cette génératrice et à une génératrice variable G_1 de même système. Lieu du pied (sur G_1) de cette perpendiculaire.

7249. — Lieu des points d'un paraboloïde hyperbolique par où passent deux génératrices faisant un angle α.

7250. — Lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde qui passent par un point, ou qui sont coupés par un plan suivant un cercle.

7251. — On considère quatre génératrices de même système G_1, G_2, G_3, G_4 d'un hyperboloïde à une nappe, qui rencontrent en m_1, m_2, m_3, m_4 une génératrice X de l'autre système. Démontrer que le rapport anharmonique des quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 est égal au rapport anharmonique des points de rencontre des génératrices G_1, G_2, G_3, G_4 et d'un plan fixe.

7252. — Lieu de la projection orthogonale d'un point sur son plan polaire par rapport à une quadrique quand le point se déplace sur la sphère de Monge.

7253. En un point M de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ on mène la normale qui rencontre le plan xOy au point N, puis on abaisse MP perpendiculaire sur ce plan. Relations entre les coordonnées des points N et P. Si P décrit une droite, quel est le lieu de N? Trouver quatre points de la surface M_1, M_2, M_3, M_4 tels que le quadrilatère $N_1N_2N_3N_4$ soit inscriptible. Où sont alors les points P_1, P_2, P_3, P_4?

7254. — Lieu des points équidistants de deux droites. Ce lieu est un paraboloïde hyperbolique équilatère. Réciproquement, tout paraboloïde équilatère peut-il être défini de cette façon?

7255. Lieu des milieux des cordes d'une quadrique qui passent par un point fixe.

7256. Déterminer λ de façon que la quadrique

$$\lambda(x^2+y^2)-5xy+8z^2-3z+4=0$$

ait une ligne de centres.

V. — Géométrie descriptive.

7257. — On donne une droite et un plan en géométrie cotée, trouver la projection de la droite sur le plan.

7258. — On donne les projections de deux droites, et on demande de les faire tourner autour d'un axe vertical de façon qu'après la rotation les projections verticales soient parallèles.

7259. — Angle d'un plan de bout et d'un plan vertical.

7260. — Couper un angle solide à quatre faces par un plan de façon que la section soit un parallélogramme.

7261. — Perpendiculaire menée par un point à un plan en géométrie cotée.

7262. — Construire le côté d'un cube dont on donne la projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à une diagonale.

7263. — Construire les projections d'un octaèdre régulier, l'une des faces étant horizontale.

7264. — On donne les projections d'un point F et d'une droite D. Construire les projections de la parabole qui a pour foyer le point F et pour directrice la droite D.

7265. — Construire les projections d'un cube dont l'une des diagonales est verticale.

7266. — Trouver la projection horizontale d'un carré situé dans un plan donné par son échelle de pente, l'une des diagonales étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente.

7267. — Construire le centre de gravité d'un tétraèdre dont on donne les projections des quatre sommets.

7268. — Construire la projection verticale d'une hélice située sur un cylindre de révolution à axe vertical.

7269. — Reconnaître si deux droites définies par leurs projections cotées se rencontrent. Angle de deux droites qui se rencontrent.

7270. — Construire un tétraèdre régulier sachant qu'il a une arête de front, et que les faces passant par cette arête font des angles égaux avec le plan horizontal.

7271. — Construire un tétraèdre régulier connaissant une arête AB parallèle à la ligne de terre, sachant que les deux faces passant par AB font des angles égaux avec le plan horizontal.

7272. — On donne l'arête AB d'un cube par ses projections. Construire ce cube sachant que l'une des arêtes aboutissant au point A se projette horizontalement suivant une parallèle à la ligne de terre.

7273. — Trouver la distance d'un point du deuxième bissecteur à une droite quelconque définie par ses projections. Trouver les angles que fait la perpendiculaire avec les deux plans de projection.

7274. — On donne un plan par son échelle de pente et deux points S et F de ce plan : ce sont le sommet et le foyer d'une parabole située dans ce plan. Construire la projection horizontale de cette parabole.

7275. — On donne un plan par ses traces et une circonférence qui est le rabattement d'une circonférence située dans ce plan. Déterminer le point le plus à droite de la projection horizontale de cette circonférence.

7276. — On donne deux points A et B par leurs projections et la projection horizontale c d'un point C. Déterminer la projection verticale sachant que AB et AC sont perpendiculaires.

7277. — Perpendiculaire commune à deux droites définies par leurs projections graduées.

7278 — On donne un plan par son échelle de pente, et dans ce plan un point O, qui est le centre d'un cercle situé dans ce plan et de rayon donné. Trouver la projection du cercle. Axes, sommets, deux diamètres conjugués.

7279 — Couper un trièdre trirectangle dont l'une des arêtes est verticale par un plan de façon que la section soit un triangle de grandeur donnée.

7280 — On donne un plan P par deux droites, un point O lumineux et une droite D. Trouver les rayons lumineux partant du point O qui, après réflexion sur le plan P, vont rencontrer la droite D.

7281. — Construire un tétraèdre SABC connaissant la base ABC dans le plan horizontal, les longueurs SA, SB et le dièdre BC.

7282. — Construire un tétraèdre SABC connaissant les faces SAB, SAC et le dièdre BC. Construire la perpendiculaire commune aux arêtes SA et BC.

7283. — On donne un plan par son échelle de pente. Mener dans ce plan par un point de ce plan une droite de pente donnée.

7284. — Mener par une droite graduée un plan de pente donnée. On donne trois droites graduées passant par un même point. Déterminer les éléments du trièdre ainsi formé.

7285. — On donne un plan parallèle à la ligne de terre et une droite quelconque. Trouver la symétrique de la droite par rapport au plan.

7286. — Construire un dodécaèdre régulier.

7287. — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. Déterminer la trace horizontale du cône supplémentaire.

7288. — Normale commune à un cône oblique à base circulaire et à une droite.

7289. — Mener par un point une droite tangente à deux cônes.

7290. — On donne deux points O et S. Trouver les contours apparents du cône ayant pour sommet le point S et pour base le cercle de centre O et tangent à la ligne de terre. Contours apparents du cône supplémentaire.

7291. — On donne un cône défini par son sommet et par la projection horizontale de sa base située dans un plan donné par deux droites qui se coupent. On se donne la projection horizontale d'un point, trouver la projection verticale. Contours apparents.

7292. — On donne un cône défini par sa base qui est un cercle du plan horizontal et par les projections d'une génératrice Sa, $S'a'$. Un plan sécant est défini par sa trace horizontale Δ et par le point d où il coupe Sa. Construire la projection horizontale de l'intersection. Tangentes parallèles à une direction donnée.

7293. — Section plane d'un cône dont la directrice, située dans un plan donné par deux droites, a pour projection horizontale un cercle.

7294. — Trouver le sommet de la section plane d'un cylindre parabolique.

7295. — Sections cycliques d'un cône à base circulaire horizontale, ou dont la base est un cercle dans le deuxième bissecteur.

7296. — Trouver les sections planes d'un cône à base circulaire horizontal qui se projettent horizontalement suivant des cercles.

7297. — Section parabolique d'un cône ; sommet.

7298. — Deux cônes ont pour bases deux cercles égaux tangents à la ligne de terre, l'un dans le plan vertical, l'autre dans le plan horizontal. Chaque cône a pour sommet le centre du cercle, base de l'autre. Intersection des deux cônes.

7299. — On donne dans le plan horizontal deux hyperboles équilatères dont l'une a une asymptote parallèle à la ligne de terre et dont l'autre a un axe parallèle à cette droite. Ce sont les bases de deux cylindres dont les génératrices sont de front et font 45° avec la ligne de terre. Intersection des deux cylindres.

7300. — Intersection de deux cônes ayant pour base commune un cercle dans le plan horizontal et dont les sommets se projettent horizontalement sur le cercle. Traiter la question par le calcul.

7301. — Intersection de deux cônes, ayant pour base commune un cercle de rayon donné situé dans le deuxième bissecteur.

7302. — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant un plan tangent commun.

7303. — On donne dans le plan horizontal deux cercles concentriques. Par leur centre commun on mène une droite (Δ, Δ') sur laquelle on prend un point (s, s') sommet d'un cône ayant le petit cercle pour base. Un cylindre a pour base le grand cercle et ses génératrices sont parallèles à (Δ, Δ'). Trouver l'intersection.

7304. — On donne deux cercles tangents extérieurement dans le plan horizontal au point a, la tangente commune étant perpendiculaire à la ligne de terre. Ce sont les bases de deux cônes dont les sommets sont sur la verticale du point a. Trouver l'intersection de ces cônes.

7305. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'un cylindre de front ayant même trace horizontale que le cône. Cas où la projection des génératrices du cylindre est parallèle à une des génératrices de contour apparent vertical du cône.

7306. — On donne dans le plan horizontal une hyperbole et un cercle passant par le centre de l'hyperbole et ayant son centre sur l'axe transverse. L'hyperbole est la base d'un cylindre ; le cercle est la base d'un cône ayant une génératrice commune avec le cylindre. Intersection des deux surfaces.

7307. — Intersection des deux cylindres dont l'un a pour base un cercle dans le plan horizontal et ses génératrices de front, et l'autre un cercle dans le plan vertical et ses génératrices horizontales. Y a-t-il arrachement ou pénétration ?

7308. — On donne deux cercles tangents intérieurement au point a dans le plan horizontal, soit ω le petit et O le grand. On demande l'intersection du cylindre qui a le cercle O comme section droite et du cône qui a pour base le cercle ω et pour sommet un point situé sur la verticale du point a.

7309 — On donne dans le plan horizontal une parabole qui est la directrice d'un cylindre et un cercle qui est la directrice d'un cône. Trouver l'intersection des deux surfaces sachant que le cône a une génératrice parallèle aux génératrices du cylindre.

7310. — On donne deux hyperboles équilatères égales, ayant même axe imaginaire parallèle à la ligne de terre et situées dans le plan horizontal. Ce sont les bases de deux cônes dont les sommets sont situés dans l'un des plans de front ayant pour trace horizontale une tangente commune parallèle à la ligne de terre. Intersection des deux surfaces.

7311. Trouver l'intersection d'un cône à base circulaire horizontale avec son symétrique par rapport au deuxième bissecteur.

7312. — Intersection de deux cônes de révolution égaux dont les axes sont verticaux.

7313. — Intersection d'un cône oblique à base circulaire horizontale et du cône supplémentaire ayant pour sommet un point donné.

7314. — On donne deux sphères concentriques et une droite. Par la droite on mène un plan tangent à la plus petite des deux sphères, et on demande la section de l'autre sphère par le plan.

7315. — Droite conjuguée d'une droite donnée par rapport à une sphère.

7316. — On donne une sphère dont le centre est sur la ligne de terre, et on l'éclaire par des rayons lumineux à 45°. Ombre portée par la sphère sur une droite donnée.

7317. — Mener par une droite du second bissecteur des plans tangents à une sphère ayant son centre sur la ligne de terre.

7318. — Intersection d'une sphère et d'une droite de profil. Ponctuer la droite.

7319. — Ombre à 45° portée par une droite sur une sphère.

7320. — Construire une sphère passant par quatre points, dont deux sont sur une horizontale et deux sur une frontale.

7321. — Intersection d'une sphère ayant son centre sur la ligne de terre et d'une droite du second bissecteur. Déterminer la droite commune aux deux plans tangents aux points d'intersection.

7322. — Mener par un point une droite à des distances données de deux points donnés.

7323. — Mener par un point un plan à des distances données de deux points donnés.

7324. — Construire une sphère ayant pour diamètre AB et tangente à une droite D.

7325. — On donne une sphère et une droite horizontale passant par son centre. Construire la section de la sphère par un plan passant par la droite et faisant 45° avec le plan horizontal.

7326. — On donne une sphère par ses contours apparents, une droite A dans le plan horizontal et un point M sur la verticale du centre. Section de la sphère par le plan MA; point le plus à gauche.

7327. — Construire la normale en un point d'une surface de révolution définie par une courbe tournant autour d'un axe quelconque.

7328. — Trouver les contours apparents du paraboloïde engendré par une parabole tournant autour de son axe et dont on donne le sommet et le foyer par leurs projections. On limitera le paraboloïde à un plan perpendiculaire à l'axe.

7329. — Ombre propre (en lumière à 45°) de la surface engendrée par un cercle tournant autour d'une de ses cordes supposée verticale.

7330. — Mener à un tore dont l'axe est vertical des plans tangents parallèles à une droite de front.

7331. — Ombre au flambeau d'un tore à axe vertical.

7332. — Intersection d'un tore par un plan bitangent.

7333. — Mener par un point une droite située à des distances données de deux droites dont l'une est horizontale et dont l'autre est située dans le deuxième bissecteur.

7334. — Etant donnée la projection horizontale d'un point d'un cylindre de révolution à axe de front, trouver la projection verticale et le plan tangent en ce point.

7335. — Intersection d'une droite et d'un cylindre de révolution à axe quelconque.

7336. — Un rayon lumineux tombe sur un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal. Trouver le rayon réfléchi.

7337. — Construire un cylindre de révolution passant par un point et tangent à deux plans.

7338. — Intersection de deux cônes de révolution de même sommet, ayant l'un un axe vertical et l'autre un axe de bout.

7339. — Mener par un point (a, a') un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.

7340. — Construire un cône de révolution connaissant trois génératrices.

7341. — Mener par un point donné une droite faisant un angle donné avec la ligne de terre et située à une distance donnée d'une droite donnée.

7342. — Mener par un point un plan faisant des angles égaux avec trois droites données quelconques.

7343. — Mener par un point une droite faisant des angles donnés avec les plans de projection.

7344. — Section plane d'un cône de révolution à axe vertical par un plan de bout. Foyers de la section.

7345. — Mener un plan tangent commun à deux cônes de révolution de même sommet, de même angle au sommet, ayant pour axes une frontale et une horizontale.

7346. — On donne deux droites qui se coupent ; trouver les contours apparents du cône de révolution engendré par l'une d'elles tournant autour de l'autre.

7347. — Représenter par ses projections un tronc de cône connaissant les projections des centres des bases et les rayons de ces bases.

7348. — Section d'un cône de révolution à axe vertical par un plan défini par son échelle de pente.

7349. — Trouver une horizontale rencontrant deux droites données sous des angles égaux.

7350. — Déterminer un cône de révolution connaissant son axe, son sommet et sachant qu'il est tangent à une droite verticale donnée.

7351. — Trouver les contours apparents d'une surface gauche de révolution engendrée par une droite quelconque tournant autour d'un axe de front.

7352. — Ombres propres et portées sur le plan horizontal d'une surface gauche de révolution à axe vertical. Asymptotes de l'ombre portée. Les rayons lumineux sont parallèles.

7353. — On donne une surface gauche de révolution par son axe vertical et une génératrice de front. Mener par une droite horizontale un plan coupant la surface suivant une parabole.

7354 — On donne deux cercles concentriques, le premier de rayon 2 situé dans le plan horizontal, le deuxième de rayon 5 situé dans le plan de cote 3. Le premier est le cercle de gorge d'une surface gauche de révolution, et le deuxième un parallèle de la surface. On donne la projection horizontale d'un point de la surface, trouver la cote. Mener par une droite rencontrant l'axe des plans tangents à la surface.

7355. — Ombre propre d'une surface gauche de révolution engendrée par la ligne de terre tournant autour d'un axe horizontal.

7356. — On donne une surface gauche de révolution engendrée par une parallèle à la ligne de terre dont les projections sont confondues, tournant autour d'une horizontale. Trouver son intersection avec une parallèle à la ligne de terre.

7357. — Droite conjuguée d'une droite donnée par rapport à une surface gauche de révolution à axe vertical.

7358. — Intersection d'une surface gauche de révolution avec une droite parallèle à une génératrice. Mener par cette droite des plans tangents à la surface.

7359. — Trouver la trace horizontale d'un cône qui a pour directrice la section par un plan de bout d'une surface gauche de révolution à axe vertical.

7360. — Construire le plan diamétral conjugué d'une direction donnée par rapport à une surface gauche à axe vertical.

7361. — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Déterminer : 1° le sommet; 2° les asymptotes d'une section hyperbolique ; 3° le sommet d'une section parabolique ; 4° la projection verticale d'un point dont on donne la projection horizontale ; 5° la section par une droite de front ; 6° les plans tangents par une droite.

7362. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par une verticale, une droite quelconque et ayant un plan directeur horizontal. Mener à ce paraboloïde un plan tangent parallèle au deuxième bissecteur.

7363. — On donne un carré ABCD et on considère les quatre droites qui ont pour projections cotées A(0)B(50), B(0)C(50), C(0)D(50), D(0)A(50). On les coupe par un plan horizontal, et en joignant les points d'intersection, on forme un carré. Lieu des côtés de ce carré quand le plan horizontal se déplace. Contours apparents des surfaces obtenues.

7364. — Contours apparents d'un hyperboloïde défini par trois génératrices. Cas où l'une d'elle est verticale.

7365. — Construire une droite rencontrant quatre droites données de profil.

7366. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant un plan directeur commun.

7367. — Etant donné un cône circonscrit à une sphère, trouver les sections planes de ce cône qui se projettent horizontalement suivant des cercles.

7368. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical et d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan de front de l'axe du paraboloïde.

7369. — Trouver les contours apparents d'un paraboloïde de révolution connaissant l'axe, le sommet et le foyer. Intersection de la surface et d'une droite quelconque.

7370. — On considère un ellipsoïde à axes inégaux dont les axes sont respectivement parallèle à la ligne de terre, vertical et de bout. Connaissant les longueurs de ces axes, construire un point de la surface et le plan tangent en ce point.

7371. — On donne une verticale V et une frontale F rencontrant V. F est l'axe d'un cône de révolution dont V est une génératrice. Une autre frontale F_1 parallèle à F est l'axe d'un hyperboloïde de révolution dont une génératrice est une autre verticale V_1. Intersection des deux surfaces.

7372. — Mener par une droite un plan tangent à un paraboloïde de révolution à axe vertical.

7373. — Ombres à l'intérieur d'une demi-sphère creuse.

7374. — On donne un tore à axe vertical, les cercles méridiens étant tangents à la ligne de terre. Un cylindre a pour base l'un des cercles méridiens et ses génératrices sont horizontales et font 45° avec la ligne de terre. Intersection des deux surfaces. Traiter la question par le calcul

7375. — Ombres au soleil du solide formé par deux cylindres de révolution de rayons différents, ayant même axe vertical.

7376. — On donne dans un plan de front une ellipse et une parabole ayant un foyer commun. Intersection des surfaces engendrées par ces coniques tournant autour de leur axe focal.

7377. — On donne dans le deuxième bissecteur un cercle défini par son centre et son rayon. Déterminer l'intersection de la sphère ayant ce cercle comme grand cercle et d'un cône passant par ce cercle et ayant son sommet en un point donné.

7378. — Intersection d'un cône de révolution et d'un paraboloïde de révolution dont les axes sont verticaux.

7379. — Un cylindre de révolution à axe vertical a sa base inférieure tangente à une sphère dont le centre est sur la ligne de terre. Trouver l'ombre de ce cylindre sur la sphère.

7380. — Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde de révolution à axe vertical

7381. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical et une génératrice de front G. Un paraboloïde à plan directeur horizontal est défini par la génératrice G et par une autre droite de front G_1. Intersection des deux surfaces. Points situés sur la génératrice commune. Points à l'infini.

7382. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical, et on considère l'un des points A de ce paraboloïde situé sur le contour apparent vertical et dans le plan horizontal du foyer. Trouver l'intersection du paraboloïde et de la sphère qui a pour centre le point A et qui passe au sommet du paraboloïde.

7383. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical, tournant sa concavité vers le haut, et creux. Ombres à l'intérieur.

7384. — Trace horizontale d'un cylindre circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

7385. — Un paraboloïde a pour plans directeurs les deux plans de projection. On donne son sommet (o, o') et un point (m, m') de la surface. Trouver l'intersection de ce paraboloïde et d'une sphère de centre (o, o') et passant par le point (m, m').

7386. — Ombre propre en lumière à 45° d'un solide en forme d'œuf constitué par une portion de paraboloïde de révolution et la portion de la sphère inscrite au paraboloïde.

7387. — On donne une sphère ayant pour centre le point O : soit S le point le plus à gauche de la sphère et A le point le plus bas. Trouver l'intersection de la sphère et du cône de révolution engendré par la droite SO tournant autour de SA.

7388. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et d'un cône ayant pour base un cercle horizontal et une génératrice commune avec le paraboloïde. Points à l'infini. Asymptotes.

7389. — Intersection d'un hémisphère dont la base est horizontale avec un cylindre passant par cette base.

7390. — On considère un hyperboloïde de révolution dont l'axe est de bout dans le plan horizontal. Sur une génératrice horizontale on prend un point (s, s') qui est le sommet d'un cône ayant pour directrice un cercle situé dans le plan du cercle de gorge et tangent à ce cercle. Intersection des deux surfaces.

7391. — Condition pour qu'on puisse faire passer un cône par deux cercles. On donne les projections de quatre points A, B, C, D. Trouver les sommets des cônes passant par les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD.

7392. — Intersection des deux surfaces engendrées par une droite tournant autour d'une verticale et d'une ligne de bout.

7393. — On considère un cône de révolution de sommet (S, S') et engendré par la rotation du segment $(Sa, S'a')$ autour de la verticale du point (S, S'). Intersection de ce cône et de la sphère qui admet ce segment comme diamètre.

7394. — On donne une surface gauche de révolution et une génératrice de front. Un cône passant par cette génératrice est défini par son sommet et par sa base qui est un cercle dans le plan du cercle de gorge. Intersection des deux surfaces ; points sur la génératrice commune ; tangentes en ces points.

7395. — On donne un cône de révolution à axe vertical et une sphère qui a son centre sur l'axe du cône et son point le plus bas au sommet du cône. Ombres en lumière à 45°.

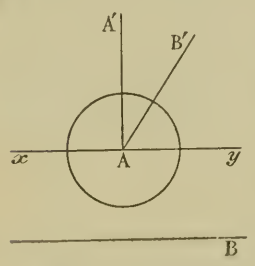
7396. — On donne une sphère ayant son centre sur la ligne de terre et un plan de bout passant par le centre. On demande l'intersection de la sphère et d'un cône ayant pour base la section de la sphère par le plan de bout.

7397. — Intersection de deux surfaces gauches de révolution engendrées par une même droite tournant autour de la ligne de terre et autour d'une verticale rencontrant la ligne de terre.

7398. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cylindre de révolution ayant pour axe une génératrice de front de l'hyperboloïde.

7399. — On coupe une surface gauche à axe vertical par un plan, et on considère un cône ayant pour base la section plane. Construire la section de ce cône par un plan horizontal.

7400. — On donne une verticale AA' dans le plan vertical de projection et une frontale BB' faisant 45° avec le plan horizontal et on considère le paraboloïde engendré par une horizontale s'appuyant sur ces deux droites. Trouver l'intersection de ce paraboloïde et du cylindre qui a pour base dans le plan vertical un cercle de centre A et dont les génératrices sont de bout. Mettre l'épure en équation.



7401. — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe définie par son cercle de gorge horizontal et une génératrice de front. Intersection de cette surface et du tore engendré par le cercle de gorge tournant autour d'une ligne de bout située dans son plan. Traiter la question par le calcul.

7402. — Intersection d'un tore et d'un cylindre de révolution ayant leurs axes parallèles.

7403. — Intersection d'une surface gauche à axe vertical et d'un cône ayant pour base le cercle de gorge et pour sommet un point d'une génératrice de front.

7404. — Trouver les ombres propres et portées d'un demi-cylindre creux de révolution à axe horizontal.

7405. — On donne une sphère tangente au plan horizontal, et on considère un cône ayant pour sommet le point le plus à gauche de la sphère et pour base un cercle du plan horizontal, coïncidant avec le contour apparent horizontal de la sphère. Intersection des deux surfaces.

7406. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est de front.

7407. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical ; on enlève la moitié supérieure, et on suppose que le reste est creux. Ombres propres et portées en lumière à 45°.

VI. — Cinématique.

7408. — Etudier le mouvement d'un point dans lequel l'accélération totale est constamment perpendiculaire et proportionnelle à la vitesse.

7409. — Un point décrit une hélice d'un mouvement uniforme ; calculer l'accélération. Hodographe.

7410. — Etudier le mouvement d'un point sur une ellipse, connaissant la projection du mouvement sur le grand axe. Vitesse, accélération.

7411. — Trouver le mouvement d'un point qui se meut de telle sorte que sa vitesse soit en raison inverse de sa distance au pôle O, et que la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ soit égale à une constante ω. Construire la trajectoire du point.

7412. — Un point M décrit un cercle de centre O et de rayon R d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω. Sur la tangente au point M et dans le sens inverse du mouvement on prend une longueur MP égale à l'arc AM, A étant un point fixe du cercle. Etudier le mouvement du point P.

7413. — Etudier le mouvement d'un point M dont les coordonnées sont $x = a\cos\lambda t$, $y = a\sin\lambda t$, $z = b\sin 2\lambda t$. Vitesse, accélération totale, accélération tangentielle. Comparer le vecteur accélération avec le vecteur OM.

7414. — On lance du point O un mobile pesant avec une vitesse v_0 faisant l'angle α avec le plan horizontal. Ce mobile décrit une parabole. On coupe cette trajectoire par un plan horizontal sur lequel on suppose que le mobile se réfléchit. Etudier le mouvement après réflexion.

7415. — Etudier le mouvement rectiligne dans lequel l'accélération γ et la vitesse V sont liées par la relation $\gamma = -g\left(1 + \frac{V}{a}\right)$, g et a étant des constantes positives.

7416. — Etudier le mouvement défini par les équations

$$x = \frac{1}{3}(1 + \sin\omega t - \sqrt{3}\cos\omega t), \qquad y = \frac{1}{3}(1 + \sin\omega t + \sqrt{3}\cos\omega t), \qquad z = \frac{1}{3}(1 + 2\sin\omega t).$$

Etudier la nature de la trajectoire.

7417. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires, un cercle dans le plan des xz et un cercle dans le plan des xy. Ces deux cercles sont parcourus avec la même vitesse angulaire constante ω par deux mobiles M et M_1. Etudier le mouvement de l'extrémité de la résultante des vecteurs OM et OM_1.

7418. — Un point mobile se déplace de façon que ses projections sur trois axes de coordonnées aient des mouvements uniformément variés; étudier la trajectoire.

7419. — Trouver le mouvement d'un point M tel que le rapport de ses vitesses aréolaires par rapport à deux points fixes O et O', soit : 1° constant; 2° égal au rapport $\frac{OM}{O'M}$.

7420. — Etudier le mouvement défini par les équations $x = L\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$, $y = \sin t$.

7421. — Un cercle qui a un mouvement de translation rectiligne et uniforme est parcouru par un point qui a un mouvement uniforme sur le cercle. Etudier la trajectoire du point.

7422. — Un point M se déplace sur une courbe suivant une loi quelconque. A l'instant t on porte sur la tangente en M un vecteur $MH = v\Delta t$, et on joint le point H au point M', position du mobile à l'instant $t + \Delta t$. Calculer les projections du vecteur HM'.

7423. — On donne un axe fixe autour duquel tourne une droite parallèle Δ, d'un mouvement uniforme. Soit M le pied sur Δ de la perpendiculaire commune à Δ et à une droite fixe D. Etudier le mouvement du point M.

7424. — Deux points de masses égales parcourent deux cercles situés dans des plans parallèles avec des vitesses angulaires égales, mais en sens contraires. Etudier le mouvement du centre de gravité.

7425. — Un point M décrit un cercle C de centre O d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire ω. Un point P décrit un cercle C_1 ayant pour centre le point M et entraîné avec ce point d'un mouvement uniforme de vitesse $\frac{\omega}{2}$. A l'instant initial les points O, M, P sont en ligne droite. Etudier la trajectoire du point P.

7426. — Etudier les mouvements rectilignes où l'accélération γ est proportionnelle au carré v de la vitesse. Cas où l'on a $\gamma = av^2 + b$.

7427. — Un point mobile M parcourt un cercle d'un mouvement uniforme. Un point P se déplace sur un diamètre de ce cercle de façon que la longueur MP soit constante. Etudier le mouvement du point P.

7428. — Une parabole tourne autour de son foyer d'un mouvement uniforme. Comment doit se déplacer un point M sur la parabole pour que sa vitesse absolue soit dirigée à chaque instant suivant le diamètre passant par M ?

7429. — Etudier le mouvement d'un point qui décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$, sachant que la projection du point sur la tangente au sommet est définie par l'équation $y = a\sin(\omega t + \alpha)$.

VII. — Dynamique.

7430. — Un point mobile (x, y) soumis à l'action de la force $X = ax^2 + by$, $Y = by^2 - ax$ décrit un cercle ayant pour centre l'origine. Evaluer le travail de la force quand le point décrit complètement la circonférence.

7431. — Un point mobile sur un demi-cercle est attiré par un point fixe proportionnellement à la distance. Calculer le travail total quand le point décrit le demi-cercle.

7432. — On donne deux points O et A dans un plan vertical ; du point O on lance un point pesant avec une vitesse v_0 faisant l'angle α avec l'horizontale. A quel instant doit-on abandonner du point A un autre point pesant (sans vitesse initiale) pour qu'il rencontre le premier ?

7433. — Travail de la force $X = a - \frac{y^2}{x^2}$ $Y = \frac{2y}{x}$. Potentiel ; surfaces de niveau ; lignes de forces.

7434. — Un point est soumis à la force $X = 1$, $Y = \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. Equations du mouvement; lignes de niveau.

7435. — Un point pesant tombe sur un plan horizontal, rebondit avec une vitesse moitié de celle qu'il avait en arrivant sur le plan. Etudier les bonds successifs.

7436. — Un point matériel M décrit une parabole sous l'action d'une force émanant du foyer. Calculer cette force en la supposant fonction de la distance.

7437. — Etudier le mouvement d'un point repoussé par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

7438. — Etudier le mouvement d'un point pesant assujetti à se déplacer avec frottement sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution horizontal.

7439. — Etudier le mouvement rectiligne d'un point soumis à l'action d'une force proportionnelle au cube de la vitesse.

7440. — Etudier le mouvement parabolique des planètes.

7441. — Etudier le mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

7442. — Etudier le mouvement d'un point matériel pesant placé sans vitesse initiale sur une sphère parfaitement polie.

7443. — Calculer le travail élémentaire d'une force dans un mouvement de rotation.

7444. — On considère le champ de forces $X = \frac{x^2 - y^2 + a^2}{x^2}$, $Y = \frac{2y}{x}$. Y a-t-il une fonction des forces ?

7445. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance, la vitesse initiale étant nulle.

7446. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur une ellipse à axe vertical.

7447. — Mouvement d'un point pesant lancé verticalement vers le haut dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la n^e puissance de la vitesse. Jusqu'à quelle hauteur montera le mobile ? Cas particulier : $n = 2$.

7448. — Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde tournant sa concavité vers le haut.

7449. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point A sur Oy. Etudier le mouvement d'un point assujetti à décrire Ox et attiré par le point A en raison inverse du carré de la distance.

7450. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur un cercle avec frottement.

7451. — Un point matériel est soumis à l'action d'une force centrale, fonction de sa distance au centre fixe. Peut-on choisir les conditions initiales telles que le point décrive un cercle ?

7452. — Etudier le mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance. On supposera la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.

7453. — Un mobile parcourt suivant la loi des aires la conique $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}$. Trouver la force.

7454. — Un point mobile M se déplace sur un cercle vertical avec frottement sous l'action de son poids. Déterminer la vitesse de ce point à un instant quelconque en fonction de sa position sur le cercle.

7455. — Un point décrit une lemniscate sous l'action d'une force centrale, émanant du point double et fonction de sa distance au point double. Déterminer la loi de la force.

7456. — Trouver l'expression du rayon vecteur en fonction du temps dans le mouvement planétaire.

7457. — Mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale répulsive, inversement proportionnelle à la distance.

7458. — Un point décrit un cercle sous l'action d'une force centrale fonction de sa distance au centre des forces. Calculer la force.

7459. — Etudier le mouvement d'un point qui se déplace dans le plan de deux axes rectangulaires Ox, Oy sous l'action d'une force perpendiculaire à Ox et proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ de sa distance à Oy.

7460. — On donne une ellipse à axe vertical, et on considère un diamètre OM situé au-dessous de l'axe horizontal. On abandonne un mobile pesant en O et on l'assujettit à décrire le diamètre OM. Déterminer le point M de l'ellipse de façon que le mobile décrive OM dans le temps minimum.

7461. — On abandonne sans vitesse initiale sur une chaînette un point pesant assujetti à décrire la courbe. Au bout de combien de temps arrivera-t-il au sommet ?

7462. — Un point matériel se déplace sur une spire d'hélice ayant pour axe Oz ; il est soumis à une force dont les projections sont $X = y^2$, $Y = x^2 - 2xy$, $Z = 0$. Evaluer le travail de cette force.

7463. — Un point est attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Peut-on choisir les conditions initiales pour que la trajectoire soit un cercle ?

7464. — On considère un triangle ABC rectangle en A, le côté AB étant horizontal et AC vertical, et l'on prend un point M quelconque sur BC. Un point pesant abandonné en A sans vitesse initiale glisse sur AM sans frottement. Déterminer le point M de façon que le temps mis à parcourir AM soit minimum.

7465. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe suivant la loi $\frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r^3}$.

7466. — Etudier le mouvement d'un point pesant lancé suivant une direction quelconque dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse.

7467. — On considère le champ de forces $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{1}{y}$, $Z = \frac{1}{z}$. Y a-t-il une fonction des forces ? Surfaces de niveau. Le point mobile part sans vitesse du point (x_0, y_0, z_0) ; avec quelle vitesse arrive-t-il au point (x_1, y_1, z_1) ?

7468. — La courbe $r = a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ est parcourue par un mobile suivant la loi des aires. Trouver la force qui le sollicite.

7469. — Un point M décrit une parabole en étant soumis à deux forces : l'une dirigée suivant le rayon vecteur qui part du foyer et égale à ce rayon vecteur, l'autre de grandeur inconnue et dirigée suivant une parallèle à l'axe. Déterminer la valeur de cette force.

7470. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur une cycloïde. Réaction.

7471. — On écarte un pendule de sa position d'équilibre et on le renvoie vers le bas avec une vitesse v_0. Quelle doit être cette vitesse pour qu'il arrive au point le plus haut du cercle ?

7472. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, un point A sur Ox et un point B sur Oy. Un mobile M, attiré par le centre fixe O proportionnellement à la distance, est lancé du point A avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec Ox. Déterminer α de façon que le mobile passe au point B.

7473. — Un mobile décrit une circonférence suivant la loi des aires par rapport à un point pris sur la circonférence. Déterminer la force qui produit ce mouvement.

7474. — Mouvement d'un point attiré par un axe fixe proportionnellement à sa distance à cet axe. La vitesse initiale est supposée dans un même plan avec l'axe.

7475. — On donne un demi-cercle vertical situé au-dessous de son diamètre AB supposé horizontal. Soit OC le rayon vertical et OM un rayon faisant l'angle α avec OC. Un point mobile assujetti à décrire OM est abandonné en O sans vitesse initiale. Déterminer α de façon qu'il arrive au point M avec une vitesse moitié de celle qu'il aurait au point C s'il tombait suivant la verticale OC.

7476. — Un point matériel décrit une hyperbole équilatère sous l'action d'une force parallèle à une asymptote. Calculer cette force et étudier le mouvement.

7477. — Un point matériel est mobile sur une hélice ; il est attiré par une force passant par un point fixe de l'axe et égale à sa distance au point fixe. Calculer le travail de cette force quand le point décrit une spire d'hélice.

7478. — On donne un triangle ABC rectangle en A, AB étant horizontale et AC verticale. Trouver sur l'hypoténuse BC un point M tel qu'un point pesant décrive AM et AC dans le même temps.

7479. — Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde.

7480. — On considère le champ de forces $X = -\mu y$, $Y = \mu x$, $Z = \mu h$. Trouver les lignes de force.

VIII. — Statique.

7481. — Equilibre d'un point pesant assujetti à rester sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution horizontal. Il y a frottement.

7482. — Dans un plan vertical on donne un disque circulaire pesant reposant sur une horizontale. En deux points A et B du contour sont appliqués des points P et Q. Position d'équilibre du disque.

7483. — Une tige rigide AD est articulée en A sans frottement et mobile dans le plan du tableau. Au milieu B de AD est articulée sans frottement une autre tige $BC = \frac{AD}{2}$, dont l'extrémité C est mobile avec frottement sur la verticale du point A. Equilibre du système quand on applique en D un point P. On négligera le poids des tiges.

7484. — Equilibre d'une poulie infiniment petite supportant un poids p et mobile le long d'un fil attaché par ses extrémités en deux points à des niveaux différents.

7485. — Centre de gravité d'un segment de parabole.

7486. — Trouver le centre de gravité de la surface d'un tétraèdre.

7487. — Réduire un système de forces à une force et un couple, l'angle de la force et de l'axe du couple étant donné.

7488. — Equilibre d'un point pesant avec frottement sur un paraboloïde elliptique à axe vertical.

7489. — On construit sur les côtés d'un triangle rectangle des carrés en dehors du triangle. Trouver le centre de gravité de l'aire formée par le triangle et ces carrés.

7490. — Etant donné un axe de moment nul par rapport à un système de forces, on peut réduire ce système à deux forces appliquées en deux points de l'axe.

7491. — Montrer que la résultante de deux forces situées dans un même plan passe par un point fixe quand les forces tournent d'un même angle autour de leurs points d'application.

7492. — Axe central d'un système de trois forces.

7493. — Un point matériel pesant repose sur un plan horizontal, attaché à un fil élastique dont l'autre extrémité est fixe sur le plan. On suppose que la tension du fil est proportionnelle à son allongement. Trouver les plages d'équilibre du point, en supposant qu'il y ait frottement.

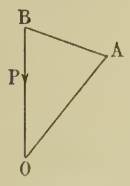
7494. — Démontrer que tout système de forces peut être remplacé par six forces dirigées suivant les arêtes d'un tétraèdre et que cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

7495. — Trouver les positions d'équilibre d'une barre pesante AB dont les extrémités reposent sur un cercle situé dans un plan vertical. On suppose qu'il y a frottement en l'une des extrémités seulement.

7496 — On considère une échelle AB appuyée en A sur le plan horizontal et en B sur un mur vertical. Une corde AC est attachée à la partie inférieure A de l'échelle et au mur. Calculer la tension de la corde en fonction de la position d'une personne sur l'échelle.

7497. — Peut-on réduire un système de forces à deux forces rectangulaires ?

7498. — Un corps solide est soumis à un système de forces. On veut le maintenir en équilibre en fixant deux points. Comment faut-il choisir ces deux points ?



Une barre pesante OA tourne autour du point O dans un plan vertical. L'extrémité mobile A est attachée à un fil qui passe sur une poulie infiniment petite située sur la verticale du point O en un point B tel que OB = OA. A ce fil est attaché un poids P. Calculer ce poids pour qu'il y ait équilibre.

7499. — Centre de gravité d'un arc d'hélice, d'un arceau de cycloïde.

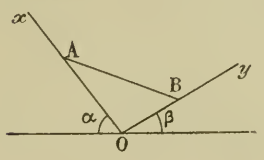
7500. — Trouver les conditions d'équilibre d'un corps solide assujetti à toucher une droite fixe en un point fixe.

7501. — Sur un fil attaché en deux points A et B glisse un anneau C auquel est suspendu un poids P. Trouver la position d'équilibre.

7502. — Trouver le moment de la force (X,Y,Z) par rapport à la droite $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$.

7503. — On connaît le moment d'un vecteur par rapport à un point O, trouver le moment du même vecteur par rapport à un autre point O'.

7504. — On donne un polygone plan ou gauche ABC...L sur les côtés duquel sont appliquées des forces représentées par les vecteurs AB, BC, ... LA. Faire la réduction de ce système de forces.



7505. — Trouver la position d'équilibre d'une barre pesante AB dont les extrémités reposent sur les côtés d'un angle $x0y$ situés dans un plan vertical et faisant les angles α et β avec l'horizontale.

QUESTIONS PROPOSÉES

1828. — On considère trois coniques C, C' et C'' ayant deux tangentes communes a et b et on demande :

1° L'enveloppe des droites Δ telles que leurs pôles par rapport à C, C', C'' soient en ligne droite. Soit Δ_1 cette droite.

2° On demande aussi l'enveloppe des droites Δ_1, et le lieu du point de rencontre de Δ avec Δ_1.

3° On demande en outre l'enveloppe de l'enveloppe de Δ et du lieu du point de rencontre de Δ et Δ_1 quand C et C' restant fixes, C'' varie.

LITON.

1829. — Une droite mobile MM' s'appuie, en M et en M', sur deux droites fixes, D et D', et reste perpendiculaire à la droite D. Montrer, qu'en désignant par V l'angle des deux plans DMM' et D'M'M, on a

$$MM' \lg V = c^{te}.$$

J. HAAG.

1830. — Une horloge est commandée par un balancier formé d'une tige cylindrique en acier, non aimantée, de longueur $2a = 150^{cm}$, suspendue par une de ses extrémités et oscillant dans le plan du méridien magnétique. L'horloge, dans ces conditions, a une marche exacte. On donne au balancier une aimantation longitudinale d'intensité $I = 250$ C. G. S., pôle sud en haut, pôle nord en bas. De combien l'horloge avance-t-elle maintenant par jour ?

Incidemment, on calculera l'angle que la nouvelle position d'équilibre du balancier fait avec la verticale ; cet angle est petit ; on négligera les quantités qui sont de l'ordre de son carré.

Composante horizontale du champ magnétique terrestre : $H = 0{,}20$.

Composante verticale : $Z = 0{,}42$.

Accélération de la pesanteur : $g = 981$.

Densité de l'acier : $\delta = \frac{7200}{981}$.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

1755. — *On considère la fonction*

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

et on demande :

1° *De former l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle elle satisfait, puis d'intégrer cette équation différentielle ;*

2° *De former le faisceau des courbes intégrales qui passent au point* $x = \pi$, $y = -1$, *et de trouver le lieu des points d'inflexion de ces courbes. Montrer que ceux de la courbe* $y = \frac{\sin x}{x}$ *sont sur une courbe algébrique du sixième degré.*

3° *Trouver les séries de la forme*

$$\frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

qui satisfont à l'équation différentielle et expliquer le résultat obtenu.

1. Si on pose $y = \frac{\sin x}{x}$, on en déduit $xy = \sin x$, et, par suite

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} = -\sin x ;$$

ceci nous donne

$$xy'' + 2y' = -xy \qquad \text{ou} \qquad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Telle est l'équation différentielle demandée.

Le calcul même que nous venons de faire nous montre que

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} + (xy) = 0$$

est une des formes de l'équation différentielle ; donc, en posant $u = xy$, nous avons à intégrer l'équation différentielle bien connue

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0 ;$$

celle-ci admet la solution générale

$$u = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x,$$

et l'intégrale générale de l'équation envisagée est

$$y = \frac{\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x}{x},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

2. Pour $x = \pi$, nous avons

$$y = -\frac{\mathrm{A}}{\pi} ;$$

si donc $y = -1$, la constante A est égale à π et l'on a

$$y = \frac{\pi \cos x + \lambda \sin x}{x},$$

λ étant une constante arbitraire. En un point d'inflexion, on a $y'' = 0$, c'est-à-dire $2y' + xy = 0$; or

$$y' = \frac{x(\lambda \cos x - \pi \sin x) - \pi \cos x - \lambda \sin x}{x^2},$$

$$y' = \frac{\lambda \cos x - \pi \sin x}{x} - \frac{y}{x}.$$

Nous déduisons de là, en annulant $2y' + xy$,

$$2\lambda \cos x - 2\pi \sin x - 2y + x^2 y = 0,$$

et, comme

$$\lambda = \frac{xy - \pi \cos x}{\sin x},$$

nous avons immédiatement l'équation du lieu des points d'inflexion

$$2 \operatorname{cotg} x(xy - \pi \cos x) - 2\pi \sin x + y(x^2 - 2) = 0,$$

$$y = \frac{2\pi}{(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x}.$$

Pour construire cette courbe, il faut étudier la fonction qui est au dénominateur de y

$$z = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x.$$

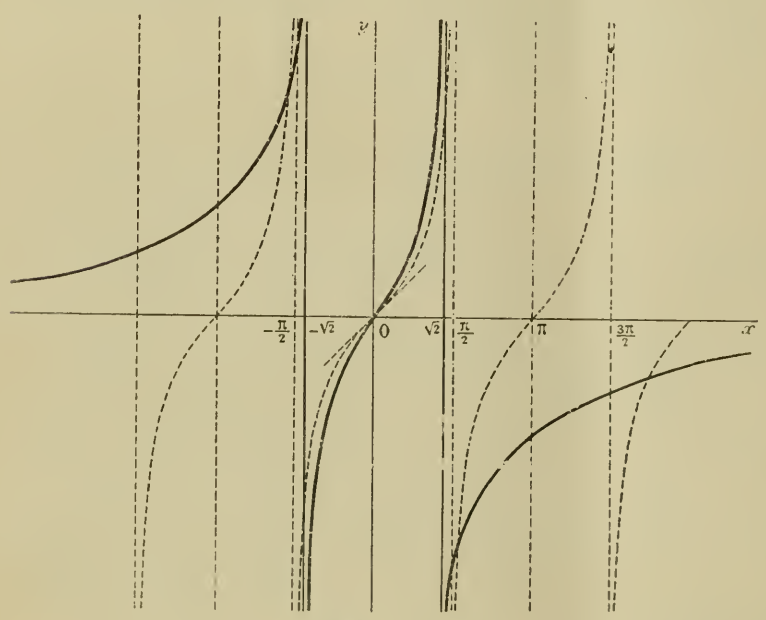


Fig. 1.

Cherchons d'abord les racines de cette fonction, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2 - x^2}.$$

La courbe $y = \operatorname{tg} x$ se construit immédiatement ; reste à construire la courbe

$$y = \frac{2x}{2 - x^2}.$$

La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{2(1 + x^2)}{(2 - x^2)^2},$$

elle est toujours positive, la fonction est toujours croissante ; elle est nulle pour $x = \mp \infty$ et pour $x = 0$, la tangente à l'origine est la droite $y = x$; enfin la fonction est infinie pour $x = \pm \sqrt{2}$.

En remarquant en outre que l'origine est un centre de la courbe, on peut tracer cette courbe avec une approximation suffisante : elle est en trait plein sur la figure, et la courbe $y = \operatorname{tg} x$ en trait pointillé (fig. 1).

Nous voyons de suite que les deux courbes se coupent en une infinité de points : pour $x = 0$, entre $\frac{\pi}{2}$ et π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, etc.

Nous allons d'ailleurs retrouver autrement tous ces résultats en étudiant les variations de z. Nous avons

$$z' = x^2 \cos x,$$

et nous voyons de suite que cette quantité change de signe aux points

$$\ldots, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots;$$

elle est positive de $\frac{-\pi}{2}$ à $\frac{+\pi}{2}$, négative de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, etc.

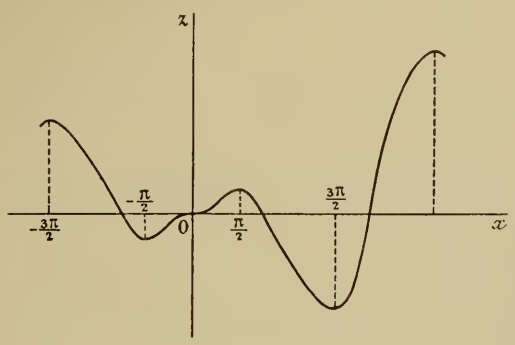


Fig. 2.

La courbe est figurée à côté ; on voit de suite que les valeurs numériques des ordonnées aux points maximums et minimums vont en croissant très rapidement et que les zéros de la fonction sont dans les intervalles signalés.

La fonction $y = \frac{2\pi}{z}$ varie alors en sens contraire de la fonction z ; elle a une infinité d'asymptotes parallèles à Oy et ses ordonnées maximums et minimums vont en diminuant rapidement (fig. 3).

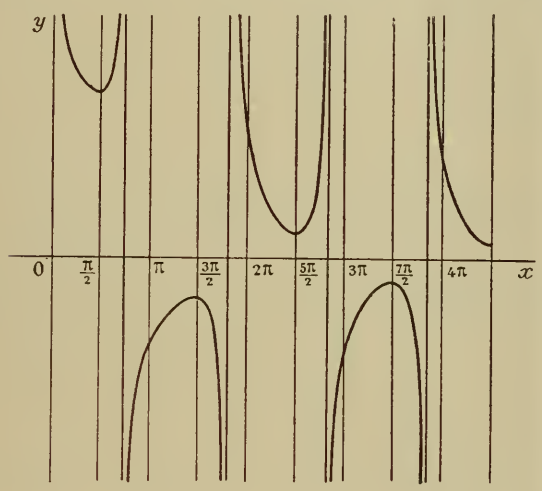


Fig. 3.

Si on remplace π par zéro et λ par 1 dans les calculs précédents, on obtient les points d'inflexion de la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$. On trouve ainsi

$$(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x = 0,$$

et, comme $\sin x = xy$,

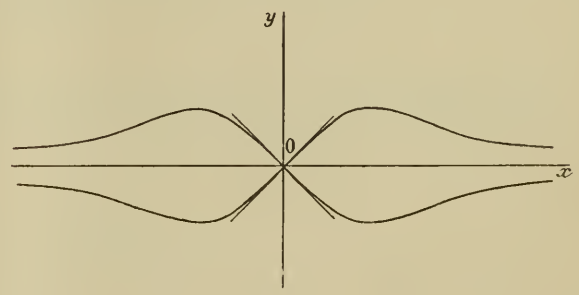


Fig. 4.

$$y(x^2 - 2) + 2 \cos x = 0.$$

Ecrivons que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

nous aurons $$x^2y^2 + \frac{y^2(x^2-2)^2}{4} = 1,$$

ou $$y^2(x^4 + 4) = 4.$$

Telle est la courbe algébrique du sixième degré qui porte les points d'inflexion de la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$. Elle se construit immédiatement (fig. 4).

3. Pour traiter la deuxième partie, il suffit de remplacer y, y' et y'' par

$$\frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

$$-\frac{a_{-1}}{x^2}+a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$\frac{2a_{-1}}{x^3}+2a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots,$$

dans l'équation différentielle

$$xy''+2y'+xy=0,$$

et d'annuler identiquement les coefficients des différentes puissances de x. On trouve ainsi successivement

$$2a_{-1}-2a_{-1}=0,$$
$$2a_1+a_{-1}=0,$$
$$6a_2+a_0=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)(n+2)a_{n+1}+a_{n-1}=0,$$

on en déduit de suite

$$a_1=-\frac{a_{-1}}{1.2},\qquad a_2=-\frac{a_0}{1.2.3},\qquad a_3=\frac{a_{-1}}{1.2.3.4},\qquad a_4=\frac{a_0}{1.2.3.4.5},\qquad \ldots,$$

et, par suite, la solution générale de l'équation différentielle est

$$a_{-1}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3.4}-\cdots\right)+a_0\left(1-\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5}-\cdots\right);$$

c'est bien

$$a_{-1}\frac{\cos x}{x}+a_0\frac{\sin x}{x},$$

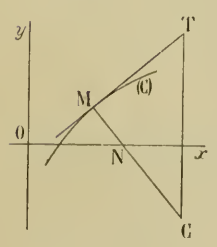
c'est-à-dire la solution générale déjà trouvée.

L. SIMON, à Châlons-sur-Marne, et AMBLARD, à Ruines.

Bonnes solutions : MM. G. Gradir ; A. Duby, à Dijon ; A. Gandois ; J. Fitte, à Azille ; J. Bing, à Toul ; Mirante, à Alger ; G. Lach, à Denain ; J.-D. Dufaut, à Poitiers ; G. Fougry, à Reims ; H. Janois.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1764. — *On considère une courbe* (C) *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point* M *de cette courbe et la normale en* M, *qui rencontre l'axe des x au point* N ; *on considère en outre le centre de courbure* C *et la parallèle* CT *à* Oy, *qui rencontre la tangente en* T.



1° *Déterminer les courbes* (C) *de façon que l'on ait toujours*

$$2\mathrm{ON}=\mathrm{CT}.$$

2° *Trouver les lieux des points de contact des tangentes menées par le point* O *aux courbes* (C).

3° *Ces lieux constituent une famille de courbes à un paramètre, dont on demande les trajectoires orthogonales.*

1° Soit $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, où p désigne une fonction de α, l'équation de la tangente à la courbe proposée.

La normale a pour équation

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - p' = 0,$$

et la normale à la développée,

$$-x\cos\alpha - y\sin\alpha - p'' = 0.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont donc

$$\text{(C)} \qquad x_C = -p'\sin\alpha - p''\cos\alpha, \qquad y_C = p'\cos\alpha - p''\sin\alpha.$$

D'autre part, l'y du point T est donné par $y_T = \dfrac{p - x_C\cos\alpha}{\sin\alpha}$, et le segment CT, $y_T - y_C$, est égal à $\dfrac{p - x_C\cos\alpha}{\sin\alpha} - y_C = \dfrac{p + p''}{\sin\alpha}$; en outre $\mathrm{ON} = \dfrac{-p'}{\sin\alpha}$.

La relation $2\,\mathrm{ON} = \mathrm{CT}$ se réduit donc à

$$p'' + 2p' + p = 0,$$

et la solution générale de cette équation différentielle est

$$p = (\lambda\alpha + \mu)e^{-\alpha},$$

λ et μ étant des constantes arbitraires.

La podaire de la courbe par rapport à l'origine a donc pour équation générale, en coordonnées polaires,

$$\rho = (\lambda\omega + \mu)e^{-\omega},$$

et les équations paramétriques de la courbe proposée sont

$$x = p\cos\alpha - p'\sin\alpha, \qquad y = p\sin\alpha + p'\cos\alpha,$$

ou

$$x = [(\lambda\alpha + \mu)\cos\alpha + (\lambda\alpha + \mu - \lambda)\sin\alpha]e^{-\alpha}, \qquad y = [(\lambda\alpha + \mu)\sin\alpha - (\lambda\alpha + \mu - \lambda)\cos\alpha]e^{-\alpha}.$$

2° Pour que la tangente passe à l'origine, il faut que $p = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -\dfrac{\mu}{\lambda}$, et l'$x$ et l'y du point M sont

$$x = -\lambda\sin\alpha\, e^{-\alpha}, \qquad y = \lambda\cos\alpha\, e^{-\alpha},$$

où λ désigne une constante arbitraire et α le paramètre du point M qui décrit le lieu. En posant $\omega = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$, les équations du lieu s'écrivent

$$x = \lambda\cos\omega\, e^{\frac{\pi}{2} - \omega}, \qquad y = \lambda\sin\omega\, e^{\frac{\pi}{2} - \omega}.$$

Ce lieu est une spirale dont l'équation polaire est

$$\rho = \lambda e^{\frac{\pi}{2} - \omega}.$$

On trouve donc ainsi une infinité de spirales logarithmiques homothétiques par rapport à l'origine, dont l'équation est

$$\rho = Ce^{-\omega}.$$

L'équation différentielle de ces spirales est $\rho + \rho' = 0$.

3° Nous passerons à l'équation différentielle des courbes orthogonales en changeant $\dfrac{\rho}{\rho'}$ en $-\dfrac{\rho'}{\rho}$, ce qui nous donne

$$\rho' - \rho = 0;$$

d'où

$$\rho = Ce^{\omega}.$$

Ce sont des spirales symétriques des précédentes par rapport à Ox. Ce dernier résultat était d'ailleurs évident une fois le second connu.

Solutions satisfaisantes : MM. Bonnetète, à Dinan : P. Névéjans, à Douai.

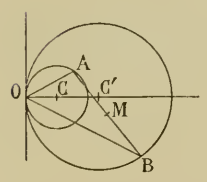
QUESTIONS PROPOSÉES

1831. — 1° Montrer que la fonction $y = \operatorname{ch} nt$ de $x = \operatorname{ch} t$ satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - n^2y = 0.$$

Transformer cette équation par la substitution $x = \operatorname{ch} t$ et intégrer.

2° $\operatorname{ch} nt$ est un polynome entier en x et de degré n. Trouver ce polynome à l'aide de l'équation différentielle précédente. Montrer que ce polynome en x a toutes ses racines réelles et comprises entre -1 et $+1$. Calculer ces racines.



1832. — Etant donnés deux cercles tangents en O et de centres C et C, on mène deux droites OA et OB, également inclinées sur CC′ et rencontrant le premier cercle en A et le second en B.

1° Lieu du milieu de AB quand on fait varier l'inclinaison commune de OA et OB sur CC′.

2° Enveloppe de la droite AB. V. H.

1833. — Un mélange de chlorures de phosphore et d'arsenic pesant 9g,84 est dissous dans un excès d'eau. De la liqueur ainsi obtenue on fait deux parts égales.

La première part sert à déterminer la composition du mélange. A cet effet, on la colore avec quelques gouttes d'hélianthine et on y verse une dissolution titrée de soude jusqu'à virage qui se produit quand on a employé 120 millimolécules de soude ; puis on ajoute de la phtaléine et on continue de verser de la soude jusqu'à nouveau virage qui se produit quand on a employé encore 20 millimolécules. Comme contrôle, on verse encore une dissolution acide de permanganate de potassium qui cesse de se décolorer quand on en a versé 10 millimolécules.

Etant maintenant fixé sur la composition de la liqueur, on ajoute à la deuxième part un excès d'azotate d'argent ; il se forme un précipité, quelle est sa nature et son poids ? Dans la liqueur filtrée, on ajoute peu à peu et indéfiniment de l'ammoniaque. Quelles sont les actions successives qui se produisent ?

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. N° 3. Décembre 1909.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

COURBES GAUCHES ET SURFACES (*)

par M. **A. Sainte-Laguë**, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

§ I. — COURBES GAUCHES.

Formules de Frenet. — **1.** — Considérons une courbe gauche et prenons comme variable l'arc s de la courbe. Les coordonnées x, y, z d'un point, les cosinus directeurs de la tangente en ce point α, β, γ; ceux de la normale principale ou normale du plan osculateur α', β', γ'; ceux de la binormale ou normale au plan osculateur α'', β'', γ'' sont des fonctions de s. On a d'ailleurs immédiatement $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$. Le rapport de l'arc qui joint deux points infiniment voisins à l'angle des tangentes en ces points s'appelle rayon de courbure, R. On sait d'autre part que ce rayon de courbure est porté sur la normale principale dans un sens convenable, ce qui permet de définir le centre de courbure, et est donné en valeur absolue par

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

Le rapport de l'arc qui joint deux points infiniment voisins à l'angle des plans osculateurs en ces points, ou si l'on veut, à l'angle des binormales, s'appelle rayon de torsion T. On a donc, par un calcul analogue au précédent,

$$\frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma''}{ds}\right)^2.$$

2. — Il existe pour calculer les dérivées par rapport à s des neuf cosinus directeurs α, β, ... γ'' des formules simples que nous allons établir.

Remarquons d'abord que, d'après l'équation du plan osculateur mise sous sa forme habituelle de déterminant, α'', β'', γ'' sont proportionnels aux trois déterminants tels que

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = \frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = \beta\frac{d\gamma}{ds} - \gamma\frac{d\beta}{ds}.$$

On a alors pour $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$ (en désignant par Σ la somme de trois termes analogues au premier) :

$$\Sigma\frac{d\alpha}{ds}\left(\beta\frac{d\gamma}{ds} - \gamma\frac{d\beta}{ds}\right) = 0,$$

$$\Sigma\alpha\frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Cette dernière relation se déduit par dérivation de $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Ces formules sont aussi vérifiées si l'on substitue α', β', γ' à $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$, car elles expriment que la normale principale est perpendiculaire à la binormale et à la tangente. On en déduit

$$\frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\alpha'} = \frac{\frac{d\beta}{ds}}{\beta'} = \frac{\frac{d\gamma}{ds}}{\gamma'}$$

(*) Nous avons pensé qu'il ne serait pas inutile de grouper, pour les élèves de Mathématiques spéciales, tout ce qui, dans leur programme, concerne les propriétés infinitésimales des courbes gauches et des surfaces. M. A. Sainte-Laguë a bien voulu se charger de cet article et nous nous empressons de le publier. *N. d. l. R.*

ou, en élevant au carré et ajoutant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, on trouve pour valeur commune de ces rapports $\pm\sqrt{\frac{1}{R^2}} = \pm\frac{1}{R}$. En portant sur la normale principale un sens convenable on peut prendre le signe $+$, et l'on trouve alors

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}.$$

Ce sont là les trois premières *formules de Frenet.*

Dérivons maintenant les deux formules $\Sigma\alpha''^2 = 1$ et $\Sigma\alpha''\alpha = 0$, on obtient

$$\Sigma\alpha''\frac{d\alpha''}{ds} = 0, \qquad \Sigma\alpha''\frac{d\alpha}{ds} + \Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{ds} = 0.$$

Mais la deuxième s'écrit, d'après les formules de Frenet déjà obtenues,

$$\Sigma\alpha''\frac{\alpha'}{R} + \Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{ds} = \Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{ds} = 0,$$

et l'on en déduit, par des rapports analogues à ceux qui ont déjà été écrits.

$$\frac{\frac{d\alpha''}{ds}}{\alpha'} = \frac{\frac{d\beta''}{ds}}{\beta'} = \frac{\frac{d\gamma''}{ds}}{\gamma'}$$

et par suite

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T},$$

second groupe de *formules de Frenet.*

Quant aux dernières formules on les obtient immédiatement à l'aide des premières en dérivant les relations telles que $\alpha' = \gamma\beta'' - \beta\gamma''$, ce qui donne

$$\frac{d\alpha'}{ds} = \beta''\frac{\gamma'}{R} + \gamma\frac{\beta'}{T} - \beta\frac{\gamma'}{T} - \gamma''\frac{\beta'}{R} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T},$$

d'où les trois dernières *formules de Frenet* :

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}.$$

Nous ne donnerons qu'une seule application de ces formules.

3. Cherchons à *grouper les normales aux divers points d'une courbe gauche de façon qu'elles soient tangentes à une même courbe, appelée développée, ce qui revient à dire qu'elles forment une surface développable*

Il existe alors un point (x', y', z') du plan normal tel que la tangente à la courbe qu'il décrit soit la droite qui le joint au point (x, y, z) de la courbe donnée. On doit donc avoir

$$\frac{dx'}{x' - x} = \frac{dy'}{y' - y} = \frac{dz'}{z' - z}.$$

Mais, en désignant par a, b les coordonnées de ce point par rapport à la normale principale et à la binormale, on a $x' = x + a\alpha' + b\alpha''$ et deux formules analogues. En les différentiant, on doit donc avoir

$$\frac{dx + ad\alpha' + \alpha' da + bd\alpha'' + \alpha'' db}{a\alpha' + b\alpha''} = \frac{dy + ad\beta' + \beta' da + bd\beta'' + \beta'' db}{a\beta' + b\beta''} = \cdots = kds$$

(k ayant une valeur convenable), ou, d'après les formules de Frenet,

$$\alpha + a\left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}\right) + \alpha'\frac{da}{ds} + b\frac{\alpha'}{T} + \alpha''\frac{db}{ds} = k(a\alpha' + b\alpha'')$$

et deux égalités analogues. Ces équations ne peuvent être vérifiées que si les coefficients de α, α', α'' sont nuls, ce qui donne

$$1 = \frac{a}{R}, \qquad \frac{da}{ds} + \frac{b}{T} - ak = 0, \qquad \frac{db}{ds} - \frac{a}{T} - bk = 0.$$

La première s'écrit : $a = R$ et montre que le point (x', y', z') est sur la *droite polaire,* c'est-à-dire sur la parallèle à la binormale qui passe par le centre de courbure. Par élimination de k les deux autres donnent, en tenant compte de $a = R$,

$$\frac{R.db - b.dR}{R^2 + b^2} = \frac{ds}{T}$$

ou, en intégrant,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{R} = \int\frac{ds}{T} + C^{te} = \theta + C,$$

θ étant une fonction convenable de s. Cette formule résout le problème par une quadrature. On peut l'écrire

$$b = R\operatorname{tg}(\theta + C),$$

qui montre que l'angle de la tangente à la développée avec la normale principale est $\theta + C$. On voit que pour les diverses développées il suffira d'augmenter θ d'un angle constant. Donc :

Deux développées se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'un angle constant de toutes les normales autour de leur pied et inversement une telle rotation permet de passer d'une développée à toutes les autres.

§ II. — SURFACES EN GÉNÉRAL.

Lignes de courbure. — 4. — Passons maintenant à l'étude des surfaces et des courbes tracées sur ces surfaces. Prenons une telle surface sous la forme $z = f(x, y)$ et posons, d'après des notations souvent employées [1],

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x . \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Les paramètres directeurs de la normale à la surface au point (x, y, z) sont $-p, -q, 1$ et les cosinus directeurs s'en déduisent par division par $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$. Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface, on a

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0,$$

cette tangente devant se trouver dans le plan tangent.

Etudions la courbure de toutes les courbes passant sur la surface au point considéré et pour cela prenons l'une d'elles et considérons tout le long de cette courbe $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ comme fonctions de l'arc s de la courbe. Différentions la relation ci-dessus par rapport à s. On obtient

$$\alpha . dp + \beta . dq + p . d\alpha + q . d\beta - d\gamma = 0.$$

Appliquons les formules de Frenet en remarquant que

$$dp = r . dx + s . dy = (r\alpha + s\beta) . ds \qquad \text{et que} \qquad dq = s . dx + t . dy = (s\alpha + t\beta) . ds,$$

$$p\alpha' + q\beta' - \gamma' + R(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2) = 0.$$

Mais θ désignant l'angle de la normale à la surface avec la normale principale à la courbe, on a $\cos\theta = \dfrac{\gamma' - p\alpha' - q\beta'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ et par suite la formule ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

En particulier toutes les courbes ayant même plan osculateur au point considéré ont même rayon de courbure. Il suffit donc de se borner à l'étude des sections planes. De plus, pour toutes les courbes ayant même tangente, α, β, γ gardent les mêmes valeurs et l'on a

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos\theta'}{R'} = \ldots = C^{te},$$

ce qui donne le *théorème de Meusnier* que nous ne rappellerons pas davantage. On se ramène ainsi à l'étude des sections normales pour lesquelles $\cos\theta = 1$ et l'on a par suite

$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Si, en particulier, le point (x, y, z) est pris pour origine des coordonnées, le plan tangent en ce point étant le plan $xOy (p = q = 0)$, le second membre devient $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ et l'étude de cette formule est classique et fournit les diverses propriétés de l'*indicatrice d'Euler* sur lesquelles nous n'insisterons pas davantage.

Si $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ s'annule pour des valeurs réelles de $\frac{\beta}{\alpha}$, la direction correspondante donne des courbes admettant le point donné comme point d'inflexion. Rappelons encore que cette formule définit deux directions rectangulaires, pour lesquelles R est maximum ou minimum. Cherchons ces directions dans le cas général. Il suffit de remarquer que la différentielle de $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ est alors nulle et que l'on a par suite

$$r\alpha d\alpha + s(\alpha d\beta + \beta d\alpha) + t\beta d\beta = 0.$$

Mais d'autre part, en différentiant la relation identique,

$$(p\alpha + q\beta)^2 = \gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2,$$

on a

$$\alpha(1 + p^2) d\alpha + pq\beta d\alpha + pq\alpha d\beta + \beta(1 + q^2) d\beta = 0.$$

et, en égalant les deux valeurs de $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ tirées de ces deux relations,

[1] On pose quelquefois pour l'étude des fonctions de deux paramètres x, y (ou u, v, etc..) : $p = z'$, $q = z_{,}$; $r = z''$, $s = z'_{,}$, $t = z_{,,}$, mais ces notations ne sont pas adoptées par tout le monde et il est préférable de renoncer à leur emploi lorsqu'il y a quelque ambiguïté à craindre.

$$\frac{\alpha(1+p^2)+pq\beta}{r\alpha+s\beta}=\frac{pq\alpha+\beta(1+q^2)}{s\alpha+t\beta}=\frac{\alpha^2(1+p^2)+2pq\alpha\beta+\beta^2(1+q^2)}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}=\frac{(p\alpha+q\beta)^2+\alpha^2+\beta^2}{\frac{1}{R}\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Les deux premiers rapports définissent deux valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$ qui donnent les directions des axes de l'indicatrice. Le dernier rapport comparé à l'un des deux premiers donne le rayon de courbure correspondant à la direction considérée [1].

5. — *On appelle lignes de courbure sur une surface donnée des lignes telles qu'en chaque point d'une telle ligne la tangente soit un des axes de l'indicatrice.* Il en passe deux par un point quelconque de la surface et elles sont orthogonales comme on le voit.

L'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface donnée $z=f(x, y)$ s'obtient en remplaçant ci-dessus dans l'équation du second degré en $\frac{\beta}{\alpha}$, α par dx et β par dy. Elle est du second degré en $\frac{dy}{dx}$.

On peut comme nous allons le voir donner une autre définition des lignes de courbure. Cherchons en effet une courbe tracée sur la surface telle que la normale à la surface tout le long de cette courbe reste tangente à une même courbe, ou si l'on veut engendre une surface développable.

La normale au point (x, y, z) considéré a pour équations

$$X-x=-p(Z-z), \qquad Y-y=-q(Z-z).$$

Exprimons que la tangente en un certain point (X, Y, Z) de cette normale est précisément parallèle à cette normale :

$$\frac{d[x-p(Z-z)]}{-p}=\frac{d[y-q(Z-z)]}{-q}=\frac{dZ}{1}$$

ou, en développant et retranchant dZ de chaque rapport,

$$\frac{dx+p.dz-dp(Z-z)}{-p}=\frac{dy+q.dz-dq(Z-z)}{-q}=0.$$

D'où l'on tire deux valeurs différentes de $Z-z$ qui, égalées, donnent

$$\frac{dx+p.dz}{dp}=\frac{dy+q.dz}{dq}.$$

Remplaçons enfin dz par $pdx+qdy$, dp par $rdx+sdy$ et dq par $sdx+tdy$, on en déduit pour l'équation différentielle des lignes considérées :

$$\frac{(1+p^2)dx+pq.dy}{rdx+sdy}=\frac{pq.dx+(1+q^2)dy}{sdx+tdy},$$

qui est précisément l'équation différentielle des lignes de courbure. On voit donc que :

Les normales à une surface tout le long d'une ligne de courbure engendrent une surface développable et que réciproquement cette propriété est caractéristique des lignes de courbure.

6. — Cette seconde définition des lignes de courbure est très importante et nous allons en donner diverses conséquences. Elle permet d'abord d'obtenir des formules souvent employées et dont nous aurons à faire usage : les *formules d'Olinde Rodrigues.*

Soient (x,y,z) un point quelconque d'une surface et a, b, c les cosinus directeurs de la normale en ce point; x, y, z, a, b et c étant fonctions de deux paramètres quelconques qui peuvent d'ailleurs être comme ci-dessus x et y [2]. Un point de la normale à la distance R du pied a pour coordonnées $x+aR$, $y+bR$, $z+cR$ Ecrivons que le déplacement d'un tel point est tangent à la normale, ce qui correspond au cas des lignes de courbure comme nous l'avons vu,

$$\frac{d(x+aR)}{a}=\frac{d(y+bR)}{b}=\frac{d(z+cR)}{c}$$

ou, en développant et retranchant dR de chaque rapport,

$$\frac{dx+Rda}{a}=\frac{dy+Rdb}{b}=\frac{dz+Rdc}{c}=\frac{\Sigma adx+R\Sigma ada}{\Sigma a^2}.$$

---

[1] En un ombilic on a

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

On peut en déduire que si tous les points d'une surface sont des ombilics, cette surface est une sphère.

[2] Nous verrons plus loin comment on peut étudier de façon simple les propriétés des surfaces lorsque les coordonnées d'un point sont données en fonction de deux paramètres variables u et v.

Le dénominateur du dernier rapport est égal à 1 et le numérateur est nul car $\Sigma a.dx = 0$ exprime que le point (x, y, z) se déplace dans le plan tangent à la surface, et $\Sigma a.da = 0$ se vérifie en dérivant $\Sigma a^2 = 1$. Donc tous les numérateurs sont nuls :

$$dx + \mathrm{R}da = 0, \qquad dy + \mathrm{R}db = 0, \qquad dz + \mathrm{R}dc = 0.$$

Ce sont là les formules que nous voulions établir. On peut encore les écrire

$$\frac{dx}{da} = \frac{dy}{db} = \frac{dz}{dc}.$$

C'est l'équation différentielle des lignes de courbure. La valeur commune de ces rapports, $-\mathrm{R}$, donne le rayon de courbure correspondant en chaque point. Le raisonnement qui précède exclut d'ailleurs le cas où $d\mathrm{R} = 0$, c'est-à-dire où R est constant, cas que nous retrouverons plus loin.

7. — Nous avons vu que si les normales à une courbe forment une surface développable, en faisant tourner chacune d'elles dans son plan normal autour de son pied d'un angle constant, ces normales forment encore une surface développable. On peut en déduire les deux théorèmes qui suivent, connus sous le nom de théorèmes de Joachimstal [1] :

Si deux surfaces ont une ligne de courbure commune, elles se coupent tout le long de cette ligne suivant un angle constant.

Réciproquement, *si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et que leur intersection soit ligne de courbure de l'une d'elles, c'est également une ligne de courbure de l'autre.*

La démonstration de ces théorèmes est immédiate d'après ce qui précède. En particulier si l'on remarque que toute courbe tracée sur un plan ou sur une sphère est ligne de courbure pour ce plan ou cette sphère, ce qui se vérifie aisément, on voit que :

Si une ligne de courbure d'une surface est plane (ou sphérique) le plan (ou la sphère) qui la contient coupe la surface sous un angle constant. — Si un plan (ou une sphère) coupe une surface sous un angle constant, cette intersection est ligne de courbure de la surface considérée.

8. — Supposons maintenant que l'on considère trois familles de surfaces telles que, en chaque point de l'espace, les surfaces des trois familles qui y passent soient deux à deux orthogonales, c'est-à-dire que le trièdre des trois plans tangents soit trirectangle. On dit que ces surfaces forment un *système triple orthogonal*. Il est facile de constater sur des cas particuliers que de tels systèmes existent. Nous en donnerons d'ailleurs plus loin des exemples.

Ces surfaces jouissent d'une propriété importante connue sous le nom de théorème de Dupin et que nous ne démontrerons pas. Voici cette propriété :

Les courbes d'intersection de deux surfaces d'un système triple orthogonal sont des lignes de courbure pour les deux surfaces.

Il est d'ailleurs facile de voir que inversement toute ligne de courbure d'une surface peut être obtenue de cette façon. Si l'on remarque que la transformation par rayons vecteurs réciproques transforme un système triple orthogonal en un autre système analogue, on arrive au théorème très important qui suit :

La propriété d'une ligne d'être ligne de courbure d'une surface donnée se conserve par inversion.

(*A suivre.*)

ALGÈBRE

1760. — *Soit l'équation*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \cdots + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Démontrer que la valeur limite de θ *pour* $h = 0$ *est racine de l'équation* $(1-\theta)^{n-p} = \dfrac{p}{n}$.

Examiner le cas où $p = n$.

Si nous appliquons la formule des accroissements finis à $f^{(n)}(x+\theta h)$, nous pouvons écrire ainsi

(1) Pour ces théorèmes et la plupart de ceux qui suivent nous donnerons des applications à la fin de cette Note dans l'étude de certaines surfaces particulières.

la formule donnée

$$(1)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}[f^{(n)}(x) + \theta h f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)], \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Ceci revient à admettre que $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ inclus; dans ces conditions, la formule de Taylor habituelle, appliquée à $f(x+h)$, donne

$$(2)\qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta_2 h), \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne de suite

$$\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}[f^{(n)}(x) + \theta h f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)] = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta_2 h),$$

ou, en simplifiant,

$$(1-\theta)^{n-p}[f^{(n)}(x) + \theta h f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)] = \frac{p}{n} f^{(n)}(x+\theta_2 h).$$

Si maintenant h tend vers 0 et que l'on suppose $f^{(n)}(x)$ et $f^{(n+1)}(x)$ continues, on voit, en divisant les deux membres de l'équation finale par $f^{(n)}(x)$, que θ est racine de l'équation $(1-\theta)^{n-p} = \frac{p}{n}$.

Si $p = n$ l'équation proposée n'est autre que la formule de Taylor prise avec le reste de Lagrange.

Dans ce cas, l'équation (1) devient

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x) + \theta h f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)].$$

D'autre part, en prenant un terme de plus dans le développement de $f(x+h)$, on a aussi

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta_2 h), \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

La comparaison de ces deux égalités donne immédiatement

$$\theta f^{(n+1)}(x+\theta_1 h) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta_2 h).$$

Si maintenant h tend vers 0 et que l'on suppose $f^{(n+1)}(x)$ continue, on voit que θ tend vers $\frac{1}{n+1}$, en général.

André DARMON.

Bonnes solutions : MM. Louis Sire, à Lyon ; M. Jacquemetton, lycée de Douai ; Amblard, à Ruines ; J. Bing, soldat à Toul ; J. Fitte, à Azille.

1766. — *On donne la fonction* $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Déterminer $\frac{d^n y}{dx^n}$ *et se servir de la formule obtenue pour démontrer l'égalité*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

La formule

$$\frac{d^n\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

est due à Halphen *qui l'a publiée, en* 1880, *dans le Bulletin de la Société mathématique de France, tome* VIII, *page* 62.

Elle peut s'établir très rapidement par le procédé suivant.

On a d'abord $\frac{de^{\frac{1}{x}}}{dx} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, qui montre que la formule est vraie pour $n = 1$. On a ensuite

$$\frac{d^2\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^2} = x\,\frac{d^2e^{\frac{1}{x}}}{dx^2} + 2\,\frac{de^{\frac{1}{x}}}{dx}; \qquad \text{or} \qquad \frac{d^2e^{\frac{1}{x}}}{dx^2} = \frac{2xe^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{x^4},$$

et, par suite,

$$\frac{d^2\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3},$$

ce qui montre encore que la formule est vraie pour $n = 2$.

Admettons alors qu'elle soit vraie pour $n - 1$ et démontrons-la pour n. Nous pouvons poser $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}} = x.\,x^{n-2}e^{\frac{1}{x}} = xu$, puis appliquer la formule de Leibnitz, qui nous donne de suite

$$\frac{d^n(xu)}{dx^n} = x\,\frac{d^nu}{dx^n} + n\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}};$$

mais $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}$, et $\frac{d^nu}{dx^n} = (-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}} + (-1)^n\frac{ne^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

Il reste alors

$$\frac{d^n(xu)}{dx^n} = (-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}},$$

et la formule est généralisée.

Quant au calcul de $\frac{d^ny}{dx^n}$, il est classique et peut se faire de la façon suivante : Posons d'abord

$$y = e^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{nous aurons} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},$$

ou

$$x^2y' + y = 0;$$

en dérivant cette équation par rapport à x, nous aurons ensuite $x^2y'' + (2x+1)y' = 0$,

$$y'' = \frac{2x+1}{x^4}\,y;$$

en dérivant une fois de plus, nous aurons de même

$$x^2y''' + (4x+1)y'' + 2y' = 0,$$

et, en remplaçant y'' et y' par leurs valeurs,

$$y''' = -\frac{1+6x+6x^2}{x^6}\,y.$$

Nous sommes donc conduit à poser

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^nP_n.y}{x^{2n}},$$

P_n étant un polynome entier en x de degré $n-1$ et dont le terme constant est égal à 1.

Si nous dérivons cette égalité par rapport à x, nous obtenons

$$y^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}[(2nx+1)P_n - x^2P'_n]}{x^{2n+2}},$$

et nous voyons que la forme est générale, puisque $P_{n+1} = (2nx+1)P_n - x^2P'_n$ est bien un polynome entier de degré n ayant 1 pour terme constant.

Il serait facile aussi de déduire de là le coefficient du terme de degré le plus élevé et de montrer que, dans P_n, il est égal à $n!$

Revenons alors à l'identité

$$x^2y' + y = 0$$

et dérivons-la n fois, en appliquant la formule de Leibnitz ; nous aurons

$$x^2y^{(n+1)} + (2nx + 1)y^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0.$$

Or
$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{P_{n-1}y}{x^{2n-2}}, \qquad y^{(n)} = (-1)^n\frac{P_ny}{x^{2n}},$$

et
$$y^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\frac{P_{n+1}y}{x^{2n+2}};$$

la formule précédente devient donc

$$P_{n+1} - (2nx + 1)P_n + n(n-1)x^2P_{n-1} = 0;$$

elle fournit une relation de récurrence entre trois polynomes P_n consécutifs, et permettrait par conséquent de calculer ceux-ci de proche en proche. Mais il est plus simple de calculer P_n en formant une relation entre P_n et ses deux premières dérivées.

Composons à cet effet les deux valeurs de P_{n+1} que nous avons trouvées antérieurement ; nous voyons que $n(n-1)P_{n-1} = P'_n$; de même $n(n+1)P_n = P'_{n+1}$.

D'autre part

$$P_{n+1} = (2nx + 1)P_n - x^2P'_n,$$

et, en dérivant,

$$P'_{n+1} = 2nP_n + [2(n-1)x + 1]P'_n - x^2P''_n.$$

En égalant ces deux valeurs de P'_{n+1}, nous obtenons l'équation différentielle linéaire du second ordre qui donne le polynome P_n :

$$x^2P''_n - [2(n-1)x + 1]P'_n + n(n-1)P_n = 0.$$

Il suffit alors de poser

$$P_n = 1 + a_1x + \cdots + a_px^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$$

d'effectuer les calculs indiqués et d'annuler le coefficient de chaque puissance de x, pour obtenir tous les coefficients du polynome P_n. Nous trouvons ainsi successivement

$$a_1 = n(n-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{p+1} = \frac{(n-p)(n-p-1)}{p+1}a_p,$$

et, en multipliant toutes ces égalités membre à membre,

$$a_{p+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{(p+1)!}(n-1)(n-2)\ldots(n-p-1);$$

le polynome P_n est donc

$$P_n = 1 + n(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2 + \cdots + n!\,x^{n-1}.$$

On démontre aisément, à l'aide du théorème de Rolle, en partant de y', que toutes les racines de P_n sont réelles, distinctes et négatives.

Pour établir maintenant la formule d'Halphen, il suffit de dériver n fois le produit $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$, en appliquant la formule de Leibnitz. On trouve ainsi

$$x^{n-1}y^{(n)} + n(n-1)x^{n-2}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^{n-3}y^{(n-2)} + \cdots,$$

ou
$$\frac{(-1)^ne^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\left[P_n - n(n-1)xP_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2P_{n-2}\cdots\right],$$

et il n'y a plus qu'à vérifier que le crochet se réduit à 1.

Cela peut se faire directement en calculant les divers coefficients de x, ou, plus simplement, en montrant que la dérivée de la quantité entre crochets est nulle. Cette dérivée est

$$P'_n - n(n-1)P_{n-1} - n(n-1)x[P'_{n-1} - (n-1)(n-2)P_{n-2}]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)(n-2)x^2[P'_{n-2} - (n-2)(n-3)P_{n-3}]\cdots,$$

et l'on voit de suite, en s'appuyant sur l'identité $P'_n = n(n-1)P_{n-1}$, établie antérieurement, que cette quantité est identiquement nulle.

AMBLARD, conducteur des Ponts-et-Chaussées à Ruines.

N. B. — M. J. SADIER (La Seyne) a envoyé une solution de la première partie, dans laquelle il montre que

$$x^{n+1}\frac{d^n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)}{dx^n}$$

est indépendant de n.

Il se sert du théorème actuel pour intégrer l'équation différentielle

$$x^{n+1}\frac{d^n(x^{n-1}y)}{dx^n} = (-1)^n y.$$

C'est une équation linéaire dont n solutions particulières sont presque évidentes maintenant :

$$e^{\frac{1}{x}},\quad e^{\frac{\alpha_1}{x}},\quad e^{\frac{\alpha_2}{x}},\ldots,\quad e^{\frac{\alpha_{n-1}}{x}}$$

$1, \alpha_1, \alpha_n, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant les racines de $x^n = 1$.

Bonnes solutions : MM. Rieumajou, à Sétif ; A. Courtois, à Douai ; R. Bouvaist ; H. Niox-Chateau, à Limoges.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1761. — *On considère une strophoïde* (S).

1° *Démontrer que les cercles bitangents à cette courbe se partagent en deux familles et que les cordes des contacts passent par deux points fixes.*

2° *Les points de contact de deux cercles d'une même famille sont sur un même cercle ;*

3° *A tout cercle de l'une des familles correspond un cercle et un seul de l'autre qui lui est tangent en un point de* (S).

4° *Montrer que les tangentes en deux autres points de contact se coupent sur* (S) *et que la droite qui les unit enveloppe une parabole.*

5° *La droite qui joint le point double* (S) *au troisième point de rencontre de* (S) *avec la corde des contacts est perpendiculaire à cette droite.*

Prenons la strophoïde sous forme paramétrique $x = \dfrac{at}{(1+t^2)(t-m)}$, $y = \dfrac{at^2}{(1+t^2)(t-m)}$.

Les t des points de rencontre d'une courbe de degré p avec la strophoïde sont liés par la relation

$$t_1t_2\cdots t_{3p} = m^p.$$

En effet, soit la courbe $\varphi_p(x, y) + \varphi_{p-1}(x, y) + \cdots + A = 0$. L'équation aux t des points de rencontre est

$$a^p\varphi_p(1, t)t^p + \cdots + a^{p-k}\varphi_{p-k}(1, t)t^{p-k}(1+t^2)^k(t-m)^k + \cdots + A(1+t^2)^p(t-m)^p = 0.$$

Le degré du terme de rang $k+1$ est $2p+k$; le degré croît avec le rang, donc le terme de plus haut degré est At^{3p}. Le terme constant est $A(-m)^p$; donc $t_1t_2\cdots t_{3p} = (-1)^{3p}(-m)^p = m^p$. Dans le cas de la droite, $t_1t_2t_3 = m$.

Un cercle coupe la strophoïde en I et J de paramètres i et $-i$; entre les t des quatre autres points, on a $t_1t_2t_3t_4 = m^2$.

1° Soient t_1, t_2 les points de contact d'un cercle bitangent à S : $t_1^2t_2^2 = m^2$.

Il y a deux familles de cercles bitangents qui correspondent à $t_1t_2 = m$, $t'_1t'_2 = -m$.

Les cordes de contact rencontrent S en deux autres points t_3, t'_3, tels que

$$t_1t_2t_3 = m, \qquad t'_1t'_2t'_3 = m\,; \qquad \text{donc} \qquad t_3 = 1, \qquad t'_3 = -1.$$

Mais $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t^4 - t^2 + 2mt}{2t^3 - mt^2 + m}$; pour $t = \pm 1$, $\dfrac{dy}{dx} = m$.

Les cordes de contact passent par deux points fixes, points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote.

2° Soient (t_1, t_2) (t_3, t_4) les points de contact de deux cercles d'une même famille, ces quatre points sont sur un même cercle, puisque $t_1 t_2 = t_3 t_4 = \pm m$ et $t_1 t_2 t_3 t_4 = m^2$.

3° et 4° Par le point t passe un cercle de chaque famille, soient t_1, t'_1 les deux autres points de contact :

$$t t_1 = m, \qquad t t'_1 = -m\,; \qquad \text{donc} \qquad t_1 = -t'_1.$$

Les tangentes en t_1, t'_1 se coupent en un point θ de S, puisque $t_1^2 \theta = m$, $t'^2_1 \theta = m$.

Nous avons $t_1 = \dfrac{m}{t}$, $t'_1 = -\dfrac{m}{t}$, par suite les coordonnées homogènes des points t_1 et t'_1 sont :

$$x_1 = at^2, \qquad y_1 = amt, \qquad z_1 = (t^2 + m^2)(1 - t),$$
$$x'_1 = at^2, \qquad y'_1 = -amt, \qquad z'_1 = (t^2 + m^2)(1 + t).$$

Un point de la droite qui joint ces deux points a pour coordonnées

$$x = at^2(1 + \lambda), \qquad y = amt(1 - \lambda), \qquad z = (t^2 + m^2)[1 + \lambda - t(1 - \lambda)]\,;$$

l'équation de cette droite est $\quad yt^4 + m(my - x + a)t^2 - m^3 x = 0$.

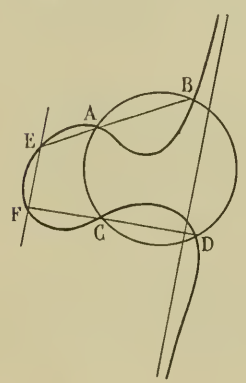
Son enveloppe est la parabole $\quad (x + my)^2 - 2a(x - my) + a^2 = 0$.

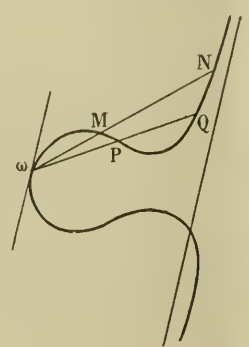
5° La droite $t_1 t'_1$ rencontre S en un point θ : $t_1 t'_1 \theta = m$ et $\theta = \dfrac{-t^2}{m}$.

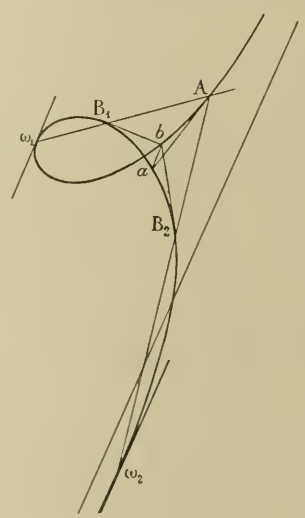
θ est la pente de la droite joignant le point double au point θ, cette droite est donc perpendiculaire à la droite $t_1 t'_1$ dont la pente est $\dfrac{m}{t^2}$.

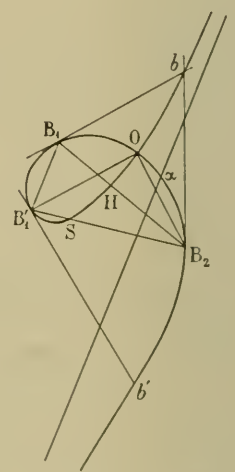
Solution géométrique. — Les cordes AB, CD communes à un cercle et à une cubique circulaire rencontrent la cubique en deux autres points E, F situés sur une parallèle à l'asymptote.

Pour un cercle bitangent les deux cordes sont confondues et E, F sont confondus avec le point de contact d'une tangente parallèle à l'asymptote. Réciproquement, si ω est un tel point, deux sécantes issues de ω rencontrent la cubique en quatre points M, N, P, Q, situés sur un même cercle; par suite, il y a un cercle bitangent à la cubique en P et Q.









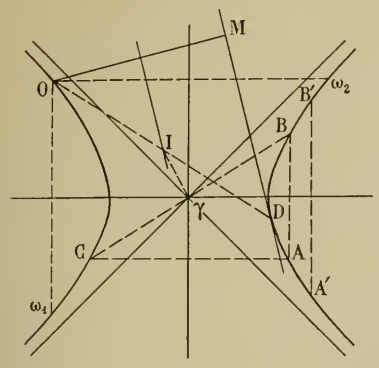
Pour la strophoïde il y a deux tangentes parallèles à l'asymptote, soient ω_1, ω_2 leurs points de contact. Il y a deux familles de cercles bitangents. Les cordes de contact passent par ω_1 ou par ω_2.

En un point A de (S) sont tangents un cercle de la première famille et un cercle de la seconde. Les tangentes aux deux autres points de contact B_1, B_2 se coupent sur (S). En effet, les tangentes en ω_1, B_1, A rencontrent (S) en trois autres points qui sont en ligne droite; par suite, la tangente en B_1 rencontre (S) au point b situé sur la parallèle à l'asymptote menée par a; de même la tangente en B_2 passe en b.

Soit B'_1 le point situé sur la parallèle à l'asymptote menée par B_1, les trois points b, b', α sont en ligne droite, la tangente en S rencontre donc la strophoïde en α, S est le sommet et par suite les deux rayons OB'_1, OB_2 sont rectangulaires. Le cercle passant par O, B_2 et H est tangent à OB'_1, OB_2 est donc un diamètre et OH est perpendiculaire à B_1B_2.

L'enveloppe de la droite B_1B_2 est donc l'antipodaire de (S), c'est-à-dire une parabole.

Solution par l'inversion. — Prenons pour pôle d'inversion le point double, (S) se transforme en une hyperbole équilatère (H), les cercles bitangents en cercles bitangents.



1° Il y a deux familles de cercles bitangents, les centres se trouvent sur les deux axes. Les cercles (OAB) ont un point fixe ω_1, les cercles (OAC) un point fixe ω_2.

2° Les points de contact A, B, A', B' de deux cercles d'une même famille sont sur un même cercle.

3° En A sont tangents un cercle de chaque famille, les cercles passant par O et rencontrant (H) en B et C se coupent sur (H) ; en effet, les deuxièmes cordes communes aux cercles et à (H) sont en direction symétriques des tangentes en B et C par rapport aux axes, les tangentes en B et C étant parallèles, les deuxièmes cordes sont confondues.

4° et 5° Le cercle (OBC) rencontre (H) en un quatrième point D.

Soit I le milieu de OD, γI, diamètre conjugué de la direction OD, est perpendiculaire à BC, symétrique de cette direction par rapport aux axes, I est donc le centre du cercle ; en D le cercle et le rayon OD sont rectangulaires.

Le point caractéristique du cercle est le pied M de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en D, puisque les tangentes en I et D sont parallèles.

L'enveloppe du cercle est donc la podaire de (H) par rapport à O, par inversion cette podaire se transforme dans l'antipodaire de (S).

J. PIGLOWSKI, lycée Louis-le-Grand.

Solution analogue de M. A. Momal, 1er régiment d'infanterie à Cambrai.

Bonnes solutions géométriques analogues à l'une des deux précédentes : MM. Louis Sire, à Lyon ; Bouligand, à Nantes ; R. Bouvaist ; P. Névejans, à Douai.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1789. — Ombres, au flambeau, d'une demi-sphère creuse. — *Une sphère de centre o, o' et de rayon* R, *est coupée par son plan méridien de front ; on ne laisse subsister que la demi-sphère située du côté du plan vertical de projection.*

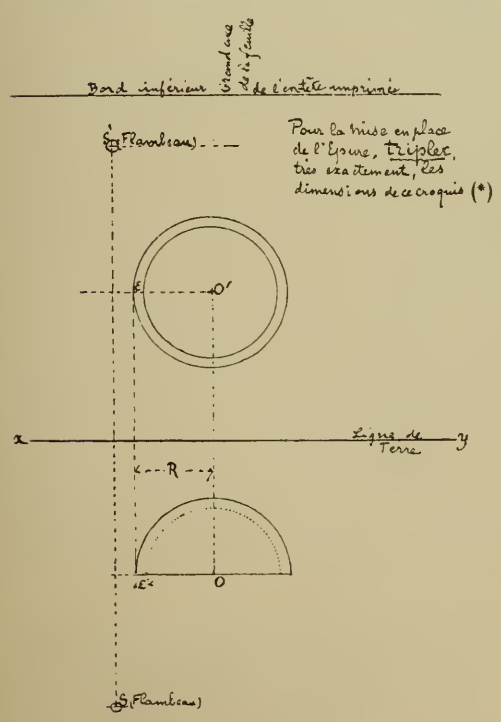
On creuse cette dernière suivant une autre demi-sphère concentrique à la première et d'un rayon tel que l'épaisseur du solide creux ainsi constitué soit ε *(voir croquis).*

On éclaire ce solide par un flambeau s, s' et on demande :

1° *de déterminer, par ses deux projections, la séparatrice extérieure d'ombre propre du solide ;*

2° *de tracer les ombres portées par ce solide sur les deux plans de projection dont xy est la ligne de terre ;*

3° *de déterminer, par ses deux projections, l'ombre portée dans la partie creuse du solide par sa méridienne de front.*



Nota. — a) *Les lignes existantes (Limites du solide et contours apparents, ombres propres, ombres portées) seront figurées en trait noir* plein *pour les lignes vues,* ponctué *pour les lignes cachées.*

b) *Les parties dans l'ombre seront recouvertes de hachures bleues, fines et pas trop serrées, mais seulement si elles sont vues.*

c) *Les lignes de construction seront tracées en rouge ;*

d) *Les plans des courbes planes seront mis le mieux possible en évidence et on déterminera les éléments caractéristiques des ellipses (axes, diamètres conjugués, etc.).*

(*) Le croquis remis au candidat est reproduit ici à l'échelle $\frac{2}{3}$.

f) *On déterminera les tangentes aux points les plus importants et, particulièrement, aux points où les lignes d'ombre portées rencontreront la ligne de terre xy.*

(*Pour la facilité des constructions on se servira utilement du plan de front et du plan horizontal qui passeraient par le centre de la sphère.*)

(*Ecole Polytechnique, concours de 1909.*)

La séparatrice d'ombre propre est la courbe de contact du cône circonscrit à la sphère par le point S. C'est donc un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à OS et dont les projections sont deux ellipses. Nous obtiendrons l'ellipse projection horizontale en rabattant le plan vertical SO sur le plan horizontal du centre de la sphère ; la polaire du point s_1 donne le diamètre du petit cercle de contact et par suite la longueur du grand axe de l'ellipse, et sa projection sur *os* fait connaître le petit axe dont le milieu est centre de l'ellipse. Il suffit donc par ce point de mener une perpendiculaire à *os*, sur laquelle on portera de part et d'autre le demi-grand axe pour déterminer l'ellipse. Elle touche le contour apparent de la sphère aux points *a* situés sur l'horizontale *ax* de son plan qui a même cote que le centre de la sphère. Nous ne devrons conserver que l'arc *abc* situé sur l'hémisphère considéré.

Une construction identique fait connaître l'ellipse projection verticale de l'ombre propre, en rabattant le plan de bout *o's'* sur le plan de front du centre de la sphère.

On a la tangente au point où l'ellipse traverse le diamètre qui limite l'hémisphère en projection horizontale en prenant l'intersection du plan tangent à la sphère en ce point avec le plan de la courbe, et pour cela il suffit de mener l'horizontale du plan tangent qui a la cote du centre de la sphère, et qui en ce point est une ligne de bout, puis de joindre le point 0 où elle coupe l'horizontale de même cote du plan de contact au point considéré. On a le point où la tangente est parallèle à *xy* en projetant horizontalement le sommet *d'* du petit axe de la projection verticale, puisqu'en ce point la tangente est de front.

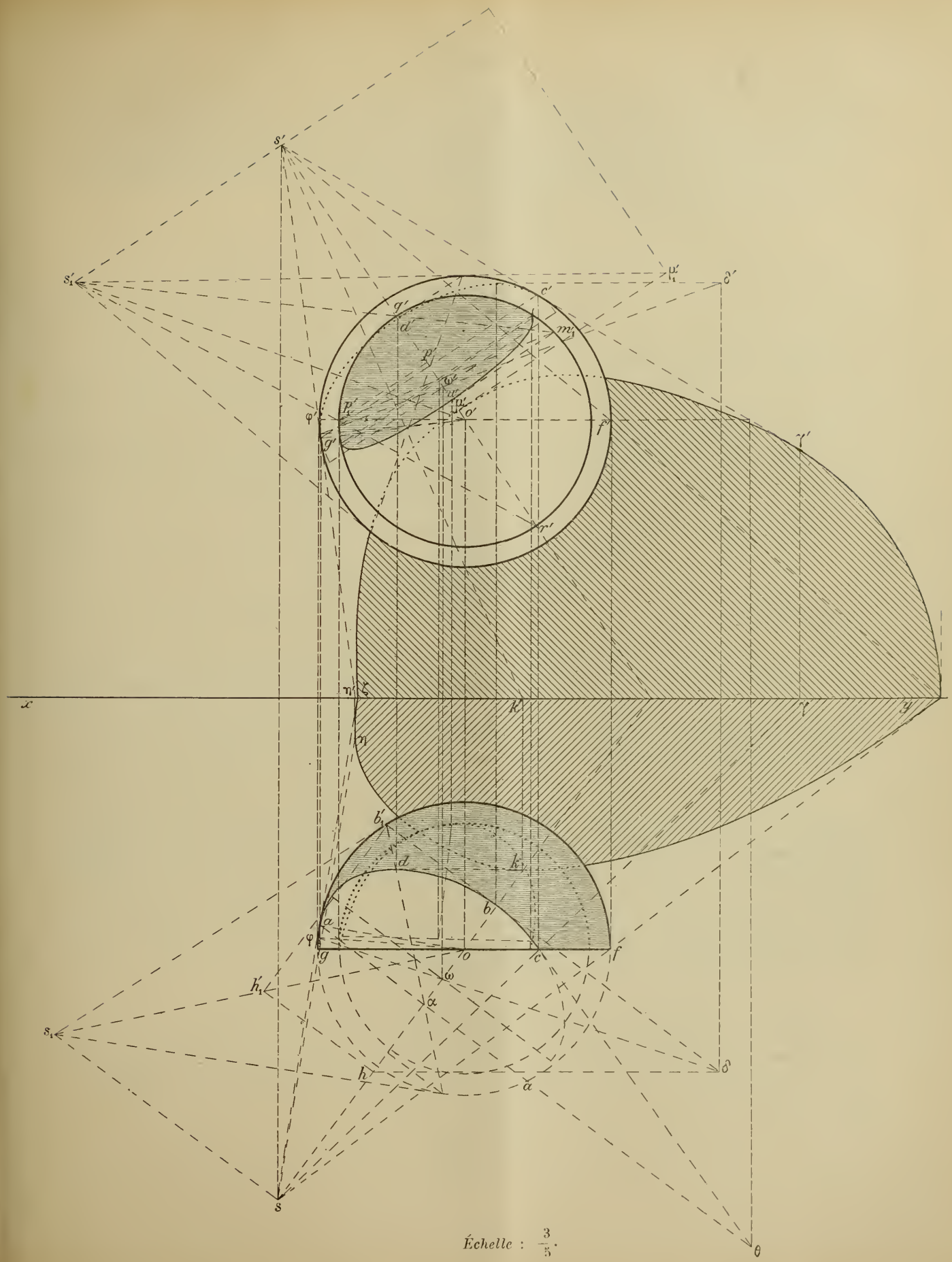
II. *Ombre portée sur les plans de projection.* — C'est le lieu géométrique des traces des droites issues du point S et s'appuyant d'une part sur le grand cercle de front qui limite l'hémisphère, mais seulement dans sa partie qui n'est pas intérieure à la portion éclairée de la surface hémisphérique, c'est-à-dire sur l'arc *c'f'g'* et d'autre part sur l'arc de courbe d'ombre propre *g'd'c'*. Il faut donc considérer successivement les deux cônes de même sommet S et ayant pour bases le cercle de front de la sphère et la courbe d'ombre propre. Ces cônes ont en commun les deux génératrices qui passent aux points où la courbe d'ombre propre traverse le grand cercle de front de la sphère, et dont les traces seront des points où se raccorderont les courbes d'ombre portée par chacun des cônes puisque tout le long de ces génératrices le plan tangent à ces cônes est le plan tangent à la sphère. La génératrice SC, traversant le plan vertical avant d'atteindre le plan horizontal, nous donne le point γ' où l'arc de cercle, trace verticale du premier cône, se raccorde à l'ellipse, trace du second cône, tandis que la génératrice SG nous donne pour une raison analogue le point η où se raccordent les deux ellipses d'ombre portée sur le plan horizontal. La tangente au premier point est la génératrice $s'c'\gamma'$ elle-même, et au second point η la tangente est de bout.

Points remarquables. — Cherchons les points où *xy* coupe les courbes d'ombre portée. L'un est au pied de la génératrice SF qui passe au point (*f*, *f'*) dont la cote et l'éloignement sont respectivement la moitié de la cote et de l'éloignement du point S, les tangentes en ce point étant la génératrice *sf* le long de laquelle le plan tangent au cône est vertical, et la perpendiculaire à *xy*.

L'autre est la perspective du point où l'intersection du plan S*xy* avec le plan de la courbe de contact traverse la courbe d'ombre propre. Or cette intersection passe par le centre du petit cercle, puisque l'axe du cône est ici dans le plan S*xy* – il suffit donc d'en déterminer un second point au moyen de deux horizontales de même cote $b\delta$ et $h\delta$, puis, ayant ce diamètre, de prendre la trace de la génératrice qui passe par l'extrémité φ située sur la portion utile de la courbe d'ombre. Nous avons ainsi obtenu le point ζ. Les tangentes en ce point aux deux arcs qui s'y rejoignent sont les traces du plan tangent à la sphère au point dont il est la perspective, et par suite sont respectivement perpendiculaires à la projection de même nom du rayon qui y aboutit.

On a facilement le sommet de l'ellipse d'ombre portée sur le plan vertical au moyen du rabattement déjà fait du plan de bout *s'o'* sur le plan de front du centre de la sphère, soit μ'. Nous avons construit ainsi le point *h* de l'ombre portée sur le plan horizontal où la tangente est parallèle à *xy*, et qui est la perspective du point le plus bas du grand cercle vertical qui limite l'hémisphère.

III. *Ombre portée dans la sphère creuse.*— C'est la seconde courbe d'intersection de cette sphère avec le cône de sommet S et qui a pour base le grand cercle de front de cette sphère. Nous savons que le plan de cette courbe, qui est une seconde section circulaire du cône, est perpendiculaire comme le plan de la première au plan de bout *s'o'* ; il est donc déterminé par la corde $m'_1p'_1$ qui joint les deux seconds points d'intersection des généra-



Échelle : $\frac{3}{5}$.

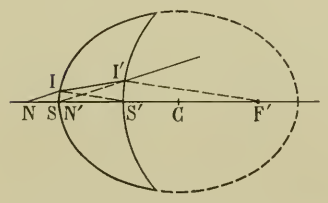
trices $s'q'$ et $s'r'$ de ce cône avec le grand cercle de bout de la petite sphère. Nous sommes donc ramenés à projeter le petit cercle de la sphère dont nous connaissons le plan et le diamètre. Nous connaissons d'ailleurs sur la projection verticale les deux axes de l'ellipse à construire, et leurs projections horizontales donnent deux diamètres conjugués de la projection horizontale qui se trouve ainsi déterminée. La distinction des parties vues et cachées sur chaque projection n'offre aucune difficulté.

Bonne solution : M. G. Lach, à Denain. Assez bonne solution : M. M. Hugon, à St-Flour.

PHYSIQUE

1762. — *Un ellipsoïde en verre, de révolution autour de son grand axe, a pour indice* $n = \frac{3}{2}$, *pour grand axe* $2a$ *et pour excentricité* $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. *On le coupe par une sphère ayant son centre à l'un des foyers et dont le rayon égale* $\frac{10}{9}a$. *On forme ainsi une lentille ménisque. Déterminer les points nodaux et les foyers principaux de cette lentille ; comparer les distances calculées à l'épaisseur e de la lentille. Quel serait le diamètre de l'image d'un astre dont le diamètre apparent serait* $\frac{1}{100}$ *de radiant ?*

Soit S le sommet de la face ellipsoïdale, S′ le sommet de la face sphérique, F′ le foyer de l'ellipsoïde, centre de la face S′.



Déterminons l'épaisseur de la lentille :

$$e = F'S - F'S' = a + c - \frac{10}{9}a = a + \frac{2}{3}a - \frac{10}{9}a,$$

$$e = \frac{5}{9}a.$$

Le rayon de courbure de la première face, d'après une formule connue, a pour valeur absolue $\frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{5}{9}a$. Le centre de courbure est donc précisément en S′ et si l'on compte les segments positivement de droite à gauche, les deux rayons de courbure sont

$$r = -e, \qquad r' = -2e.$$

Cherchons maintenant les foyers. C'est une propriété connue que l'ellipsoïde d'excentricité $\frac{1}{n}$ est aplanétique pour un point à l'infini, et les rayons réfractés convergent au foyer F′. On pourrait d'ailleurs appliquer la formule des dioptres à la première face et l'on trouverait son foyer optique en F′. Ce point, étant précisément le centre de courbure de la seconde face, sera aussi le second foyer optique de la lentille. Il est évident aussi que le plan principal correspondant est sur la première face. Le point S coïncide donc avec le second point nodal N′ et la seconde distance focale est représentée par SF′. Les distances focales étant égales et de signes contraires, on a

$$f = 3e, \qquad f' = -3e.$$

Pour achever de déterminer les éléments principaux de la lentille, il reste à mettre en place soit le premier foyer soit le premier point nodal. Par exemple, considérons deux rayons de courbure parallèles et voisins de l'axe, S′I et F′I′ ; on a S′I′ = 2 SI. Le rayon qui traverse la lentille dans la direction II′ suit à l'émergence la direction SI′, à l'incidence la direction parallèle NI, N étant le premier point nodal. Or on a

$$SN = \frac{1}{2}e.$$

L'interstice de la lentille est donc la moitié de son épaisseur. Le premier foyer est à une distance $3e$ en avant de N.

La distance des points de Bravais au point N est donnée par l'équation

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{2}e} = \frac{1}{3e},$$

qui admet comme racines $+e$ et $-\frac{3}{2}e$. La seconde correspond au point S'; il était évident *a priori* que ce point S' coïncidait avec sa propre image.

Puisque le point S est le point nodal d'émergence, le diamètre de l'image de l'astre sera $\frac{1}{100}$ SF', soit $\frac{1}{100} \times \frac{5}{3} a = \frac{1}{60} a$.

Remarque. — Si on argentait la face S', le système serait équivalent à un miroir plan situé en S'.

(Solution en partie exacte : M. Névejans, à Douai.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1834. — Soient A le pied d'une normale à une hyperbole équilatère, M et N les points où elle rencontre l'axe transverse et l'axe non transverse et Q le milieu du segment qu'elle intercepte dans l'hyperbole. Dans le sens AM et à partir du point M on prend MP = QN. Lieu du point P.

Louis Sire.

1835. — On considère une surface (Σ), un point variable A sur cette surface et une sphère (S). Soient Δ la normale au point A à la surface (Σ), Δ' sa conjuguée par rapport à la sphère et A' l'inverse de A par rapport à cette sphère.

Trouver l'enveloppe du plan déterminé par Δ' et par le point A'. Louis Sire.

1836. — Si deux quadriques qui ont deux génératrices communes de systèmes différents se coupent à angle droit en tous les points de l'une de ces génératrices, elles se coupent à angle droit en tous les points de l'autre.

A. Durand.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1768. — 1° *On considère la fonction*

$$y = f(x) = \frac{e^x - x}{xe^x}.$$

Calculer la dérivée n^e de cette fonction, donner sa valeur pour $x = 1$ et donner aussi le développement de $f(1 + x)$ en série.

2° *Etudier les variations de la fonction y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.*

3° *Montrer que de 0 à $+\infty$, l'équation $y = f(x)$ définit une fonction de y, $x = g(y)$, continue et décroissante. Trouver la dérivée et la fonction primitive de cette fonction et les exprimer à l'aide de y et de $g(y)$.*

4° *Même question pour l'intégrale*

$$J = \int \overline{g(y)}^2 dy.$$

1° La fonction $y = f(x) = \dfrac{e^x - x}{xe^x}$ peut s'écrire $y = x^{-1} - e^{-x}$;

ses diverses dérivées sont alors

$$y' = -x^{-2} + e^{-x};$$
$$y'' = 1.2x^{-3} - e^{-x};$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = (-1)^n [n!x^{-n-1} - e^{-x}].$$

La valeur de cette dernière pour $x = 1$ est

$$(-1)^n \left(n! - \frac{1}{e}\right).$$

Le développement en série, à partir de la valeur 1, est justement la série qui représente $f(1+x)$; c'est

$$f(1) + \frac{x}{1} f'(1) + \frac{x^2}{1.2} f''(1) + \cdots + \frac{x^n}{n!} (f^{(n)}(1) + \cdots,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) - x\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(2! - \frac{1}{e}\right) - \cdots + (1)^n \frac{x^n}{n!}\left(n! - \frac{1}{e}\right) + \cdots.$$

Cette série se décompose en deux :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

et

$$-\frac{1}{e}\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots\right);$$

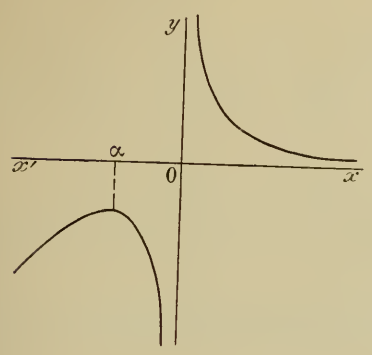
La première est le développement de $\dfrac{1}{1+x}$; elle est valable dans l'intervalle $(-1, +1)$. La seconde est le développement de $\dfrac{1}{e^{1+x}} = \dfrac{e^{-x}}{e}$; elle est valable dans tout intervalle. La série formée par les deux réunies est donc valable seulement dans l'intervalle $(-1, +1)$, ainsi qu'il serait facile de le voir directement, en appliquant la règle $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2° La fonction y a pour dérivée

$$y' = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x};$$

elle ne change de signe que pour les valeurs qui annulent le numérateur. Posons $z = x^2 - e^x$; nous aurons $z' = 2x - e^x$ et $z'' = 2 - e^x$. La dérivée z'' s'annule pour $x = \mathrm{L}2$; elle est positive avant et négative après. La fonction z' est donc croissante depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \mathrm{L}2$, puis décroissante ensuite. Pour $x = \mathrm{L}2$, $z' = 2(\mathrm{L}2) - 2 = 2(\mathrm{L}2 - 1)$, quantité sûrement négative, puisque $\mathrm{L}2$ est plus petit que 1. Le maximum de z' étant négatif, cette quantité est sûrement négative quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, par suite, la fonction z est toujours décroissante; elle décroît de $+\infty$ à $-\infty$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$ et s'annule une fois, pour une valeur de x, négative et comprise entre -1 et 0. Soit α cette valeur.

Quand x varie de $-\infty$ à α, y croît de $-\infty$ à $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}}$, quantité négative ; puis, de α à 0, y décroît depuis $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}}$ jusqu'à $-\infty$; enfin, de 0 à $+\infty$, y décroît depuis $+\infty$ jusqu'à 0. La fonction est donc représentée par la courbe ci-contre. En particulier, elle met bien en relief ce fait que la fonction est continue, décroissante quand x croît de 0 à $+\infty$, et qu'elle décroît elle-même de $+\infty$ à 0.



3. Il en résulte évidemment que lorsque y croît de 0 à $+\infty$, x décroît d'une façon continue de $+\infty$ à 0. La fonction $y = f(x)$ définit donc bien une fonction de y dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et une fonction jouissant des propriétés signalées : d'être continue, décroissante et de varier de $+\infty$ à 0.

Cette fonction $x = g(y)$ a une dérivée x'_y, qui est l'inverse de la dérivée de y par rapport à x, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. Or nous avons vu que $y'_x = \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}$;

donc
$$x'_y = \frac{x^2 e^x}{x^2 - e^x}.$$

D'autre part
$$x = g(y) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{e^x - x}{xe^x};$$

par suite,
$$e^x = \frac{x}{1 - xy} = \frac{g(y)}{1 - yg(y)}, \qquad \text{et} \qquad x'_y = \frac{\overline{g(y)}^2}{g(y) - y\overline{g(y)}^2 - 1}.$$

Posons maintenant $I = \int g(y)dy$, et intégrons par parties ; nous aurons
$$I = yg(y) - \int ydg(y).$$

Or $dg(y) = dx$; par conséquent
$$\int ydg(y) = \int ydx = \int \frac{dx}{x} - e^{-x}dx = Lx + e^{-x} + C.$$

Nous avons donc
$$I = yg(y) - Lg(y) - \frac{1 - yg(y)}{g(y)} + C.$$

4°. En traitant de même l'intégrale $J = \int \overline{g(y)}^2 dy$,

nous obtenons
$$J = y\overline{g(y)}^2 - 2\int yg(y)dg(y).$$

La deuxième intégrale s'écrit $\int xydx = \int (1 - xe^{-x})dx$ ou $x - \int xe^{-x}dx$; or, en intégrant de nouveau par parties, nous avons
$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

Finalement,
$$J = y\overline{g(y)}^2 + 2\,\frac{[1 + g(y)][1 - yg(y)]}{g(y)} + C.$$

Il est à remarquer que cette expression est rationnelle par rapport à y et à $g(y)$.

Bonnes solutions : MM. Rieumajou, à Sétif ; Wiener, lycée Hoche ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne : A. Courtois, lycée de Douai ; Névéjans, lycée de Douai ; A. Rousseau, à Landrecies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1765. — *On considère un cercle de diamètre* AB *et de centre* O, *un point* M *mobile sur le cercle, et la projection* P *de ce point sur* AB. *Le point* I *étant le symétrique de* P *par rapport au rayon* MO, *on demande :*

1° *Le lieu du point* I ;

2° *L'enveloppe de la droite* MI *et le lieu du pôle de cette droite par rapport au cercle* O ;

3° *Le lieu du point de rencontre* Q *de la droite* IP *et du rayon* OM, *ainsi que l'enveloppe de* IP. *Construire ces courbes.*

1. Nous prendrons pour axe des x le diamètre AB et pour axe des y le diamètre perpendiculaire. Si on désigne par φ l'angle de OM avec Ox, on a

$$OP = OI = R\cos\varphi,$$

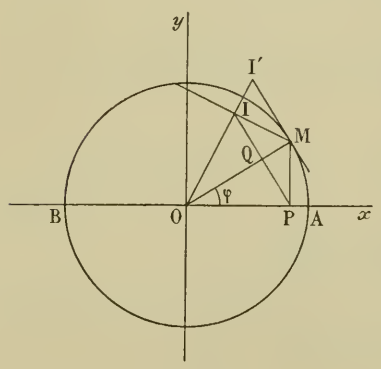


Fig. 1.

et les coordonnées polaires du point I sont $\rho = R\cos\varphi$, $\omega = 2\varphi$; par suite l'équation du lieu de ce point est

$$\rho = R\cos\frac{\omega}{2}.$$

On verra aisément que cette formule, établie en supposant $\varphi < \frac{\pi}{2}$, subsiste pour toutes les valeurs de φ.

Pour construire la courbe, il faut faire varier ω dans un intervalle d'étendue égale à 4π. Mais, si l'on change ω en $2\pi + \omega$, ρ change de signe, et la courbe est symétrique par rapport au pôle ; il suffira donc de faire varier ω dans un intervalle quelconque d'étendue égale à 2π, et de prendre la symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport au point O. Enfin, en changeant ω en $-\omega$, ρ ne change pas, et la courbe est symétrique par rapport à Ox.

Par suite, nous ferons varier ω de 0 à π, et nous prendrons le symétrique de l'arc de courbe correspondant par rapport à Ox et par rapport à Oy.

Quand ω croît de 0 à π, ρ décroît de R à 0, ce qui nous donne la branche de courbe ABO (*fig.* 2), OB étant égal à $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Comme $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$, la tangente au point A est perpendiculaire à Ox, et la tangente au point B rencontre Ox au point T qui a pour abscisse $-R\sqrt{2}$. En achevant par symétrie on obtient toute la courbe (*fig.* 2).

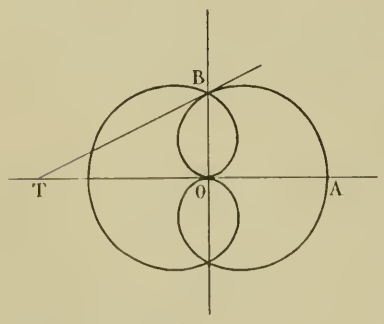


Fig. 2.

2. Le pôle I' de la droite MI est sur la droite OI, puisque OI est perpendiculaire à IM, et l'on a $OI \times OI' = R^2$. Il en résulte que l'équation polaire du point I' est

$$\rho = \frac{R}{\cos\frac{\omega}{2}}.$$

La courbe correspondante est encore symétrique par rapport aux deux axes ; nous en construisons un quart en faisant varier ω de 0 à π. Le rayon vecteur ρ croît alors de R à $+\infty$, ce qui nous donne la branche ACL (*fig.* 3).

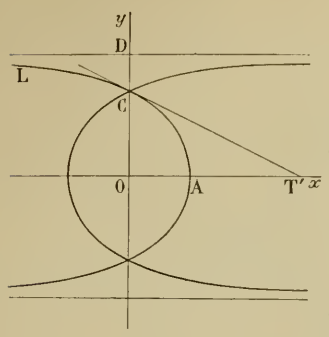


Fig. 3

Nous avons $\operatorname{tg} V = \dfrac{2}{\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2}}$; la tangente en A est perpendiculaire à Ox, et la tangente au point C($OC = R\sqrt{2}$) rencontre Ox au point T' qui a pour abscisse $2R\sqrt{2}$.

Pour avoir l'asymptote, cherchons la limite de

$$\rho \sin(\omega - \pi) = -\frac{R \sin \omega}{\cos \dfrac{\omega}{2}} = -2R \sin \frac{\omega}{2};$$

pour $\omega = \pi$, la limite est égale à $-2R$. Par suite l'asymptote a pour équation $y = 2R$, et la courbe est au-dessous de son asymptote.

On achève par symétrie et on obtient la courbe tout entière (*fig.* 3).

L'équation de la droite MI est

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - R \cos \varphi = 0;$$

le point limite où cette droite touche son enveloppe sera défini par cette équation et par l'équation donnée par rapport à φ

$$-2x \sin 2\varphi + 2y \cos 2\varphi + R \sin \varphi = 0.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on obtiendrait les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction du paramètre φ, ce qui permettrait de construire la courbe.

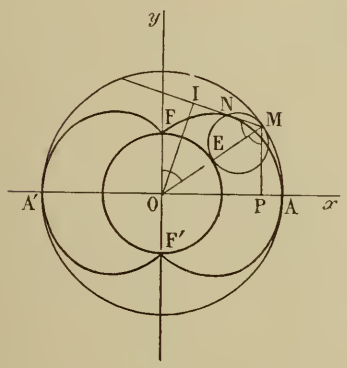


Fig. 4.

Nous allons montrer que cette enveloppe est une épicycloïde à deux rebroussements.

Considérons le cercle (γ) qui a pour centre le point O et pour rayon $\dfrac{R}{2}$, et qui rencontre le rayon OM au point E, milieu de OM; puis, sur EM comme diamètre construisons le cercle (γ'), dont le rayon est égal à $\dfrac{R}{4}$. La droite MI rencontre le cercle (γ') au point N.

Les angles MOy et OMP sont égaux comme alternes-internes, et comme OM est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMN}$, on voit que $\widehat{MOy} = \widehat{NME}$, et par suite que l'arc NE du cercle (γ') est égal à l'arc FE du cercle (γ).

On en conclut que le cercle (γ') roule sur le cercle (γ), et que le point N décrit une épicycloïde à deux rebroussements F et F'. Or la droite MN ou MI est précisément la tangente au point N à cette courbe. Donc l'enveloppe de MI est cette épicycloïde, dont la forme est bien connue (*fig.* 4).

3. Les coordonnées polaires du point Q sont $\rho = OQ = OP \cos \varphi = R \cos^2 \varphi$, et $\omega = \varphi$; par suite le lieu du point Q a pour équation polaire

$$\rho = R \cos^2 \omega.$$

Cette courbe se construit sans difficulté ; elle se compose de deux ovales symétriques l'un de l'autre par rapport à Oy, et se touchant au point O, la tangente commune étant Oy. De plus, chacune d'elles est symétrique par rapport à Ox.

Enfin l'équation de la droite IP est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R \cos^2 \varphi = 0;$$

prenons la dérivée par rapport à φ, nous obtenons

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi + 2R \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

Résolvons ces deux équations par rapport à x et y, nous avons

$$x = R \cos \varphi(1 + \sin^2 \varphi), \qquad y = -R \sin \varphi \cos^2 \varphi,$$

ce sont les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction du paramètre φ.

On voit aisément que pour construire la courbe il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et de prendre les symétriques de la branche de courbe obtenue par rapport à Ox et par rapport à Oy.

Nous avons

$$\frac{dx}{d\varphi} = R \sin \varphi(1 - 3 \sin^2 \varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = - R \cos \varphi(1 - 3 \sin^2 \varphi);$$

on en déduit $\frac{dy}{dx} = - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, ce qui était à prévoir d'après l'équation de la tangente IP.

Comme $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annulent pour une même valeur de φ, correspondant à $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, la courbe présente un point de rebroussement.

Soit α l'angle aigu dont le sinus est égal à $\sqrt{\frac{1}{3}}$, nous avons le tableau de variations

φ	0	croît	α	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	R	croît	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}R$	décroît	0
y	0	décroît	$-\frac{2R}{3\sqrt{3}}$	croît	0

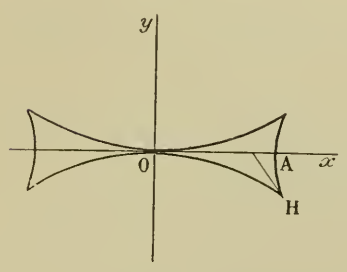


Fig. 5.

ce qui nous donne l'arc de courbe AHO. La tangente au point de rebroussement H a pour équation

$$x\sqrt{2} + y - \frac{2R}{\sqrt{3}} = 0.$$

En achevant par symétrie on obtient la courbe ci-dessus (*fig.* 5).

G. DINAY, lycée de Poitiers.

M. E.-N. Barisien nous a envoyé une bonne solution de la question et les remarques suivantes que nous ajoutons à la solution précédente.

Remarque. — *Aire des cinq courbes précédentes.*

I. — La sextique lieu du point I a son aire totale équivalente à celle du cercle donné. Il en résulte que la somme des aires des deux boucles intérieures est équivalente à l'aire comprise entre la partie extérieure de la courbe et le cercle.

II. — La sextique, enveloppe de MI, a pour aire les $\frac{3}{4}$ de l'aire du cercle.

III. — La quartique, lieu du pôle de MI par rapport au cercle, a la partie fermée de cette courbe équivalente à l'aire comprise entre la courbe et ses deux asymptotes. Cette aire est égale à l'aire du carré circonscrit au cercle.

IV. — Le lieu du point Q a pour aire les $\frac{3}{8}$ de l'aire du cercle.

V. — La sextique, enveloppe de la droite IP, a pour aire le $\frac{1}{8}$ de l'aire du cercle.

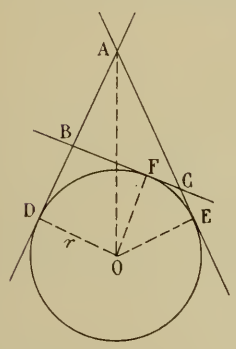
Bonnes solutions par MM. Jean Bing, élève à l'école des Mines ; J. Coulange, école des Anglais, à Lyon : André Courtois, lycée de Douai ; G. Foucry, à Reims ; H. Jacquemetton, lycée de Douai ; Gaston Labadie, à Toulouse ; Éd. Leroux, à Lille : Mirante, à Alger ; P. Nèvejans, lycée de Douai ; R. Manen, à Albi ; Jacques Paraf ; E. Rémé, à Alger ; A. Rousseau, à Landrecies ; Paul Servanti et J. Verots, école des Anglais, à Lyon ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; P. Sailleron, à Albi ; L. Sire.

TRIGONOMÉTRIE

1763. — *Dans un triangle on donne le périmètre $2p$, le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A, r, et la surface S. Calculer le côté a et former l'équation du second degré qui donne les deux autres côtés b et c. Discuter.*

Application numérique : $p = 3$, $r = \sqrt{3}$, $S = \sqrt{3}$.

On voit immédiatement sur la figure que l'aire du triangle est égale à la somme des aires des triangles OAB, OAC, diminuée de celle du triangle OBC. Nous avons donc



$$S = (b + c - a)\frac{r}{2} = (p - a)r.$$

Cette formule donne a,

$$a = p - \frac{S}{r}.$$

Pour calculer b et c, nous remarquerons que $AE = AD = p$ et que, par suite, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$, $\sin A = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$, $\sin A = \dfrac{2pr}{r^2 + p^2}$.

Nous avons alors immédiatement

$$b + c = 2p - a, \qquad bc \sin A = 2S;$$

par suite

$$b + c = p + \frac{S}{r}, \qquad bc = S\,\frac{p^2 + r^2}{pr},$$

et b et c sont racines de l'équation du second degré

$$x^2 - \left(p + \frac{S}{r}\right)x + S\,\frac{p^2 + r^2}{pr} = 0.$$

La discussion du problème est aisée : en effet l'équation précédente nous montre que b et c sont sûrement positifs si les racines de l'équation du second degré sont réelles; d'autre part, $a > 0$ nous donne $p > \frac{S}{r}$, et alors a étant plus petit que p, $b + c$ sera plus grand que p. Il reste donc à exprimer que b et c sont réels et que $|b - c| < a$.

La condition de réalité est

$$\left(p - \frac{S}{r}\right)^2 - \frac{4Sr}{p} \geqslant 0.$$

La condition $|b - c| < a$ s'écrit

$$\left(p - \frac{S}{r}\right)^2 - \frac{4Sr}{p} < \left(p - \frac{S}{r}\right)^2;$$

elle est toujours vérifiée.

Par conséquent les seules conditions de possibilité sont que les données soient raisonnables, c'est-à-dire que les nombres p, S et r soient positifs, et que l'on ait

$$pr > S, \quad \left(p - \frac{S}{r}\right)^2 - \frac{4Sr}{p} \geqslant 0.$$

Pour $S = pr$, le trinome est négatif ; donc les racines de ce trinome en S sont réelles, et S doit être compris entre la plus petite et pr.

Si $\left(p - \frac{S}{r}\right)^2 = \frac{4Sr}{p}$, le triangle est isocèle, $b = c = \frac{1}{2}\left(p + \frac{S}{r}\right)$.

Dans le cas où $p = 3$, $r = S = \sqrt{3}$, on trouve $a = 2$, $b = c = 2$, et le triangle est équilatéral.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions : MM. L. Sire, à Lyon ; Marius Mazet, à Sétif ; G. Lach, à Denain ; R. Allard, à Bruxelles ; G. Foucry, à Roanne ; A. Courtois, à Douai ; P. Salleron, à Albi ; Névejans, à Douai ; E. Rème, à Alger ; R. Manen, à Albi ; H. Niox-Chateau, à Limoges ; R. Bouvaist.

Assez bonnes solutions : MM. L. Simon, à Châlons-sur-Marne ; Jean Bing, à Toul ; A. Rousseau, à Landrecies.

ÉCOLE CENTRALE (1909).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie. (M. Gérard.)

4692. — Reste de la division d'un nombre entier par 25.

4693. — On ne change pas le p. g. c. d. de deux nombres quand on multiplie l'un deux par un nombre premier à l'autre.

4694. — Si deux nombres a, b sont premiers entre eux, leurs carrés le sont aussi.

4695. Montrer que la fraction $\frac{11}{60}$ ne peut être réduite en fraction décimale.

4696. — Montrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent.

4697. — Racine carrée de 3256 à une unité près. Théorie.

4698. — Calculer $\sqrt{\frac{4}{3}}$ à $\frac{1}{10}$ près, $\sqrt{13,5}$ à $\frac{1}{10}$ près, $\sqrt{\frac{3}{7}}$ à $\frac{1}{100}$ près, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ à $\frac{1}{100}$ près.

4699. — Calculer e^2 à une unité près, $\pi\sqrt{3}$ à $\frac{1}{10}$ près, $\frac{2}{\pi}$ à $\frac{1}{10}$ près, 4π à $\frac{1}{10^3}$ près.

4700. — On prend 3,14 pour valeur approchée de π, 1,41 pour valeur approchée de $\sqrt{2}$; quelle est l'erreur commise sur le produit $\pi\sqrt{2}$.

4701. — Résoudre et discuter les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z = 8, \\ 3x + y + z = 5, \\ 4x + 2y + 3z = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5, \\ x - y + 3z = 8, \\ x + 3y + 4z = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0, \\ x + by + b^2z + b^3 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b + c + 2)x - by - cz = 2\alpha, \\ -ax + (c + a + 2)y - cz = 2\beta, \\ -ax - by + (a + b + 2)z = 2\gamma. \end{cases}$$

4702. — Calculer la somme des n premiers nombres impairs ; somme des carrés, des cubes.

4703. — Calculer $\Sigma n(n+2)(n+3)$.

4704. — Démontrer que $3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{4}{5} + \frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{3^4} = \sqrt[15]{3^{12}}$, $a^b \times a^c = a^{b+c}$, $(a^b)^c = a^{bc}$.

4705. — Limites pour n infini de $\left(\frac{4}{3}\right)^n$, $\sqrt[n]{3}$, $\frac{2^n}{n}$, $\frac{n}{2^n}$, $\frac{n}{4^n}$, $\frac{3n+1}{4^n}$.

4706. — Etudier les séries

$$u_n = \frac{1}{2^n}, \qquad u_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n, \qquad u_n = (0,8)^n,$$

$$u_n = (0,75)^n, \qquad u_n = (0,98)^n, \qquad u_n = \frac{2}{5^n},$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{10^n}}, \qquad u_n = \frac{3^n}{5^n}, \qquad u_n = \frac{1}{2^{3n+4}},$$

$$u_n = \frac{2^n}{3^{n+2}}, \quad u_n = \frac{2^n}{3^n}, \quad u_n = \frac{2^n}{3^{2n+5}}, \quad u_n = \frac{2}{3^n + 5}, \quad u_n = \frac{2^n}{3^n + 8}, \quad u_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}, \quad u_n = \frac{n}{2^n},$$

$$u_n = \frac{n+1}{4^n}, \quad u_n = \frac{1}{n^n}, \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_n = \frac{1}{n^3}, \quad u_n = \frac{1}{n^4}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}},$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}, \quad u_n = \frac{1}{n(n-1)}, \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}, \quad u_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{1}{3n^2+1}, \quad u_n = \frac{n}{n^3+1}, \quad u_n = \frac{n}{4n+5},$$

$$u_n = \frac{1}{3n+5}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \quad u_n = \sqrt{n^2+1} - n, \quad u_n = \sqrt[3]{n^3+4} - n.$$

$$u_n = \sqrt[4]{n^4+1} - n, \quad u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}, \quad u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}, \quad u_n = \sin\frac{\pi}{2n+1},$$

$$u_n = \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}n, \quad u_n = \mathrm{L}\,\frac{n^2+1}{n^2+n-1}.$$

4707. — Calculer e^{-1} à $\frac{1}{100}$ près.

4708. — Etudier les séries

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

Calculer la somme à $\frac{1}{10}$ près.

4709. — Etudier la série $u_n = \frac{nx^n}{n^2+n+1}$.

4710. — Dérivées des fonctions suivantes :

$$y = x^{\frac{2}{3}}, \quad y = x^{\frac{3}{4}}, \quad y = x^{\frac{4}{5}}, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 2^x, \quad y = 3^{\sin x}, \quad y = 3^{\sin 2x},$$

$$y = 4^{\sin 3x+5}, \quad y = e^{\sin 2x}, \quad y = e^{3x^2+4}, \quad y = e^{3\mathrm{L}x}, \quad y = \mathrm{L}(3-4x),$$

$$y = \mathrm{L}(x+\sqrt{x^2+1}), \quad y = \mathrm{L}(-x+\sqrt{x^2+1}), \quad y = \mathrm{L}(3x+\sqrt{9x^2+4}),$$

$$y = \mathrm{L}\sin x, \quad y = \mathrm{L}\sin 2x, \quad y = \mathrm{L}(\mathrm{L}x).$$

$$y = \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right), \quad y = \mathrm{L}(3^x+2), \quad y = \mathrm{L}(\mathrm{tg}^3 x + e^{\sin x}), \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,3x, \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,6x, \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-x}{1+x},$$

$$y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1+x}{1-x}, \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+1}{x-1}, \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+4}{1-4x}, \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x}{1-x^2},$$

$$y = \mathrm{arc\,sin}\sqrt{1-x^2}, \quad y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = x^{2x}, \quad y = x^{\sin x}, \quad y = x^{\cos x}, \quad y = (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

$$y = (\mathrm{tg}\,x)^{2x}, \quad y = (\cos x)^{\sin x}, \quad y = (\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}, \quad y = x^{\mathrm{arc\,tg}\,x}, \quad y = (\mathrm{L}x)^{\mathrm{tg}\,x}, \quad y = \sqrt[5]{\mathrm{tg}\,x\,x + x^{\sin x}},$$

$$y = \mathrm{L}(\mathrm{tg}^2 x + x^x), \quad y = \mathrm{L}\left[\sqrt[3]{2x} + \mathrm{tg}\,x^{\sin x}\right], \quad y = \mathrm{L}(\mathrm{tg}\,x + \sin x^x), \quad y = \mathrm{L}(1+x^x).$$

4711. — Dérivées première et seconde de la fonction y définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} = 0.$$

Même question pour l'équation $e^{2y} = 4x^2 + 1$.

4712. — Dérivée n^e de $y = \mathrm{L}(1-2x)$.

4713. — Formule des accroissements finis. — Appliquer aux fonctions $\sqrt{x}$, e^x, $3x^2+5$, en prenant pour x les valeurs 4 et 5.

4714. — Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $\sin x$, en prenant pour x les valeurs 30° et 90°.

4715. — Appliquer le théorème des accroissements finis aux différences

$$\mathrm{arc\,sin}\,0{,}2 - \mathrm{arc\,sin}\,0{,}1, \qquad \mathrm{arc\,tg}\,8 - \mathrm{arc\,tg}\,6.$$

4716. — Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. — S'applique-t-il aux fonctions transcendantes ? Exemples :

$$e^{\frac{x}{y}}, \qquad \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

4717. Variations des fonctions suivantes :

$$y = \frac{x^3-1}{x^4-1}, \quad y = \sin x + \sin 3x, \quad y = \sin x + \cos x, \quad y = \sin x\cos x, \quad y = \sin x.\sin 2x, \quad y = \sin x.\sin 3x,$$

$$y = \frac{9}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}, \quad y = \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{8\sin^2 x + 1}}, \quad y = 3\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x, \quad y = \frac{(1+\sin x)(3+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x}, \quad y = \mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

4718. — Variation du produit des sinus des trois angles d'un triangle isocèle.

4719. — Variation de la somme des sinus (ou des cosinus) des trois angles d'un triangle isocèle.

4720. — Limites pour $x = 0$ de

$$\frac{\sin(\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{L}(1+x)}, \qquad \frac{\mathrm{L}(1+x)}{\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3}}, \qquad \frac{\sin(\sin x)}{x}.$$

4721. — Limite de $\frac{1-\sin x}{\mathrm{cotg}\,x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

4722. — Limites, pour n infini, de

$$\frac{\mathrm{L}n}{n+1},\quad \frac{n}{\mathrm{L}(n^2+1)},\quad \frac{n}{\mathrm{L}(1+2^n)},\quad \frac{n+1}{\mathrm{L}(4^n+5)},\quad \frac{n+1}{\mathrm{L}(3^n+2)},\quad \frac{\mathrm{L}n}{\mathrm{L}(n^2-1)},\quad \frac{\mathrm{L}(n+1)}{\mathrm{L}(3n^2+1)},\quad \frac{\mathrm{L}(n^4+1)}{\mathrm{L}(n^2+1)},$$

$$\mathrm{L}(n+2)-\mathrm{L}(n+1),\quad \sqrt[n]{2n+5},\quad \left(1+\frac{3}{2n}\right)^n,\quad \left(1+\frac{3}{2n+1}\right)^n,\quad \left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{2n},\quad \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n},$$

$$n\mathrm{L}\,\frac{n^2+4}{n^2+3n+1},\quad n\mathrm{L}\,\frac{n^2-1}{n^2+4n+5},\quad \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2+1}.$$

4723. — Limites pour $x=0$ de

$$(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}},\quad (\cos x+\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}},\quad (\cos x+\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}},\quad (\cos x+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}},\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)^{\operatorname{colg} x}.$$

4724. — x étant choisi comme infiniment petit principal, trouver l'ordre infinitésimal et la partie principale de chacun des infiniment petits suivants :

$$1-\cos x,\quad x-\sin x\cos x,\quad \operatorname{tg} x-x,\quad \mathrm{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right),\quad 1-\cos 2x,\quad 1-\cos 3x,\quad \mathrm{L}\cos 2x,\quad \mathrm{L}\cos 3x.$$

4725. — Différentielle première de la fonction $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2+x}{1-2x}$.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1837. — On considère deux coniques confocales C et C′. Par un point P quelconque de l'une des directrices relatives au foyer commun, on mène les tangentes aux deux coniques. Démontrer que la condition pour que, quel que soit P, ces tangentes forment un faisceau harmonique, est que les cercles principaux de C et C′ soient orthogonaux.

G. Pélissier, à Toulouse.

1838. — Un point M se déplaçant sur une parabole P de foyer F :

1° Le lieu du centre du cercle C circonscrit au triangle normal circonscrit correspondant au point M est une parabole P′.

2° Cette parabole P′ est aussi le lieu du sommet d'un triangle isocèle normal circonscrit à la parabole P et correspondant à un point M′ de la normale en M à la parabole P.

3° Le lieu du point M′ est une cubique. Cette cubique est aussi le lieu du point à égale distance de la parabole P et de son foyer F.

4° Soit C′ le cercle circonscrit au triangle normal circonscrit à la parabole P et correspondant à M′. C et C′ se rencontrent en F et en un second point dont on demande le lieu.

Camille Massing.

1839. — Déterminer la trajectoire d'un mobile sachant qu'elle est plane et que les composantes tangentielle et normale de l'accélération sont constantes toutes les deux. G. Lach.

1840. — Une droite de longueur donnée passe par un point fixe et une de ses extrémités décrit une droite. Trouver le lieu de son autre extrémité, Gh. Giuncu.

Note. — Ces deux dernières questions, envoyées par des lecteurs de la *Revue*, sont connues depuis longtemps. Elles n'en constituent pas moins de bons exercices pour les élèves ; c'est à ce titre que nous les publions. *N. d. l. R.*

Note rectificative. — Dans le N° de Novembre, une erreur matérielle nous a empêchés de signaler quelques bonnes solutions que nous avons reçues de la question **1748**. Nous réparons cet oubli involontaire en signalant aujourd'hui une très bonne solution de M. Dinay, à Poitiers et de bonnes solutions de : MM. J.-D. Dufaut, à Poitiers ; Paul Delens, à Rouen ; Jean Bing, élève à l'Ecole des Mines.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Janvier 1910. N° 4.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

COURBES GAUCHES ET SURFACES (*Suite*)

par M. **A. Sainte-Laguë**, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

Tangentes conjuguées et lignes asymptotiques. — 9. — *Deux tangentes à une surface en un point sont dites conjuguées si elles le sont par rapport à l'indicatrice.* Deux familles de courbes sur la surface sont dites conjuguées si, en chaque point de la surface, les deux courbes qui y passent sont à tangentes conjuguées.

Si nous reprenons l'équation de l'indicatrice dans le cas où la surface est donnée par $z = f(x, y)$ en désignant par dx, dy et δx, δy les différentielles de x, y le long de deux courbes conjuguées, la condition pour que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\delta y}{\delta x}$ représentent deux directions conjuguées est :

$$rdx.\delta x + s(dx.\delta y + dy.\delta x) + tdy.\delta y = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\delta x(rdx + sdy) + \delta y(sdx + tdy) = 0$$

ou enfin

$$dp.\delta x + dq.\delta y = 0.$$

Ceci permet de donner une autre définition des lignes conjuguées :

Si en chaque point d'une courbe tracée sur une surface, on prend la génératrice de la surface développable, enveloppe des plans tangents à la surface tout le long de la courbe donnée, cette génératrice est conjuguée de la tangente à la courbe en ce point.

Réciproquement, toute tangente conjuguée à la tangente à une courbe donnée peut être définie de cette façon.

En effet, considérons x, y, z, coordonnées du point donné, et p, q, définis comme précédemment, comme fonctions de l'arc de la courbe tracée. Le plan tangent est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

On a son enveloppe en ajoutant à cette expression sa différentielle par rapport à l'arc s :

$$-dz = dp(X - x) + dq(Y - y) - pdx - qdy.$$

Mais la tangente à la courbe donnée étant dans le plan tangent on a $dz = pdx + qdy$ et la seconde équation s'écrit alors

$$dp(X - x) + dq(Y - y) = 0$$

qui définit dans le plan tangent une direction $\frac{\beta}{\alpha}$ telle que

$$\alpha dp + \beta dq = 0$$

qui, comparée à $\delta x.dp + \delta y.dq = 0$, montre bien que la génératrice de la surface développable est conjuguée, de la tangente à la courbe.

Avec des notations plus générales, a, b, c désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface au point (x, y, z) pour avoir l'enveloppe du plan tangent

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0,$$

il faut adjoindre à cette équation

$$da(X - x) + db(Y - y) + dc(Z - z) - adx - bdy - cdz = 0$$

ou

$$da(X - x) + db(Y - y) + dc(Z - z) = 0,$$

qui montre que la direction δx, δy, δz ainsi définie vérifie la condition

$$da.\delta x + db.\delta y + dc.\delta z = 0,$$

généralisation de la précédente.

10. — *Une tangente est dite asymptotique si elle est conjuguée par rapport à elle-même.* Elle est alors dirigée suivant une asymptote de l'indicatrice. *Une ligne est dite asymptotique si en tous ses points sa tangente est asymp-*

totique. Il passe en général deux telles lignes par un point donné, mais il faut bien remarquer qu'elles sont réelles ou imaginaires ou même tangentes, tandis que les deux lignes de courbure qui passent au même point sont toujours réelles et orthogonales.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est donnée d'après ce qui précède par

$$da.dx + db.dy + dc.dz = 0$$

ou, dans le cas où la surface est de la forme $z = f(x, y)$, par

$$dp.dx + dq.dy = 0,$$

que l'on peut écrire, en remplaçant dp et dq par leurs valeurs,

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0,$$

résultat qui se vérifie directement.

Tout le long d'une ligne asymptotique le plan osculateur à cette courbe est tangent à la surface et, réciproquement, *une telle propriété est caractéristique des lignes asymptotiques.*

En effet, le plan tangent à la surface, $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$, est osculateur à la courbe considérée si p et q vérifient

$$pdx + qdy - dz = 0, \qquad pd^2x + qd^2y - d^2z = 0$$

pour un déplacement le long de cette courbe. La première équation montre que la tangente à la courbe est dans le plan tangent. En la différentiant et en tenant compte de la seconde, on trouve

$$dp.dx + dq.dy = 0,$$

équation différentielle des lignes asymptotiques.

On pourrait d'ailleurs établir ce résultat par des raisonnements géométriques.

11. — On ne sait pas en général trouver sur une surface donnée des familles de lignes de courbure ou de lignes asymptotiques, sans intégration d'une équation différentielle, mais on peut toujours obtenir certaines familles de lignes conjuguées grâce au théorème suivant dû à M. Kœnigs :

Les sections d'une surface par des plans passant par une droite fixe et les courbes de contact des cônes, circonscrits à la surface, de sommets sur cette droite, forment sur la surface deux familles de courbes conjuguées.

En effet, en un point de la courbe de contact d'un cône, la tangente à cette courbe admet pour tangente conjuguée la génératrice correspondante du cône, génératrice qui coupe la droite fixe donnée. C'est par suite une tangente à la section plane de la surface, dont le plan est déterminé par la droite fixe et le point pris sur la courbe de contact.

Nous avons vu que les lignes de courbure jouissent d'une propriété remarquable par rapport à la transformation par inversion ; nous allons montrer de même que *tout système conjugué reste conjugué si la surface qui le porte est transformée homographiquement ou par polaires réciproques. En particulier les lignes asymptotiques se correspondent dans ces transformations.*

La première propriété relative à la transformation homographique s'établit immédiatement car la définition des tangentes conjuguées au moyen de développables circonscrites à une surface tout le long d'une courbe le montre immédiatement. On verrait aisément que la propriété est encore exacte pour la transformation par polaires réciproques, en remarquant que la courbe et la développable s'échangent dans une telle transformation, et que les tangentes de l'une deviennent les génératrices de l'autre.

§ III. — COORDONNÉES CURVILIGNES

Généralités. — **12.** — Si les coordonnées (x, y, z) d'un point sont fonctions de deux paramètres u et v, ce point décrit une surface en général, et, inversement, si un point décrit une surface on peut toujours prendre ses coordonnées sous cette forme. Nous dirons que cette surface est rapportée au *système de coordonnées curvilignes u et v*. Par exemple la surface $z = f(x,y)$ peut se représenter par

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u,v).$$

Toute relation entre u et v : $f(u,v) = 0$ oblige le point considéré à décrire une courbe sur la surface ; u et v sont alors fonctions d'un même paramètre qui peut être u, ou v, ou l'arc de la courbe, etc... Toutes les dérivées sont prises dans les calculs par rapport à ce paramètre unique. Les équations $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$ représentent deux familles particulières de courbes que l'on appelle *courbes-coordonnées* ou *courbes-bases*. Un point est défini par les deux courbes-bases qui y passent : $u = u_0$; $v = v_0$. On l'appelle le point de coordonnées u_0, v_0 ou plus simplement le point (u_0, v_0). Ses coordonnées cartésiennes x_0, y_0 z_0 s'en déduisent immédiatement.

On peut parfois donner une représentation plane ou « *carte* » d'une telle surface en faisant correspondre au point de la surface de coordonnées u, v le point du plan de coordonnées cartésiennes u, v. Les courbes-bases correspondent alors aux parallèles aux axes de coordonnées. Par exemple les sections planes de la surface correspondront à certaines familles de courbes du plan ; les points d'intersection de la surface avec une droite à certains groupes de points du plan, etc... Il y a des cas où l'usage de telles cartes donne des résultats intéressants. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce sujet dans le cas particulier des quadriques.

On peut de même obtenir des représentations d'une surface sur une autre. Par exemple on peut faire correspondre aux points d'une surface, avec des courbes-bases convenablement choisies, les points d'une autre surface tels, qu'en deux points correspondants les plans tangents soient parallèles. En particulier si l'une des surfaces est une sphère on a ce que l'on appelle l'*image sphérique* des points de l'autre surface.

13. — On a souvent besoin d'évaluer l'arc d'une courbe tracée sur la surface. On a immédiatement, pour cet arc s,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Mais il faut remarquer que x, y, z sont fonctions d'un même paramètre par l'intermédiaire de u et v ; on a donc $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$ et des formules analogues pour dy et dz. D'où

$$ds^2 = E du^2 + 2F du.dv + G dv^2,$$

en posant
$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \sum\frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

le signe Σ indiquant, comme nous l'avons déjà dit, la somme de trois expressions, analogues à la première, obtenues par le changement de x en y, puis en z.

ds s'appelle l'*élément linéaire* de la surface. Il faut bien remarquer que si l'on fait des changements de variables définis par les formules : $u = f(u')$, $v = g(v')$, les courbes-bases restent les mêmes quoique correspondant à d s valeurs différentes des paramètres, mais E, F, G changent de valeur. On voit donc que, même avec des courbes-bases données, il y a une infinité de formes distinctes de l'élément linéaire.

Pour une courbe $u = C^{te}$ l'élément d'arc est $\sqrt{G}dv$ et de même, pour $v = C^{te}$, $\sqrt{E}du$. L'angle α au point (u, v) des deux courbes-bases qui y passent s'obtient aisément : en effet les paramètres directeurs des tangentes à ces courbes sont $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$. On a donc

$$\cos\alpha = \frac{\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

On en déduit $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{EG - F^2}{F^2}$. On pose habituellement $H^2 = EG - F^2$ et l'on a alors en valeur absolue

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{F}.$$

Remarquons que E et G sont positifs par définition et que H est toujours réel, car, d'après l'identité de Lagrange,

$$H^2 = \sum\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2.$$

L'*élément d'aire* de la surface, c'est-à-dire l'aire comprise entre les courbes u, v ; $u + du$, $v + dv$, peut être assimilé à un parallélogramme infiniment petit et l'on a par suite

$$d\sigma = \sqrt{E}.du\ \sqrt{G}.dv.\sin\alpha = H.du.dv.$$

Prenons maintenant deux courbes quelconques, tracées sur la surface, se coupant au point (u, v) et représentons par dx, dy, dz et δx, δy, δz les paramètres directeurs des tangentes à ces courbes en ce point. Cherchons la *condition d'orthogonalité* de ces courbes. On doit avoir

$$\sum dx.\delta x = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) = 0$$

ou, en développant les calculs,

$$E du.\delta u + F(dv.\delta u + du.\delta v) + G dv.\delta v = 0.$$

En particulier les courbes-coordonnées sont orthogonales si $F = 0$, ce qui se vérifie immédiatement avec les formules ci-dessus donnant les lignes de l'angle α.

Il peut arriver que pour un choix convenable des paramètres u et v, les éléments linéaires de deux sur

faces soient les mêmes, E, F, G étant les mêmes fonctions de u et v, sans que pour cela les surfaces soient identiques. On dit alors que *les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre.* Si l'on considère une surface comme un tissu flexible et inextensible, pouvant se déformer, sans déchirure ni « duplicature », la longueur de toute courbe tracée sur cette surface reste invariable, et, pendant tout le déplacement, ds, c'est-à-dire E, F, G ne changent pas pourvu qu'on ne change pas les courbes-bases. C'est ce qui fait inversement donner le nom de surfaces applicables à deux surfaces ayant même valeur pour ds. Nous n'examinerons pas d'ailleurs la question de savoir s'il est possible géométriquement de faire coïncider les deux surfaces en faisant subir à l'une d'elles une série de déformations continues du genre de celles qui précèdent.

Lignes remarquables d'une surface. — **14.** Pour transformer avec les notations actuelles l'équation différentielle

$$da.dx + db.dy + dc.dz = 0$$

des lignes asymptotiques, dans laquelle a, b, c sont les cosinus directeurs de la normale, il nous faut calculer d'abord ces cosinus. On a

$$\frac{a}{\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{z}{\partial u}} = \frac{b}{\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{c}{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{H},$$

Avec un sens convenable sur la normale. On en tire

$$a = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

et des formules analogues pour b et c. Si l'on remarque que $da = \frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv$ et que db, dc, dx, dy, dz se développent de la même façon, on voit que l'équation différentielle considérée s'écrit

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial a}{\partial u}du^2 + \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial a}{\partial u}\right)du.dv + \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial a}{\partial v}dv^2 = 0.$$

Mais en différentiant les relations vérifiées identiquement $\sum a\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\sum a\frac{\partial x}{\partial v} = 0$, qui expriment que les tangentes aux courbes u et v sont dans le plan tangent, on a

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} = -\sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{1}{H}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial a}{\partial v} = -\sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v} = -\frac{1}{H}\sum\frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

et deux équations analogues pour $\sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial a}{\partial u}$ et $\sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial a}{\partial v}$. Posons pour abréger les notations :

$$D = \sum\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est en définitive, en remarquant que H est différent de 0,

$$ds_1^2 = \mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}'du.dv + \mathrm{D}''dv^2 = 0\,;$$

ds_1^2 s'appelle parfois la *seconde forme fondamentale*, ds^2 étant la première. On voit que les directions asymptotiques ne sont réelles au point (u, v) que si cette équation du second degré en $\frac{dv}{du}$ a ses racines réelles, c'est-à-dire si $\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2 < 0$.

Si l'on remarque que la condition pour que deux directions dx, dy, dz et δx, δy, δz soient conjuguées est $da.\delta x + db.\delta y + dc.\delta z = 0$, on en déduit par des calculs analogues aux précédents la nouvelle forme de cette condition :

$$\mathrm{D}du.\delta u + \mathrm{D}'(du.\delta v + dv.\delta u) + \mathrm{D}''dv.\delta v = 0,$$

d'ailleurs symétrique par rapport aux deux directions. En particulier les courbes-bases sont conjuguées si l'on a $\mathrm{D}' = 0$.

15. — Cherchons maintenant l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Les formules d'Olinde Rodrigues sont, comme nous l'avons vu,

$$dx + \mathrm{R}da = 0, \qquad dy + \mathrm{R}db = 0, \qquad dz + \mathrm{R}dc = 0.$$

La première peut s'écrire

$$\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \mathrm{R}\left(\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv\right) = 0,$$

à laquelle on adjoint deux formules analogues.

Multiplions la première par $\frac{\partial x}{\partial u}$, la deuxième par $\frac{\partial y}{\partial u}$, la troisième par $\frac{\partial z}{\partial u}$ et ajoutons-les :

$$\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}}(\mathrm{D}du + \mathrm{D}'dv),$$

avec les définitions ci-dessus pour D et D'. En les multipliant de même par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ on a

$$\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}}(\mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv).$$

La comparaison de ces deux relations donne

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv}{\mathrm{D}du + \mathrm{D}'dv} = \frac{\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv}{\mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv} = \frac{(\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv)\,du + (\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv)\,dv}{(\mathrm{D}du + \mathrm{D}'dv)\,du + (\mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv)\,dv} = \frac{ds^2}{ds_1^2}.$$

Le deuxième et le troisième rapport donnent par comparaison l'*équation différentielle des lignes de courbure* ; le premier, comparé à l'un des deux suivants, donne le rayon de courbure correspondant à la ligne considérée. On verrait aisément que les deux lignes passant au point (u, v) sont orthogonales et toujours réelles. En particulier les courbes-bases sont lignes de courbure si $\mathrm{F} = 0$ et $\mathrm{D}' = 0$. La première condition exprime que ces deux courbes sont orthogonales, la deuxième qu'elles sont conjuguées et ces résultats deviennent alors évidents. Si $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}'} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{D}''}$ les lignes de courbure sont indéterminées au point considéré, qui est alors un ombilic.

Ces mêmes rapports permettent par élimination de $\frac{dv}{du}$ d'obtenir l'équation du second degré en R qui donne les deux rayons de courbure principaux R et R' au point (u, v) considéré, et par suite de calculer $\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'}$ ou *courbure moyenne* et $\frac{1}{\mathrm{RR}'}$ ou *courbure totale*. On trouverait ainsi

$$\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{ED}'' + \mathrm{GD} - 2\mathrm{FD}'}{\mathrm{H}^3}, \qquad \frac{1}{\mathrm{R.R}'} = \frac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{H}^4}.$$

(*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1767. — *On considère un cercle, deux diamètres rectangulaires fixes de ce cercle et, sur chacun d'eux, un point,* A *et* B.

1° *Trouver l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes au cercle issues des points* A *et* B, *le lieu de leurs centres et le lieu des points du plan où se coupent deux coniques orthogonales en ce point.*

2° *Dans le faisceau ainsi formé il y a une parabole. Enveloppe de l'axe, de la tangente au sommet et lieu du sommet quand le point* B *varie sur le diamètre fixe qui le porte.*

3° *Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur ces paraboles et le lieu du centre du cercle passant aux pieds de ces normales.*

1° Prenons pour axes de coordonnées les deux diamètres OA et OB, et soient a, b les longueurs OA, OB et R le rayon du cercle. L'équation tangentielle du cercle est

$$R^2(u^2+v^2)-w^2=0,$$

celle de la conique impropre réduite aux deux points A et B,

$$(au+w)(bv+w)=0.$$

Les coniques inscrites dans le quadrilatère indiqué forment un faisceau tangentiel dont l'équation est

$$R^2(u^2+v^2)-w^2+\lambda(au+w)(bv+w)=0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Le centre de chaque conique, λ, a pour équation tangentielle

$$f'_w=0 \quad \text{ou} \quad \lambda(au+bv+2w)-2w=0\,;$$

ses coordonnées cartésiennes sont

$$x=\frac{a\lambda}{2(\lambda-1)},\quad y=\frac{b\lambda}{2(\lambda-1)},$$

et le lieu de ce point est la droite

$$(1)\qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b},$$

qui joint le point O au milieu de la droite AB; c'est la droite de Newton du quadrilatère formé par les quatre tangentes menées des points A et B au cercle.

Ce résultat est classique et découle du résultat analogue pour un faisceau linéaire tangentiel de coniques absolument quelconque.

Considérons maintenant un point M quelconque du plan; les tangentes menées par ce point aux diverses coniques du faisceau forment les couples d'une involution dont les rayons doubles sont les tangentes en M aux deux coniques du faisceau qui y passent. Ces deux rayons doubles doivent être rectangulaires; donc, dans le faisceau, il y a un couple confondu avec le couple isotrope; par conséquent, le point M est un foyer et nous aurons le lieu demandé en cherchant le lieu des foyers des coniques du faisceau.

Soit (x, y) un tel point; si nous exprimons que la droite courante du plan passe en ce point et est tangente à la conique λ, nous aurons $\quad ux+vy+w=0,$

$$R^2(u^2+v^2)-w^2+\lambda(au+w)(bv+w)=0.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer w entre ces deux équations pour avoir les directions des deux tangentes menées du point (x, y) à cette conique.

Ceci nous donne

$$R^2(u^2+v^2)-(ux+vy)^2+\lambda(au-ux-vy)(bv-ux-vy)=0.$$

Le point sera un foyer, si cette équation se réduit à $K(u^2 + v^2) = 0$. Ceci donne

$$R^2 - x^2 - \lambda x(a - x) = R^2 - y^2 - \lambda y(b - y), \qquad -2xy + \lambda[xy + (a - x)(b - y)] = 0,$$

et il n'y a plus qu'à éliminer λ entre ces deux équations. On trouve ainsi

$$(x^2 - y^2)(2xy - ay - bx + ab) - 2xy(x^2 - y^2 - ax + by) = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)(ay - bx) + ab(x^2 - y^2) = 0.$$

Tel est le lieu des foyers, le lieu des points par lesquels passent deux coniques du faisceau qui se coupent en ce point à angle droit. Ce lieu est une strophoïde oblique ayant pour direction asymptotique la ligne des centres des coniques du faisceau et ayant l'origine comme point double.

2° Pour que la conique du faisceau soit une parabole, il faut que le terme en w^2 soit nul, ce qui donne $\lambda = 1$. Il y a donc une parabole et une seule dans le faisceau et elle a pour équation

$$(3) \qquad R^2(u^2 + v^2) + abuv + auw + bvw = 0.$$

Le centre de cette parabole est à l'infini sur la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$; la direction de l'axe est donc $bx - ay = 0$. D'autre part, le foyer est fourni par les équations précédentes où l'on fait $\lambda = 1$,

$$ax - by = 0,$$
$$bx + ay - ab = 0.$$

Ce point a pour coordonnées

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a} = \frac{ab}{a^2 + b^2},$$

et son lieu, quand b varie seul, est le cercle

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - ax = 0,$$

c'est-à-dire le cercle décrit sur OA comme diamètre.

L'axe passe au foyer et est parallèle à la droite $bx - ay = 0$; il a donc pour équation

$$b\left(x - \frac{ab^2}{a^2 + b^2}\right) - a\left(y - \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right) = 0,$$

$$(5) \qquad bx - ay + \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = 0.$$

Son enveloppe est une courbe de troisième classe dont on a facilement l'équation tangentielle, en posant

$$b = \lambda u, \qquad a = -\lambda v, \qquad \frac{ab(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = \lambda w,$$

et éliminant b et λ entre ces équations. Ce calcul donne

$$(6) \qquad w(u^2 + v^2) - au(u^2 - v^2) = 0;$$

c'est l'équation tangentielle d'une courbe de troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques; c'est donc l'équation d'une hypocycloïde à trois rebroussements, qui admet Ox pour axe de symétrie.

La tangente au sommet est la droite

$$ax + by + \mu = 0,$$

μ étant déterminé par la condition que cette droite soit tangente à la parabole, c'est-à-dire que l'on ait

$$R^2(a^2 + b^2) + a^2b^2 + \mu(a^2 + b^2) = 0,$$

μ est donc égal à $-R^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$, et l'équation de la tangente au sommet est

$$(7) \qquad ax + by - R^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = 0.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient aussi en posant

$$a = \lambda u, \qquad b = \lambda v, \qquad R^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = -\lambda w.$$

et en éliminant b et λ entre ces trois équations, ce calcul donne facilement

$$R^2 + \frac{a^2v^2}{u^2+v^2} + \frac{aw}{u} = 0,$$

ou

$$(8) \qquad aw(u^2+v^2) + R^2u(u^2+v^2) + a^2v^2u = 0.$$

C'est encore l'équation tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements, ayant Ox pour axe de symétrie.

Le sommet est l'intersection des droites (5) et (7)

$$bx - ay = \frac{ab(b^2-a^2)}{a^2+b^2}, \qquad ax + by = R^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Ce point a donc pour coordonnées

$$x = \frac{R^2a}{a^2+b^2} + \frac{ab^4}{(a^2+b^2)^2}, \qquad y = \frac{R^2b}{a^2+b^2} + \frac{ba^4}{(a^2+b^2)^2},$$

et, si on pose $R^2 = aa'$ et $b = at$,

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a'}{1+t^2} + \dfrac{at^4}{(1+t^2)^2}, \\ y = \dfrac{a't}{1+t^2} + \dfrac{at}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques d'une courbe du quatrième degré, symétrique aussi par rapport à l'axe des x et ayant ses directions asymptotiques deux à deux confondues avec les directions isotropes. Elle est donc aussi doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques.

Si nous voulons les équations ponctuelles des deux hypocycloïdes, il faudra poser $b = at$ dans les équations (5) et (7) et dériver par rapport à t. Ainsi l'équation (5) devient

$$tx - y = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1};$$

sa dérivée par rapport à t est

$$x = a\frac{(t^2+1)(3t^2-1) - 2t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}, \qquad x = a\,\frac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2};$$

elle fournit de suite x en fonction de t. Nous avons ensuite y par l'équation

$$y = tx + \frac{at(1-t^2)}{t^2+1},$$

qui nous donne

$$y = \frac{4at^3}{(t^2+1)^2}.$$

Les équations paramétriques de la première hypocycloïde sont donc

$$(10) \qquad \begin{cases} x = a\dfrac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2}; \\ y = \dfrac{4at^3}{(t^2+1)^2}. \end{cases}$$

Elles permettent de construire facilement cette courbe, dont nous donnons la forme ci-contre.

3° Soit (x, y) le pied d'une normale à la parabole ; la tangente au point (x, y) aura pour équation

$$x(X - x) + y(Y - y) = 0,$$

et nous aurons à écrire que le pôle de cette droite est le point (x, y), c'est-à-dire que

$$\frac{f'_u}{x} = \frac{f'_v}{y} = \frac{f'_w}{1},$$

en prenant $\quad u = x, \qquad v = y, \qquad w = -x^2 - y^2.$

Nous trouvons ainsi successivement

$$f'_u = 2R^2u + abv + aw = 2R^2x + aby - a(x^2 + y^2),$$
$$f'_v = 2R^2v + abu + bw = 2R^2y + abx - b(x^2 + y^2),$$
$$f'_w = au + bv = ax + by,$$

et

$$\frac{2R^2x + aby - a(x^2+y^2)}{x} = \frac{2R^2y + abx - b(x^2+y^2)}{y} = ax + by.$$

Les pieds des normales sont donc à l'intersection des deux coniques

$$f \equiv 2ax^2 + bxy + ay^2 - 2R^2x - aby = 0, \qquad g \equiv bx^2 + axy + 2by^2 - abx - 2R^2y = 0\,;$$

ces coniques se coupent à l'origine et en trois autres points qui sont les pieds des normales à la parabole menées par le point O. Pour avoir une troisième conique passant en ces trois points et ne passant pas à l'origine, il faut mettre chacune d'elles sous la forme $Ax + By = 0$, et éliminer la solution nulle entre elles, c'est-à-dire écrire que le déterminant $AB' - BA'$ est nul ; ceci nous donne

$$(2ax + by - 2R^2)(2by - 2R^2) - (ay - ab)(bx + ay - ab) = 0,$$

ou

$$h \equiv 3abxy + (2b^2 - a^2)y^2 + ab^2x + 2b(a^2 - 3R^2)y + 4R^4 - a^2b^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant aux trois points (x, y) est alors

$$\lambda f + \mu g + \nu h = 0,$$

et, en exprimant que cette conique se réduit à un cercle, nous avons

$$2a\lambda + b\mu = a\lambda + 2b\mu + \nu(2b^2 - a^2),$$
$$b\lambda + a\mu + 3ab\nu = 0,$$

ou encore

$$a\lambda - b\mu + \nu(a^2 - 2b^2) = 0,$$
$$b\lambda + a\mu + 3ab\nu = 0.$$

Nous déduisons de là

$$\frac{\lambda}{-a(a^2 + b^2)} = \frac{\mu}{-2b(a^2 + b^2)} = \frac{\nu}{a^2 + b^2}\,;$$

par suite, λ, μ, ν sont proportionnels à $\quad -a, \quad -2b, \quad 1$, et le cercle demandé a pour équation

$$af + 2bg - h = 0,$$

ou

(11) $$2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - a(2R^2 + 3b^2)x - b(3a^2 - 2R^2)y + a^2b^2 - 4R^4 = 0.$$

Le lieu des centres de ces cercles est une conique qui a pour équations paramétriques, quand b varie,

(12) $$\begin{cases} x = a\,\dfrac{2R^2 + 3b^2}{4(a^2 + b^2)}, \\[2ex] y = b\,\dfrac{3a^2 - 2R^2}{4(a^2 + b^2)}. \end{cases}$$

Quant au lieu des pieds des normales eux-mêmes, on l'obtiendra en éliminant b entre les équations $f = 0$, $g = 0$. Ce calcul est immédiat et donne

$$(x^2 + 2y^2 - ax)(2ax^2 + ay^2 - 2R^2x) - (xy - ay)(axy - 2R^2y) = 0;$$

puis, toutes réductions faites,

$$(13) \qquad a(x^2 + y^2)^2 - (a^2 + R^2)x^3 - R^2xy^2 + aR^2(x^2 - y^2) = 0.$$

C'est une courbe du quatrième degré, doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques, et ayant à l'origine un point double avec tangentes rectangulaires.

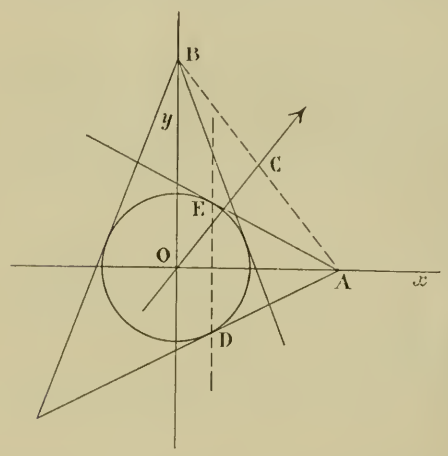
Remarques géométriques. — Nous savons que les coniques de l'énoncé forment un faisceau tangentiel dont le lieu des centres est la droite qui joint les milieux de trois diagonales du quadrilatère circonscrit. Ici l'une des diagonales est la droite AB, son milieu C est donc un centre ; d'autre part, le point O est évidemment un centre aussi, et la droite OC est le lieu des centres. Il n'y a qu'un seul centre à l'infini, le point à l'infini de OC ; il n'y a donc qu'une parabole dans le faisceau et elle a pour direction diamétrale OC. Ceci résulte d'ailleurs de ce qu'il n'y a qu'une conique tangente à cinq droites.

Pour que le point M soit un point où se coupent deux coniques rectangulaires, il faut que tous les couples de tangentes issues de ce point aient les mêmes bissectrices ; or OM est la bissectrice de l'angle des deux tangentes menées au cercle par le point M. Il y aura donc à exprimer que l'une des bissectrices de l'angle AMB passe au point O, c'est-à-dire que les deux couples de droites ayant pour coefficients angulaires $\frac{y}{x}$, $-\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{x-a}$, $\frac{y-b}{x}$ sont harmoniques. Ceci donne

$$-2 + \frac{2y(y-b)}{x(x-a)} - \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x-a} + \frac{y-b}{x}\right) = 0.$$

C'est l'équation de la strophoïde déjà rencontrée.

Nous avons déjà vu que OC est la direction de l'axe de la parabole. Cette droite et AB sont également inclinées sur Ox et sur Oy. Il en résulte, en appliquant le théorème de Poncelet au point A ou au point B, que le foyer de la parabole est sur AB. D'ailleurs, ce point F est tel que OF soit bissectrice de l'angle de FA avec FB ; donc OF est perpendiculaire sur AB : et le lieu du point F est le cercle décrit sur OA comme diamètre.



Soient D et E les points de contact des tangentes issues du point A au cercle ; le cercle décrit sur OA comme diamètre passe en D et E ; il est circonscrit au triangle ADE ; comme AD et AE restent tangents à la parabole, DE est aussi une tangente fixe de cette parabole, et, lorsque le point B varie, la parabole envisagée décrit un faisceau tangentiel de paraboles inscrites dans le triangle ADE.

La tangente au sommet est la droite de Simson du point F, on sait qu'elle enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements dont le cercle tritangent est le cercle des neuf points du triangle ADE. Soit H le point de concours des hauteurs du triangle ADE ; si on prend la figure homothétique dans le rapport 2 par rapport au point H, le cercle des neuf points vient coïncider avec le cercle circonscrit au triangle ADE, et la tangente au sommet vient coïncider avec une parallèle menée par le point F. L'axe est la perpendiculaire à cette droite menée par le point F et l'on sait qu'elle enveloppe la même hypocycloïde que l'autre droite ; c'est l'hypocycloïde homothétique de la précédente et dans le rapport 2 par rapport au point H.

Quant au lieu des sommets, rien de particulièrement intéressant à en dire. On pourrait trouver facilement sa forme à l'aide des équations (9).

Bonnes solutions : MM. R. Bouvaist ; Névéjans, lycée de Douai ; Louis Sire.

1770. — *On considère la courbe* (C) *dont les équations sont*

$$x = a(\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}\varphi'), \qquad y = a(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\varphi'),$$

φ et φ' étant deux paramètres liés par la relation

$$\operatorname{sh} 2\varphi - \operatorname{sh} 2\varphi' = 2\varphi - 2\varphi' + \alpha,$$

et a, α deux constantes.

1° *Former l'équation cartésienne de cette courbe.*

2° *En supposant que* α *varie, former l'équation différentielle des courbes* (C).

3° *Soient* M *un point quelconque de cette courbe,* P *le pied de l'ordonnée du point* M, T *et* N *les points de rencontre avec* Ox *de la tangente et de la normale en* M, *et* T′ *le symétrique de* T *par rapport au point* P; *montrer que l'on a la relation*

$$\mathrm{ON}.\mathrm{OT}' = 4a^2.$$

4° *Trouver toutes les courbes qui jouissent de cette propriété. Il y en a deux familles : la famille* (C) *et la famille* (Γ) *dont les équations sont*

$$x = a(\cos\varphi + \cos\varphi'), \qquad y = a(\cos\varphi - \cos\varphi'),$$

φ *et* φ' *étant deux paramètres liés par la relation*

$$\sin 2\varphi - \sin 2\varphi' = 2\varphi - 2\varphi' + \beta,$$

et β *une nouvelle constante arbitraire.*

5° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (C), *celles des courbes* (Γ) *et montrer que leur ensemble constitue toutes les coniques ayant mêmes axes en position et un même cercle orthoptique*

$$x^2 + y^2 = 4a^2.$$

1° Si nous posons $u = a\,\mathrm{ch}\,\varphi$, $v = a\,\mathrm{ch}\,\varphi'$, nous aurons $x + y = 2u$, $x - y = 2v$, et l'équation de condition pourra s'écrire

$$\frac{u}{a}\sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} - \frac{v}{a}\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} = \mathrm{L}\,\frac{e^{\varphi}}{e^{\varphi'}} + \frac{\alpha}{2}.$$

Pour calculer e^{φ}, nous avons l'équation

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \frac{u}{a}, \qquad e^{2\varphi} - \frac{2u}{a}\,e^{\varphi} + 1 = 0,$$

puis $e^{\varphi} = \dfrac{u}{a} + \sqrt{\dfrac{u^2}{a^2} - 1}$, le radical étant pris avec le double signe. La relation donnée s'écrit alors

$$(1) \qquad \frac{u}{a}\sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} - \mathrm{L}\left(\frac{u}{a} + \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1}\right) = \frac{v}{a}\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} - \mathrm{L}\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}\right) + \mathrm{C},$$

C étant la constante $\dfrac{\alpha}{2}$.

Si on remplace dans cette équation u par $\dfrac{x+y}{2}$ et v par $\dfrac{x-y}{2}$, on a l'équation cartésienne de cette famille de lignes. Cette équation ne présente d'ailleurs aucun intérêt spécial et nous ne l'écrirons pas.

2° En multipliant les deux membres par a^2, la relation devient

$$u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2\mathrm{L}(u + \sqrt{u^2 - a^2}) = v\sqrt{v^2 - a^2} - a^2\mathrm{L}(v + \sqrt{v^2 - a^2}) + \mathrm{C}'$$

et il suffit de prendre la différentielle des deux membres pour avoir l'équation différentielle demandée. On trouve ainsi

$$\sqrt{u^2 - a^2}\,du = \sqrt{v^2 - a^2}\,dv,$$

ou, en élevant au carré et groupant les sommes deux à deux,

$$(udu + vdv)(udu - vdv) = a^2(du + dv)(du - dv).$$

D'autre part,

$$2du = dx + dy, \qquad 2dv = dx - dy,$$

$$4(udu + vdv) = (x + y)(dx + dy) + (x - y)(dx - dy),$$

$$4(udu + vdv) = 2(xdx + ydy);$$

de même

$$4(udu - vdv) = 2(xdy + ydx);$$

enfin

$$2(du + dv) = 2dx, \qquad 2(du - dv) = 2dy,$$

et l'équation devient

$$(xdx + ydy)(xdy + ydx) = 4a^2dxdy,$$

ou enfin

$$(2) \qquad (x + yy')(xy' + y) = 4a^2y'.$$

3° Pour interpréter géométriquement cette équation, il nous suffit de considérer la tangente et la normale à la courbe au point courant (x, y),

$$Y - y = y'(X - x) \qquad \text{et} \qquad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Les segments déterminés sur Ox par ces deux droites, OT et ON, ont pour valeurs

$$OT = x - \frac{y}{y'}, \qquad ON = x + yy'.$$

Cela posé, soit T′ le symétrique de T par rapport à l'ordonnée du point M ; nous avons

$$OT + OT' = 2x;$$

donc

$$OT' = x - \frac{y}{y'},$$

et l'équation différentielle s'écrit

$$ON.OT' = 4a^2.$$

4. Pour avoir toutes les courbes qui satisfont à cette relation, il faut intégrer complètement l'équation différentielle (2), ou, ce qui revient au même, l'équation

$$(u^2 - a^2)du^2 = (v^2 - a^2)dv^2,$$

déduite de celle-là en posant $\quad x = u + v, \quad y = u - v.$

Si $u^2 > a^2$, v^2 est aussi plus grand que a^2, et l'équation prend la forme

$$\sqrt{u^2 - a^2}du = \sqrt{v^2 - a^2}dv;$$

elle redonne la famille de courbes dont nous sommes partis.

Si $u^2 < a^2$, $v^2 < a^2$, et l'équation s'écrit

$$\sqrt{a^2 - u^2}du = \sqrt{a^2 - v^2}dv;$$

en l'intégrant, nous trouvons

$$u\sqrt{a^2 - u^2} - a^2 \arccos\frac{u}{a} = v\sqrt{a^2 - v^2} - a^2 \arccos\frac{v}{a} + \beta,$$

ou

$$\frac{u}{a}\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} - \frac{v}{a}\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}} = \arccos\frac{u}{a} - \arccos\frac{v}{a} + \beta',$$

β' étant une constante arbitraire.

Il suffit de poser $\quad u = a\cos\varphi, \quad v = a\cos\varphi'$ pour avoir la seconde famille de courbes

$$x = a(\cos\varphi + \cos\varphi'), \qquad y = a(\cos\varphi - \cos\varphi'),$$

$$\sin 2\varphi - \sin 2\varphi' = 2\varphi - 2\varphi' + C, \qquad (C = 2\beta').$$

5. Les trajectoires orthogonales des courbes (C) et (Γ) s'obtiennent en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$ dans leur équation différentielle. Ceci nous donne

$$(xy' - y)(x - yy') - 4a^2y' = 0.$$

Cette équation s'intègre aisément en posant $\quad x^2 = u, \quad y^2 = v$; nous avons ainsi successivement

$$2xdx = du, \qquad 2ydy = dv,$$

$$xdx - ydy = \frac{du - dv}{2}, \qquad xdy - ydx = \frac{udv - vdu}{2xy},$$

et l'équation devient

$$(udv - vdu)(du - dv) = 4a^2dudv.$$

En posant $\quad \frac{du}{dv} = u', \quad$ elle s'écrit aussi

$$u = u'v + \frac{4a^2u}{u' - 1}.$$

Sous cette forme, on reconnaît une équation de Clairaut, qui s'intègre immédiatement en posant u' = une constante arbitraire λ. Les trajectoires orthogonales aux courbes (C) et (Γ) ont donc pour équation commune

$$u = \lambda v + \frac{4a^2\lambda}{\lambda - 1}, \qquad \text{ou} \qquad x^2 = \lambda y^2 + \frac{4a^2\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ce sont des coniques ayant pour longueurs d'axes $\alpha^2 = \frac{4a^2\lambda}{\lambda - 1}$, $\beta^2 = -\frac{4a^2}{\lambda - 1}$. Elles ont pour axes Ox et Oy et on a, en outre,

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4a^2,$$

ce qui justifie l'énoncé.

Cette méthode d'intégration est commode et rapide; elle présente cependant un inconvénient, celui de ne pas séparer les trajectoires orthogonales des courbes (C) de celles des courbes (Γ).

Reprenons donc la question pour les courbes (C). Nous avons

$$dx = a(\operatorname{sh}\varphi\, d\varphi + \operatorname{sh}\varphi' d\varphi'), \qquad dy = a(\operatorname{sh}\varphi d\varphi - \operatorname{sh}\varphi' d\varphi'),$$

et

$$2\operatorname{ch}2\varphi d\varphi - 2\operatorname{ch}2\varphi' d\varphi' = 2d\varphi - 2d\varphi',$$

ou

$$\operatorname{sh}^2\varphi d\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi' d\varphi' = 0;$$

par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sh}\varphi \operatorname{sh}^2\varphi' - \operatorname{sh}\varphi' \operatorname{sh}^2\varphi}{\operatorname{sh}\varphi \operatorname{sh}^2\varphi' + \operatorname{sh}\varphi' \operatorname{sh}^2\varphi},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sh}\varphi' - \operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\varphi' + \operatorname{sh}\varphi}.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales aux courbes (C) est donc

$$\frac{\operatorname{sh}\varphi d\varphi - \operatorname{sh}\varphi' d\varphi'}{\operatorname{sh}\varphi d\varphi + \operatorname{sh}\varphi' d\varphi'} = \frac{\operatorname{sh}\varphi + \operatorname{sh}\varphi'}{\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{sh}\varphi'};$$

elle se réduit à $d\varphi + d\varphi' = 0$, et donne $\varphi' = k - \varphi$, k étant une constante arbitraire.

Les équations paramétriques des trajectoires orthogonales des courbes (C) sont donc

$$x = a[\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}(k - \varphi)], \qquad y = a[\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}(k - \varphi)].$$

Chaque valeur de k donne l'une de ces trajectoires, et quand on fait varier k on a toutes les trajectoires de cette famille.

Les valeurs de x et de y s'écrivent autrement :

$$x = 2a\operatorname{ch}\frac{k}{2}\operatorname{ch}\left(\varphi - \frac{k}{2}\right), \qquad y = 2a\operatorname{sh}\frac{k}{2}\operatorname{sh}\left(\varphi - \frac{k}{2}\right);$$

en éliminant φ entre elles, on a l'équation cartésienne de la trajectoire qui correspond à la constante k :

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\frac{k}{2}} - \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\frac{k}{2}} = 4a^2.$$

C'est une hyperbole qui satisfait aux conditions indiquées.

Les ellipses sont les trajectoires orthogonales des courbes (Γ).

A. BAYET et RIEUMAJOU.

Bonnes solutions : MM. Bouligand, à Nantes; A. Mornal, au 1er d'infanterie; Névejans, à Douai; Bonnetète, à Dinan; Duréault.

1771. — *On considère une ellipse dont l'un des axes est double de l'autre. Soit* MP *la distance d'un point* M *variable de l'ellipse au petit axe. Le cercle décrit sur* MP *comme diamètre enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements. Solutions analytique et géométrique.*

Solution analytique. — Prenons pour axes de coordonnées OA et OB. Posons $OA = 2b$, $OB = b$. Les coordonnées du point M sont $x = 2b\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$; celles du point P, $x = 0$, $y = b\sin\varphi$. Par suite, l'équation du cercle décrit sur MP comme diamètre est

$$(1) \qquad x(x - 2b\cos\varphi) + (y - b\sin\varphi)^2 = 0.$$

Dérivons cette équation par rapport à φ, nous obtenons

$$(2) \qquad x\sin\varphi - (y - b\sin\varphi)\cos\varphi = 0.$$

Les coordonnées des points limites sont définies par les équations (1) et (2). De l'équation (2) nous tirons

$$y - b\sin\varphi = x\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

et, en portant cette valeur de $y - b\sin\varphi$ dans l'équation (1), nous avons une équation du deuxième degré en x qui admet la racine zéro et la racine $x = 2b\cos^3\varphi$.

Nous avons ainsi deux points limites : d'abord $x = 0$, $y = b\sin\varphi$, c'est le point P, puis

$$x = 2b\cos^3\varphi, \qquad y = b\sin\varphi + 2b\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

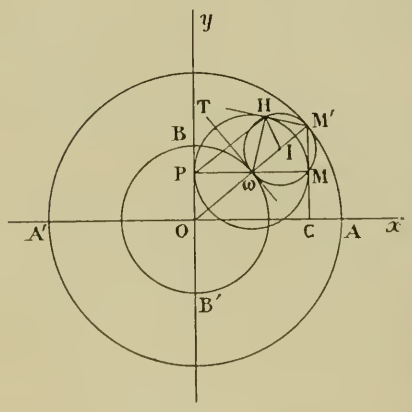
Ces deux équations peuvent encore s'écrire

$$(3) \qquad x = \frac{3b}{2}\cos\varphi + \frac{b}{2}\cos 3\varphi, \qquad y = \frac{3b}{2}\sin\varphi + \frac{b}{2}\sin 3\varphi.$$

On reconnaît les équations paramétriques d'une épicycloïde à deux rebroussements. En effet, construisons un vecteur OI égal à $\frac{3b}{2}$ et faisant avec OA l'angle φ; puis, un vecteur IH égal à $\frac{b}{2}$ et faisant avec OA l'angle 3φ. Les formules (3) donnent les coordonnées du point H.

On voit aisément que l'angle de IH avec IO est égal à $b - 2\varphi$, c'est-à-dire au double de l'angle IOB. Par suite le cercle de centre I et de rayon $\frac{b}{2}$ roule sur le cercle de centre O et de rayon b, et le point H décrit une épicycloïde à deux rebroussements.

Solution géométrique. — Soient OA et OB les axes de l'ellipse, $OA = 2OB$; pour construire un point quelconque de l'ellipse, nous prenons un point M′ sur le cercle homographique de rayon OA, nous menons M′C perpendiculaire sur OA. Le point M, milieu de M′C, est un point de l'ellipse.



Le centre ω du cercle qui a pour diamètre MP est à la fois le milieu de MP et de OM′; donc ce point décrit le cercle de centre O et de rayon OB.

Le cercle infiniment voisin du cercle (ω) le rencontre d'abord au point P, puis au point H, symétrique du point P par rapport à la ligne des centres, qui est ici la tangente ωT au point ω au cercle OB.

Tout revient à trouver le lieu du point H.

Les deux triangles OPω et M′Hω étant symétriques par rapport à ωT, l'angle ωHM′ est droit; par suite le cercle qui a pour diamètre ωM′ et pour centre le point I passe par le point H. De plus, les angles HM′ω et POω étant égaux, l'arc ωH du cercle (I) est égal à l'arc ωB du cercle (OB). Il en résulte que le cercle (I) roule sur le cercle (OB) et que le point H engendre une épicycloïde à deux rebroussements qui sont les points B et B′.

BONNETÈTE, à Dinan.

Bonnes solutions par MM. Jean Bing; Blarez; F. Champanhac, lycée de Marseille; J. Coulange et J. Vérots, école des Anglais, à Lyon; A. Courtois, lycée de Douai; André Duby, lycée de Dijon; Charles Guillerme, lycée de Lyon; M. Jacquemetton, lycée de Douai; G. Lach, à Denain; R. Manen, à Albi; Marescalchi; Névejans, lycée de Douai; Rieumajou; A. Rousseau, à Landrecies; L. Simon, à Châlons-sur-Marne; Louis Sire, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

1841. — 1° Déterminer et construire les courbes (E) telles que la tangente et la normale en chaque point M déterminent sur Ox un segment de mesure algébrique constante a.

2° Calculer, en fonction de l'angle polaire α de la demi-tangente positive de la courbe (C) qui passe à l'origine, les coordonnées de M, l'arc OM et le rayon de courbure en M. Calculer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe.

3° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (C).

4° On considère les tangentes aux différentes courbes (C) en leurs points de rencontre avec Oy. Trouver et construire l'enveloppe (E) de ces tangentes.

5° On suppose que a varie et on demande les trajectoires orthogonales (T) des courbes (E).

6° Construire la podaire relativement à l'origine de la courbe (C) qui passe en ce point et celle d'une courbe (T) quelconque.

J. Haag.

1842. — On considère deux figures homographiques F et F′ dans l'espace et deux points quelconques A et B : lieu géométrique des points M tels que AM et BM contiennent deux points homologues P et P′ des deux figures ; lieu géométrique de ces points P et P′.

J. Lemaire.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE

1777. — *Un point matériel non pesant* M *ayant une masse égale à* 1 *est assujetti à glisser sans frottement sur la courbe*

$$(C) \qquad x = \frac{2}{3}t^3, \qquad y = t^2, \qquad z = t,$$

sous l'action d'une force variable constamment tangente à la trajectoire, de telle sorte que les équations du mouvement soient justement les équations (C).

1° *Déterminer cette force tangentielle ainsi que la réaction normale* MN *de la courbe* (C) *sur le point* M.

2° *Trouver le lieu engendré par la ligne d'action de la force* MN. *Ce lieu est une surface réglée, unicursale et à plan directeur ; donner ses équations en fonction de deux paramètres.*

3° *Trouver le lieu de l'extrémité* N *du vecteur* MN *et construire la projection de ce lieu sur le plan des* yz.

4° *Trouver le lieu du centre de courbure de la courbe* (C).

1° Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = 2t^2, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t, \qquad \frac{dz}{dt} = 1,$$

et celles de l'accélération,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0\ ;$$

par conséquent, la vitesse a pour valeur

$$v = \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} = 2t^2 + 1.$$

La force tangentielle F_t est égale à $\frac{dv}{dt}$: elle a donc pour valeur $F_t = 4t$, F_t étant évaluée sur un axe orienté dans le sens de la vitesse.

Si nous appelons X, Y, Z les composantes du vecteur F_t, nous aurons

$$\frac{X}{2t^2} = \frac{Y}{2t} = \frac{Z}{1} = \frac{F_t}{v} = \frac{4t}{2t^2+1};$$

par suite

$$X = \frac{8t^3}{2t^2+1}, \qquad Y = \frac{8t^2}{2t^2+1}, \qquad Z = \frac{4t}{2t^2+1}.$$

D'autre part, les composantes de la réaction F_n, X', Y', Z', sont données par les équations

$$X' + X = \frac{d^2x}{dt^2} = 4t, \qquad Y' + Y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2, \qquad Z' + Z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

et nous avons en outre

$$F_n^2 + F_t^2 = 16t^2 + 4.$$

Nous voyons donc que $F_n = 2$ et que ses composantes sont

$$X' = 4t - X = \frac{4t}{2t^2+1}, \qquad Y' = 2 - Y = \frac{2-4t^2}{2t^2+1}, \qquad Z' = 0 - Z = \frac{-4t}{2t^2+1}.$$

Nous avons ainsi les deux forces F_t, F_n et leurs composantes ; nous connaissons donc parfaitement les deux vecteurs F_t et F_n.

2° La ligne d'action de MN a pour équation

$$\frac{x - \frac{2}{3}t^3}{X'} = \frac{z - t^2}{Y'} = \frac{z - t}{Z'},$$

ou

$$\frac{x - \frac{2}{3}t^3}{4t} = \frac{y - t^2}{2 - 4t^2} = \frac{z - t}{-4t},$$

et si nous appelons λ la valeur commune des rapports, nous voyons que les équations paramétriques du lieu de MN sont

$$x = \frac{2}{3}t^3 + 4\lambda t, \qquad y = t^2 + \lambda(2 - 4t^2), \qquad z = t - 4\lambda t,$$

λ et t étant deux paramètres variables.

Cette surface est une surface réglée, unicursale ; les deux systèmes de lignes coordonnées sont $t = C^{te}$ et $\lambda = C^{te}$. Les lignes $t = C^{te}$ sont les droites de la surface et les lignes $\lambda = C^{te}$ forment un système de lignes parmi lesquelles il y a la ligne proposée et une ligne du plan des xy, la ligne

$$\lambda = \frac{1}{4}.$$

La direction de la génératrice t est fournie par

$$\frac{x}{4t} = \frac{y}{2 - 4t^2} = \frac{z}{-4t}.$$

Cette droite est toujours parallèle au plan $x + z = 0$, qui est un plan directeur de la surface.

3° Le lieu du point N a pour équations paramétriques

$$x = \frac{2}{3}t^3 + X' = \frac{2}{3}t^3 + \frac{4t}{2t^2+1},$$

$$y = t^2 + Y' = t^2 + \frac{2-4t^2}{2t^2+1}.$$

$$z = t + Z' = t - \frac{4t}{2t^2+1}.$$

La projection sur le plan des yz a pour équations

$$y = \frac{2t^4 - 3t^2 + 2}{2t^2 + 1}, \qquad z = \frac{2t^3 - 3t}{2t^2 + 1}.$$

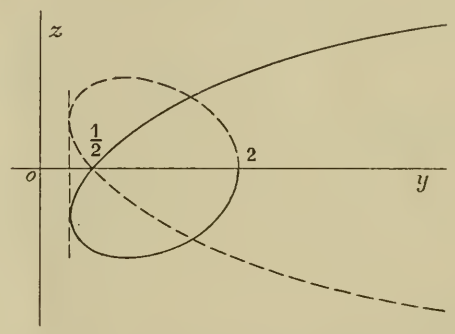
Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, car si on change t en $-t$, y ne change pas et z ne fait que changer de signe. Il suffit donc de faire varier t de 0 à $+\infty$; y est toujours positif et z s'annule deux fois, pour $t = 0$ et $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Les dérivées sont

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t(4t^4 + 4t^2 - 7)}{(2t^2 + 1)^2}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{4t^4 + 12t^2 - 3}{(2t^2 + 1)^2};$$

la première est nulle pour $t^2 = \frac{-2+\sqrt{32}}{4}$, ou $t^2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$; la deuxième, pour $t^2 = \frac{-6+\sqrt{48}}{4}$, ou $t^2 = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$. La première valeur de t est visiblement supérieure à l'autre ; $\frac{dz}{dt}$ change de signe avant $\frac{dy}{dt}$. Enfin $\frac{3}{2}$ est encore plus grand que $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$; par conséquent la courbe revient à l'axe des y après que les deux dérivées ont changé de signe. Au départ, pour $t = \varepsilon$, les deux dérivées sont négatives, les deux fonctions sont décroissantes. Tous les résultats sont réunis dans le tableau ci-dessous et la courbe est figurée à côté. Il n'y a plus qu'à l'achever par symétrie.

t	y'	y	z'	z
0		2		0
	—	décr.	—	décr.
$\sqrt{\sqrt{3} - \frac{3}{2}}$	—	décr.	0	Min.
$\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$	0	Min.	+	cr.
		cr.	+	cr.
$\sqrt{\frac{3}{2}}$	+	$\frac{1}{2}$		0
	+	cr.		cr.
$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$



4° Pour trouver le centre de courbure, il faut d'abord calculer ρ. Ceci se fait à l'aide de la formule $\frac{v^2}{\rho} = \gamma_n$. Comme ici v et γ_n sont connus, on a $\rho = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{(2t^2 + 1)^2}{2}$.

Par conséquent, en appelant X_1, Y_1, Z_1 les composantes du rayon de courbure, MC, on a

$$\frac{X_1}{X'} = \frac{Y_1}{Y'} = \frac{Z_1}{Z'} = \frac{(2t^2 + 1)^2}{4},$$

et

$$X_1 = X' \frac{(2t^2 + 1)^2}{4}, \qquad Y_1 = Y' \frac{(2t^2 + 1)^2}{4}, \qquad Z_1 = Z' \frac{(2t^2 + 1)^2}{4}.$$

En remplaçant X', Y', Z' par leurs valeurs, on trouve

$$X_1 = t(2t^2 + 1), \qquad Y_1 = \frac{1 - 4t^4}{2}, \qquad Z_1 = -t(2t^2 + 1);$$

les coordonnées du centre de courbure sont donc

$$x = \frac{2t^3}{3} + t(2t^2+1) = \frac{8t^3+3t}{3}, \quad y = \frac{-4t^4+1}{2} + t^2 = \frac{-4t^4+2t^2+1}{2}, \quad z = t - t(2t^2+1) = -2t^3.$$

Ce sont les équations paramétriques d'une courbe du quatrième ordre, dont les projections sur les plans de coordonnées sont aisées à construire.

RIEUMAJOU, à Sétif.

Bonne solution : M. A. Rousseau, à Landrecies.
Assez bonne solution : MM. J. Vérots et J. Collange, école des Anglais à Lyon.

1778. — *Soient γ_t et γ_n l'accélération tangentielle et l'accélération normale d'un point mobile dans le plan des deux axes rectangulaires Ox, Oy, V_x et V_y les projections de la vitesse du point sur ces deux axes.*

1° *Sachant que* $\frac{\gamma_t}{V_y} = \pm \frac{\gamma_n}{V_x}$, *trouver l'hodographe.*

2° *Sachant en outre que* $\frac{\gamma_t}{V_y}$ *est constant, trouver la trajectoire et la loi du mouvement.*

1. Posons $V_x = X$, $V_y = Y$; X et Y sont les coordonnées d'un point de l'hodographe. La relation donnée $\frac{\gamma_t}{V_y} = \pm \frac{\gamma_n}{V_x}$ peut s'écrire

$$\frac{\gamma_t^2}{Y^2} = \frac{\gamma_n^2}{X^2} = \frac{\gamma_t^2+\gamma_n^2}{X^2+Y^2} = \frac{\gamma^2}{X^2+Y^2},$$

γ désignant l'accélération totale. Mais on a

$$\gamma^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2, \qquad \gamma_t = \frac{dV}{dt} = \frac{X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt}}{\sqrt{X^2+Y^2}};$$

on en déduit

$$\frac{\left(X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt}\right)^2}{Y^2(X^2+Y^2)} = \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}{X^2+Y^2},$$

ou

$$(XdX + YdY)^2 - Y^2(dX^2 + dY^2) = 0,$$

ou enfin

$$[(X^2 - Y^2)dX + 2XYdY]dX = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$dX = 0, \qquad (X^2 - Y^2)dX + 2XYdY = 0.$$

La première donne des droites $X = C^{te}$, parallèles à Oy.

La deuxième est une équation homogène, qui s'intègre en posant $Y = TX$, $dY = TdX + XdT$, et devient

$$\frac{2TdT}{1+T^2} + \frac{dX}{X} = 0.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$L(1+T^2) + LX = LC,$$

puis

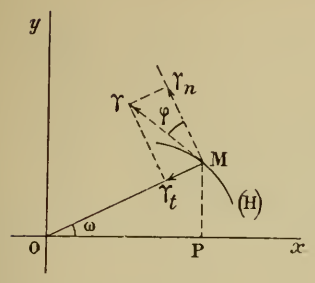
$$X(1+T^2) = C;$$

en remplaçant T par $\frac{Y}{X}$ on obtient le faisceau de cercles

$$X^2 + Y^2 - CX = 0,$$

qui sont tangents à l'origine à l'axe Oy.

Il est d'ailleurs facile de contrôler ces résultats. La vitesse du point M de l'hodographe (H) est un vecteur $M\gamma$ équipollent à l'accélération, et ses composantes suivant le rayon vecteur OM et la perpendiculaire sont précisément γ_t et γ_n.



Par suite, l'égalité donnée $\frac{\gamma_t}{V_y} = \pm \frac{\gamma_n}{V_x}$ exprime que les deux triangles rectangles $M\gamma\gamma_n$ et MOP sont semblables, ou que les angles ω et φ sont égaux.

On vérifiera aisément que cette propriété appartient aux droites parallèles à Oy et aux cercles tangents à Oy au point O.

2. Nous avons par hypothèse $\gamma_t = kV_y$, ou $\frac{dV}{dt} = k\frac{dy}{dt}$,

ou, en intégrant,

$$V = k(y - y_0), \tag{1}$$

y_0 désignant une constante arbitraire.

Prenons d'abord le cas où l'hodographe est une parallèle à Oy, $X = a$; nous avons alors

$$\frac{dx}{dt} = a, \qquad dt = \frac{dx}{a},$$

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = a^2\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = a^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

La relation (1) nous donne alors

$$a^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = k^2(y - y_0)^2;$$

c'est l'équation différentielle de la trajectoire. On en déduit

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{k^2(y - y_0)^2}{a^2} - 1}},$$

et

$$\frac{k}{a}(x - x_0) = L\left[k\frac{y - y_0}{a} + \sqrt{k^2\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - 1}\right],$$

ou

$$k\frac{y - y_0}{a} + \sqrt{k^2\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - 1} = e^{\frac{k}{a}(x - x_0)}.$$

Egalons les inverses des deux membres, nous avons

$$k\frac{y - y_0}{a} - \sqrt{k^2\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - 1} = e^{-\frac{k}{a}(x - x_0)};$$

puis, en ajoutant,

$$y - y_0 = \frac{a}{2k}\left[e^{\frac{k}{a}(x - x_0)} + e^{-\frac{k}{a}(x - x_0)}\right].$$

La trajectoire est une chaînette.

Le mouvement sur cette trajectoire est défini par l'équation $\frac{dx}{dt} = a$, ce qui montre que la projection du mouvement sur Ox est uniforme.

Examinons maintenant le cas où l'hodographe est le cercle $X^2 + Y^2 - aX = 0$. Nous en tirons

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - a\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad dt = \frac{dx^2 + dy^2}{a\,dx},$$

et

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{a^2dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{a^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire se déduit alors de la relation $v = k(y - y_0)$, et s'écrit

$$\frac{a^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k^2(y - y_0)^2,$$

ou

$$dx = \pm \frac{k(y - y_0)dy}{\sqrt{a^2 - k^2(y - y_0)^2}}.$$

On en tire

$$x - x_0 = \pm \frac{1}{k}\sqrt{a^2 - k^2(y - y_0)^2},$$

ou

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{a^2}{k^2}.$$

La trajectoire est un cercle, et le mouvement sur cette trajectoire se déduit aisément de la relation $v = k(y - y_0)$.

G. BOULIGAND, élève à l'Ecole Normale supérieure.

Solutions satisfaisantes par MM. Amblard, à Rnines; J. Coulange et J. Vérots, école des Anglais, à Lyon; G. Lach, à Denain; Maurice Larroque, à Toulouse; Rieumajou, à Sétif; A. Rousseau, à Landrecies.

ÉCOLE CENTRALE (1909).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

4726. — Primitives des fonctions suivantes :

$y' = a^{2x}$, $y' = \sin^2 x$, $y' = \cos^2 x$, $y' = \cos^3 x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y' = \frac{1}{\cos^3 x}$, $y' = \sin^2 x \cos^2 x$, $y' = \operatorname{tg}^2 x$, $y' = \operatorname{tg}^3 x$,

$y' = \operatorname{tg}^4 x$, $y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4}$, $y' = \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 2\sin x + 1}$, $y' = \frac{1}{x - a}$, $y' = \frac{3x}{x+1}$, $y' = \frac{x}{3x-1}$, $y' = \frac{3x}{4x-5}$,

$y' = \frac{x+1}{x+2}$, $y' = \frac{x}{4x+1}$, $y' = \frac{4x}{2x+1}$, $y' = \frac{3x}{8x+5}$, $y' = \frac{x+1}{x-1}$, $y' = \frac{1}{a^2 - x^2}$, $y' = \frac{4}{5 - x^2}$,

$y' = \frac{4x^2}{5 - x^2}$, $y' = \frac{x^2}{x^2 - 1}$, $y' = \frac{1}{3x^2 + 4}$, $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$, $y' = \frac{x+3}{4x^2 + 9}$, $y' = \frac{3}{x^2 + x + 1}$,

$y' = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1}$, $y' = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$, $y' = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $y' = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$, $y' = \frac{1}{x^2 + x + 1}$,

$y' = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$, $y' = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3}$, $y' = \frac{x}{2x^2 + x + 1}$, $y = \frac{x}{4x^2 + 4x + 3}$,

$y' = \frac{x}{5x^2 + x + 1}$, $y' = \frac{x^2}{3x^2 + x + 1}$, $y' = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$, $y' = \frac{1}{x^3 + x - 2}$,

$y' = \frac{x}{x^3 - 4x + 3}$, $y' = \frac{x^3}{x^3 - 3x + 2}$, $y' = \frac{x^3}{x^3 + 5x - 6}$, $y' = \frac{x^4}{x^3 + x - 2}$, $y' = \frac{x^3}{2x^3 - x - 1}$,

$y' = \frac{x^3}{2x^3 - 3x + 1}$, $y' = \frac{x^3}{x^3 + x^2 + x - 3}$, $y' = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$,

$y' = \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}$, $y' = \frac{x}{\sqrt{5 - 3x^2}}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$, $y' = \frac{5}{\sqrt{5 - x^2}}$, $y' = \frac{2}{\sqrt{5 - 3x^2}}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x^2}}$,

$y' = \frac{4}{\sqrt{2 - 3x^2}}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{3 - 8x^2}}$, $y' = \frac{4}{\sqrt{5 - 8x^2}}$, $y' = \frac{x+1}{\sqrt{-5 - 4x^2}}$,

$y' = \frac{2x - 1}{\sqrt{4 - 3x^2}}$, $y' = \frac{x}{\sqrt{3 + x - 2x^2}}$, $y' = \frac{2x}{\sqrt{1 + x - x^2}}$, $y' = \frac{x+1}{\sqrt{1 - x - x^2}}$, $y' = \frac{x+1}{\sqrt{4 - x - 3x^2}}$,

$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $y' = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 1}}$,

$$y' = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + x - 5}}, \qquad y' = \frac{2x + 5}{\sqrt{3x^2 + x + 1}}.$$

4727. — Calculer $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + i\right)^8$.

4728. — Racine carrée de $8 + 6i$.

4729. — Racines cubiques de -8, i, $-i$, $1 - i$, $2 + 11i$, $i + \sqrt{3}$, $i - \sqrt{3}$, $2i + \sqrt{3}$.

4730. — Racines quatrièmes de i, de $-i$.

4731. — Que signifie $e^{i\theta}$? Montrer que $e^{i\alpha}.e^{i\theta} = e^{i(\alpha+\theta)}$.

4732. — Résoudre les équations

$$x^4 + 16 = 0, \qquad x^5 + 1 = 0, \qquad x^5 + 32 = 0, \qquad x^6 + 1 = 0, \qquad x^8 + 1 = 0, \qquad x^{10} + 1 = 0,$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \qquad x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0,$$

$$x^4 - x^2 + 4 = 0, \qquad 4x^4 + x^2 + 1 = 0, \qquad x^4 + 2x^2 + 9 = 0, \qquad x^{12} + x^6 + 1 = 0.$$

$$x^4 + 2x^2 - i\sqrt{3} = 0, \qquad x^4 - 2x^2 + 2i + 1 = 0, \qquad x^4 - 3x^2 + 3i + 1 = 0,$$

$$x^6 - x^3 + i + 1 = 0, \qquad x^6 + 2x^3 + i\sqrt{3} = 0.$$

4733. — Etablir les relations entre les coefficients et les racines pour une équation du troisième degré. Condition pour que les trois racines soient en progression géométrique.

4734. — On donne l'équation $4x^3 - 3x + m = 0$; déterminer m pour que la somme des carrés de deux racines soit égale à l'unité.

4735. — Déterminer m pour que le produit de deux des racines de l'équation

$$t^3 - 3t^2 - 3t + m = 0$$

soit égal à 1.

4736. — Condition pour que l'équation $x^3 - 6x^2 + m = 0$ ait une racine double. Même question pour les équations

$$x^3 - 12x + \lambda = 0, \qquad x^5 - 5x^4 + \lambda = 0.$$

4737. — Etant donnée l'équation $\lambda x^3 + x^2 - 1 = 0$, calculer $\Sigma \frac{1}{a^2}$, Σa^2.

4738. — Calculer $\Sigma \frac{1}{1 + a^2}$ pour l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$.

4739. — Combien l'équation $2x^3 - 3x^2 + \lambda = 0$ admet-elle de racines entre -1 et $+1$?

4740. — Combien l'équation $x^3 - 3x^2 + \lambda = 0$ a-t-elle de racines comprises entre -2 et $+3$?

4741. — Discuter les équations

$$x^4 - 4x^3 + m = 0, \qquad x^4 - 4x + m = 0, \qquad (x + 1)^7 - x^7 - m = 0, \qquad x^3 + ax^2 + b = 0,$$

$$x^3 - 3ax^2 + b = 0, \qquad x^5 + 5ax + b = 0, \qquad x^3 - 3x^2 + px + q = 0, \qquad (x + a)^3 - 3R^2x - aR^2 = 0.$$

4742. — Condition pour que l'équation $x^3 + 3x^2 + m = 0$ ait ses trois racines réelles. Calculer pour $m = 1$, par la méthode des parties proportionnelles.

4743. — Théorème de Descartes. Expliquer sur l'exemple

$$x^8 + 2x^7 - 8x^3 + 4x^2 - 3x - 7 = 0.$$

4744. — Limite supérieure des racines de l'équation

$$x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 1000 = 0.$$

4745. — L'équation $x^4 - 4x + 3 = 0$ a-t-elle des racines fractionnaires ?

4746. — Appliquer la méthode des parties proportionnelles à l'équation $x^2 - 85 = 0$.

4747. — Appliquer la méthode de Newton à la résolution des équations

$$x^2 - 150 = 0, \qquad x^2 = 238.$$

4748. — On donne l'équation $x^2 - 204 = 0$; limite supérieure des racines ; recherche des racines par la méthode de Newton.

4749. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^3 + y^3 = ab^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = ab^4. \end{cases}$$

4750. — Résoudre les inégalités

$$x^3 - 3x + 2 > 0, \qquad x^3 + x^2 + x - 3 > 0, \qquad \frac{x^3 + 4x - 5}{x - 2} < 0,$$

$$\frac{x^3 - 2x}{x - 2} > 1, \qquad \frac{x^2 - 2x}{x - 2} > 1, \qquad \frac{x^2 - x}{4x - 6} > 1, \qquad \frac{x^2 - x + n}{x - 1} > 0.$$

4751. — Décomposer les fractions $\frac{1}{x^3 - 1}$, $\frac{x^2}{x^3 - 3x - 2}$ en éléments simples.

4752. — Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg} 15°$, $\operatorname{tg} 75°$.

4753. — La dérivée de $\sin x$ est-elle encore $\cos x$, quand l'arc x est évalué en degrés ?

4754. — Résoudre les équations

$$\sin 3x = \cos 8x, \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

4755. — Calculer $\cos 4a$, $\cos 8a$ en fonction de $\cos a$.

4756. — Calculer la somme

$$\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{2\pi}{8} + \ldots + \sin m\frac{\pi}{8}.$$

4757. — Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 4x + \sin 7x = 0.$$

4758. — Résoudre l'inégalité $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 > 0$.

4759. — Résoudre (et discuter) les équations suivantes

$$\cos x - \sin x = m, \qquad \sin x + \cos x = m\sin x.\cos x, \qquad \sin^6 x + \cos^6 x = m,$$

$$\frac{\sin x}{\sin(30^\circ - x)} = m, \qquad 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} = m, \qquad \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = m.$$

4760. — Résoudre le système

$$x + y = \alpha, \qquad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m.$$

4761. — Montrer que les angles d'un triangle rectangle vérifient la relation

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

4762. — Les côtés a, b, c d'un triangle étant liés par la relation

$$a = \frac{c^2 - b^2}{b},$$

en déduire une relation entre les angles.

4763. — Résoudre un triangle connaissant les angles A, B, C et le périmètre $2p$. — Rendre calculable par logarithmes la somme $\sin A + \sin B + \sin C$. — Relation entre les cosinus des angles d'un triangle. — Relation entre les tangentes.

4764. — Résoudre un triangle connaissant les trois angles A, B, C et une hauteur h_a.

4765. — Résoudre un triangle connaissant les trois angles et la longueur d'une bissectrice.

4766. — Résoudre un triangle connaissant : 1° a, A, $b + c = m$; 2° a, A, $b - c = m$; 3° a, A, $bc = m^2$;

4° a, A, $\frac{b}{c} = k$; 5° a, A, $\cos A + \cos B + \cos C = k$;

6° a, A, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = k$; 7° a, A, $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = k$; 8° a, A, $\operatorname{tg} A.\operatorname{tg} B.\operatorname{tg} C = k$;
9° a, A, h_a; 10° b, A, h_a; 11° a, h_a, $b + c = m$.

4767. — Résoudre un triangle connaissant b, c et sachant que $C = 3B$.

4768. — Distance de deux points inaccessibles.

4769. — On donne un cercle de rayon R ; on y inscrit un triangle isocèle de surface S donnée. Former l'équation qui donne la hauteur, ou le demi-angle au sommet.

Géométrie analytique et Mécanique (M. Jablonski).

4770. — Que représente la formule $\sqrt{a^6 + b^6 + c^6}$, où a, b, c désignent des longueurs ? — Construire ce volume en supposant qu'on ait pris pour base un carré de côté a.

4771. — Construire les racines de l'équation

$$(a - b)x^4 - a^3x^2 + b^5 = 0,$$

a, b désignant des longueurs données.

4772. — Mener par un point (x_0, y_0) un cercle orthogonal au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Lieu des centres des cercles répondant à la question. Interprétation géométrique.

4773. — Construire les courbes

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}, \qquad y = x^2 \pm \frac{1}{\sqrt{x - 1}},$$

$$y = \frac{x + \sqrt{x^3 - 1}}{x + 1}, \qquad y = \frac{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{x^4 - 1}}{x - 4}.$$

4774. — Construire les courbes

$$x = \frac{t^2}{t + 1}, \qquad y = \frac{t^3}{t^2 - 1};$$

$$x = \frac{t}{t^2 - 4}, \qquad y = \frac{t^3}{t - 2};$$

$$x = t + \sqrt{t^2 - 1}, \qquad y = \sqrt{t - t^2}.$$

4775. — Construire les courbes

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega - 1}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{1 + \operatorname{tg}\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin^2\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin^2\omega}{1 - \operatorname{tg}\omega},$$

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega} + \frac{1}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\omega}{\cos 2\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\omega + \cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}.$$

4776. — Construire la courbe $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

4777. — Tangentes à l'origine à la courbe
$$x^4 + y^4 + x^3 + y^3 + x^2 - 4xy + y^2 = 0.$$

4778. — Détermination des asymptotes d'une courbe algébrique
Faire la théorie sur l'exemple suivant :
$$(y^2 - x^2)(x - 2y) + x + y = 0.$$

4779. — Podaire d'un point A $(a, 0)$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

4780 — Trouver les courbes pour lesquelles la sous-normale en un point est proportionnelle à l'abscisse du point.

4781. — Résoudre les inégalités
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 > 0, \qquad \frac{x+y}{x-y} + \frac{x}{y} > 1.$$

4782. — Réduction de l'équation
$$x^2 - y^2 + 4xy - 2x + y + 1 = 0.$$
Même question pour l'équation $3x^2 - 4xy + y^2 - 2x = 0$. Centre, asymptotes, axes, sommets, foyers.

4783. — Construire la courbe $xy + x + y - 2 = 0$. Asymptotes, axes, distinguer l'axe transverse de l'autre ; coordonnées des sommets réels et longueur du demi-axe transverse.

4784. — Réduction de l'équation
$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 3x - y = 0.$$
Axe et tangente au sommet. Paramètre.

4785. — Axe et sommet, tangente au sommet et foyer de la parabole
$$x^2 - 4xy + 4y^2 + x - y + 1 = 0.$$

4786. — Trouver sur une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ de sommets A et A' un point M, tel que $MA + MA' = 2l$. Discussion.

4787. — Formules de Chasles pour l'ellipse (et pour l'hyperbole). Soit une ellipse rapportée à ses axes de symétrie, OM, ON deux demi-diamètres conjugués, P et Q les projections sur Ox des extrémités M et N de ces deux demi-diamètres ; montrer que $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = C^{te}$. On considère un diamètre variable Oz faisant l'angle α avec Ox ; calculer la somme des carrés des projections de OM et ON sur le diamètre Oz ; étudier les variations de cette somme quand α varie.

4788. — Etudier les coniques du faisceau
$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2\lambda(x + y) - 1 = 0.$$
Paraboles, cercles, systèmes de droites du faisceau. — Quelles particularités présentent ces droites ?

4789. — Mener par la droite $x + y - 1 = 0$, $x + z - 3 = 0$ le plan perpendiculaire au plan $x + 3y - z = 0$.

4790. — Faire tourner d'un angle α le plan $2x + 3y - z - 1 = 0$ autour de son intersection avec le plan
$$x + y + z - 1 = 0.$$

4791. — Que représente l'équation $2x + y + \lambda(y - z + 1) = 0$, dans laquelle λ désigne un paramètre variable ? — Comment tourne le plan représenté par cette équation quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$?

4792. — Faire tourner la droite $x = az + h$, $y = bz + k$ d'un angle α autour de la droite $x = y = z$, sur laquelle on a choisi un sens positif.

4793. — Mener par la droite $x + y - z = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$ un plan P faisant l'angle α avec le plan $x - y = 0$.

4794. — Mener par la droite $x = az + h$, $y = bz + k$ un plan faisant l'angle α avec le plan d'équation
$$lx + my + nz = 0.$$

4795. — Mener par une droite D un plan faisant un angle donné avec une autre droite Δ. — Cas où D et Δ sont concourantes.

4796. — Distance du point (x_0, y_0, z_0) à la droite $ax + by = 0$, $z = l$.

4797. — Distance du point $(-1, 2, 3)$ à la droite
$$x = 3z - 2, \qquad y = 2z + 1.$$

4798. — Distance du point $(1, 2, -1)$ à la droite
$$x - y = 0, \qquad x + z + 1 = 0.$$

4799. — Distance du point $(1, 2, 3)$ à la droite
$$x + y - z - 1 = 0, \qquad x - y + z + 1 = 0.$$

4800. — Plus courte distance des deux droites
$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4, \\ z = 3. \end{cases}$$

4801. — Distance de la droite $x = z$, $y = 2z - 1$ à l'axe des z.

4802. — Distance de l'axe Ox à la droite $x + y = 0$, $y + z - 1 = 0$.

4803. — Distance de la droite $x = y = z$ à la droite
$$x - 3y - 1 = 0, \quad x + z = 0.$$

4804. — Plan osculateur à l'hélice circulaire $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$.

4805. — Equation du cône ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur la courbe d'équations
$$x + y + z - 1 = 0, \qquad xy - 1 = 0.$$

4806. — Cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe
$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0, \qquad x^2 - y^2 - 3x - 2z = 0.$$

4807. — Surface de révolution engendrée par la droite $x = 1$, $y = 2$ en tournant autour de la droite
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}.$$

Montrer que les plans diamétraux correspondant à des directions parallèles à un même plan, passent par une droite fixe, qui est le diamètre conjugué de ce plan.

4808. — Sections de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ par le plan $ux+vy+wz+h=0$; comment détermine-t-on les directions asymptotiques de l'une de ces sections? Utiliser le cône asymptote.

4809. — Mener à la surface $x^2-y^2+z^2-1=0$ un plan tangent parallèle au plan $x+y+z=0$.

4810. — Mener à la surface $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$ un plan tangent parallèle au plan $ux+vy+wz=0$.

4811. — Sections planes du paraboloïde $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$; section par un plan parallèle à l'axe, déterminer le sommet d'une pareille section.

4812. — Trouver les plans de sections circulaires dans le paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0.$$

4813. — Cylindre circonscrit au paraboloïde

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0.$$

4814. — Plan diamétral conjugué à la direction (α, β, γ) dans le paraboloïde hyperbolique $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$. Comment varie le plan diamétral quand la direction (α, β, γ) varie ?

4815. — Exprimer qu'une droite $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ est tangente à un paraboloïde hyperbolique $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$.

4816. — Directions principales dans les quadriques

$$x^2-y^2+z^2-4yz-2xy-1=0,$$
$$x^2-y^2+z^2-2yz-4xy-2y=0.$$

4817. — Réduction de l'équation $x^2+2y^2+z^2+2yz+5=0$.

4818. — Etudier la surface $x^2+y^2+2z^2-4yz-3x+4z=0$. Centre, plans principaux, sections par les plans de coordonnées.

4819. — Etudier les surfaces

$$yz+zx+xy-x-y-z=0,$$
$$x^2+y^2-z^2+2yz+2xy-x+y=0,$$

contour apparent de cette dernière quadrique sur le plan des xy (projections parallèles à Oz).

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1843. — Déterminer les courbes planes qui possèdent la propriété suivante : le cercle homothétique dans le rapport constant k par rapport au point M du cercle de courbure en M passe par un point fixe. Cas où $k=1$.

VINRÉJOUX.

1844. — On considère une strophoïde ayant pour point double le point O, origine des coordonnées, et pour tangentes en ce point O les deux axes :

$$(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)-xy=0.$$

1° Soient O_1 et O_2 les deux points situés sur les deux branches de la strophoïde et confondus avec le point O, A et B deux autres points de la courbe tels que le rapport anharmonique (O_1O_2AB) soit égal à -1. Trouver l'enveloppe de la corde AB et le lieu du milieu de cette corde.

2° L'enveloppe de AB est une parabole. Trouver le lieu de son foyer, quand α et β varient de façon que l'asymptote de la strophoïde passe par un point fixe. Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du sommet et construire ce lieu.

E. H.

ERRATUM. — Question n° 1836, p. 391. Au lieu de : « systèmes différents » lire : « du même système ».

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Février 1910. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

COURBES GAUCHES ET SURFACES (*Fin*)

par M. **A. Sainte-Laguë**, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

§ IV. — APPLICATIONS

16. — Surfaces réglées. — Un point d'une surface réglée a des coordonnées de la forme

$$x = au + \alpha, \qquad y = bu + \beta, \qquad z = cu + \gamma,$$

a, b, c, α, β, γ étant des fonctions d'un même paramètre v. On peut supposer en outre que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Les courbes $v = C^{te}$ sont les génératrices de la surface, a, b, c étant les cosinus directeurs d'une telle génératrice. Les accents indiquant des dérivations par rapport à v, on a pour l'élément linéaire en effectuant les calculs

$$ds^2 = du^2 + 2L\, du.dv + (Mu^2 + 2Nu + P)dv^2,$$

L, M, N, P étant des fonctions de v définies par

$$L = a\alpha' + b\beta' + c\gamma', \qquad M = \alpha'^2 + b'^2 + c'^2, \qquad N = a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma', \qquad P = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

Remarquons d'ailleurs que le coefficient de dv^2 étant toujours positif, on a $MP - N^2 < 0$.

Si l'on prend pour courbe $u = C^{te}$ une trajectoire orthogonale des génératrices, ce qui est permis, l'élément linéaire se simplifie, car le terme en $du.dv$ disparaît : $L = 0$. On peut se ramener à ce cas en effectuant le changement de variable

$$u' = u + \int L dv$$

qui fait disparaître le terme en $du.dv$. On voit donc que *les trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée s'obtiennent par une seule quadrature.*

17. — Si l'on cherche les lignes asymptotiques de cette surface, on trouve pour une des deux familles, les génératrices, car une droite est toujours ligne asymptotique d'une surface. D'ailleurs on trouve avec les notations générales déjà données $D = 0$, car $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$, et par suite on trouve dans l'équation des asymptotiques le facteur dv qui, annulé, donne bien $v = C^{te}$.

Cherchons la seconde famille de lignes asymptotiques. On a

$$D' = \begin{vmatrix} a' & a & a'u + \alpha' \\ b' & b & b'u + \beta' \\ c' & c & c'u + \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & a & \alpha' \\ b' & b & \beta' \\ c' & c & \gamma' \end{vmatrix}, \qquad D'' = \begin{vmatrix} a''u + \alpha'' & a & a'u + \alpha' \\ b''u + \beta'' & b & b'u + \beta' \\ c''u + \gamma'' & c & c'u + \gamma' \end{vmatrix}.$$

D' est uniquement fonction de v et D'' est un trinome du second degré en u, trinome dont les coefficients sont fonctions de v. On en déduit que l'équation différentielle $D'du + D''dv = 0$ de la seconde famille de lignes asymptotiques est de la forme

$$\frac{du}{dv} = Au^2 + Bu + C,$$

A, B et C étant fonctions de v. On reconnaît là une équation de Riccati. Nous ne rappellerons pas les propriétés classiques de cette équation, nous contentant d'énoncer les conséquences suivantes :

Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une génératrice avec quatre lignes asymptotiques fixes est constant quelle que soit la génératrice.

Si l'on connaît deux lignes asymptotiques particulières qui ne soient pas de la famille des génératrices, on peut avoir toutes les autres par une quadrature.

18. — Un cas intéressant de ce dernier théorème est celui des conoïdes dans lequel on connaît deux lignes

asymptotiques particulières de la seconde famille : l'axe et la génératrice à l'infini du plan directeur. Nous allons vérifier directement qu'une seule quadrature suffit ici pour avoir les autres : on peut toujours par un choix convenable d'axes prendre pour équation du conoïde : $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Posons alors

$$x = u, \qquad y = uv, \qquad z = f(v).$$

Les génératrices sont données par $v = C^{te}$. L'élément linéaire est

$$ds^2 = (1 + v^2)du^2 + 2uv.du.dv + (u^2 + f'^2)dv^2.$$

L'équation des lignes asymptotiques montre que $D = 0$, résultat prévu et donne ensuite $2\frac{du}{u} = \frac{f''(v)}{f'(v)}dv$ pour laquelle l'intégration est immédiate : en désignant par C une constante arbitraire on a

$$u^2 = C.f'(v),$$

qui est l'*équation des lignes asymptotiques du conoïde donné.*

La projection d'une telle ligne sur le plan xOy est $x^2 = Cf\left(\frac{y}{x}\right)$. Par exemple pour le conoïde de Plücker, $z = a\frac{x^2 + y^2}{xy}$, on trouve l'intersection du conoïde avec $x^2y^2 = C(y^2 - x^2)$, qui donne des courbes unicursales du quatrième degré.

19. — Prenons encore l'hélicoïde gauche à plan directeur ou surface engendrée par les normales principales à une hélice. On peut poser

$$x = u.\cos v, \qquad y = u.\sin v, \qquad z = av,$$

a étant une constante. Les courbes $v = C^{te}$ sont les génératrices et les courbes $u = C^{te}$ sont des hélices, trajectoires orthogonales des précédentes. L'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

Si l'on cherche les lignes asymptotiques on trouve $D = 0$, résultat prévu, et en outre $D'' = 0$ qui donne pour l'équation de ces lignes : $du.dv = 0$ ou $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$. Donc :

Les deux familles de lignes asymptotiques d'un hélicoïde gauche à plan directeur sont, d'une part les génératrices, et d'autre part les hélices tracées sur cette surface.

La seconde partie de cet énoncé se vérifie géométriquement, en remarquant que le plan osculateur en un point d'une hélice de l'hélicoïde est précisément le plan tangent en ce point à l'hélicoïde.

Les deux familles de lignes asymptotiques sont orthogonales, donc l'indicatrice est une hyperbole équilatère et par suite les rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires : la courbure moyenne est nulle en chaque point. Ce résultat se vérifie immédiatement si l'on se reporte à la valeur de la courbure moyenne en un point. Toute surface à courbure moyenne nulle s'appelle une surface minima. Donc :

L'hélicoïde gauche à plan directeur est une surface minima. On démontre d'ailleurs que c'est la seule surface minima réglée.

20. — Une classe importante de surfaces réglées est celle des *surfaces développables.* Reprenons les notations précédentes :

$$x = au + \alpha, \qquad y = bu + \beta, \qquad z = cu + \gamma.$$

Cette surface est développable si le plan tangent au point (u,v) est le même que le plan tangent au point $(0, v)$. On doit donc avoir, quel que soit u, $\frac{a'u + \alpha'}{a'} = \frac{b'u + \beta'}{b'} = \frac{c'u + \gamma'}{c'}$, ce qui donne les conditions

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\beta'}{b'} = \frac{\gamma'}{c'}.$$

En reprenant des notations déjà données, on voit que

$$MP - N^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) - (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma')^2 = \Sigma(\beta'c' - \gamma'b')^2 = 0.$$

Le coefficient de dv^2 dans ds^2 est donc carré parfait :

$$ds^2 = du^2 + A(u - 0)^2dv^2,$$

A et 0 étant fonctions de v. On peut d'ailleurs par un changement de variable effectué sur v ramener A à être égal à 1.

On démontre que ces surfaces sont applicables sur un plan, d'où leur nom de surfaces développables.

L'une des familles de lignes de courbure de ces surfaces développables est donnée par les génératrices, car les normales à la surface tout le long de cette génératrice forment une surface développable (plan). *L'autre famille est formée des trajectoires orthogonales de ces génératrices ou développantes de l'arête de rebroussement.* Nous avons vu qu'elles peuvent s'obtenir par une seule quadrature.

21. Surfaces de révolution. — L'axe de révolution étant l'axe Oz et r désignant la distance d'un point quelconque de la méridienne à cet axe, l'équation de la surface est $z = f(r)$ et l'on peut poser

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v, \qquad z = f(v),$$

les deux paramètres étant ici r et v. On trouve aisément

$$ds^2 = dr^2(1 + f'^2) + r^2 dv^2,$$

$r = C^{te}$ donne les parallèles et $v = C^{te}$ les méridiens. Si on calcule D' on trouve $D' = 0$, donc en remarquant que en outre $F = 0$, on voit que *les lignes de courbure sont données par les méridiens et les parallèles*, ce qui est d'ailleurs évident car les normales le long de ces courbes forment une surface développable : cône ou plan.

On peut simplifier l'expression de l'élément linéaire, en faisant le changement de variable : $dr\sqrt{1 + f'^2} = du$. On a alors

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u)dv^2,$$

$\varphi(u)$ étant une fonction convenable de u, déduite de ce qui précède.

Passons en revue quelques surfaces de révolution : pour la sphère on peut poser

$$x = \sin u.\cos v, \qquad y = \sin u.\sin v, \qquad z = \cos u,$$

v désignant la longitude et u la colatitude. On trouve

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u.dv^2.$$

Prenons encore la surface engendrée par la révolution d'une chaînette tournant autour de sa base : on l'appelle *caténoïde* ou *alysséide*. On a ici $r = \frac{1}{2}a(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}})$ et par suite, en posant $z = f(r)$,

$$f'(r) = \frac{1}{r'_z} = \frac{2}{e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}}.$$

On en déduit sans peine pour la nouvelle variable u, $u = r^2 - a^2 + C^{te}$. En supposant la constante nulle on a

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2,$$

forme d'élément linéaire que nous avons déjà obtenue pour l'hélicoïde gauche à plan directeur. On en déduit le remarquable théorème de Bour :

L'hélicoïde gauche à plan directeur est applicable sur la caténoïde. Les génératrices correspondent aux méridiens et les hélices aux parallèles. Comme on le voit les lignes asymptotiques de l'une des surfaces s'appliquent sur les lignes de courbure de l'autre.

Il est aisé de voir que, d'après la propriété connue du rayon de courbure de la chaînette d'être égal à la normale, les deux rayons de courbure principaux en un point de la caténoïde sont égaux et de sens contraire : la courbure moyenne est nulle. La surface est minima. Si l'on remarque que la propriété ci-dessus du rayon de courbure est caractéristique de la chaînette on en déduit que : *l'alysséide est la seule surface minima de révolution.*

Signalons encore la propriété de la *surface pseudosphérique*, ou surface de révolution engendrée par la rotation d'une tractrice autour de sa base d'être à courbure totale constante, ce que l'on établira sans peine en s'appuyant sur des propriétés classiques de cette courbe. Mais ici la propriété énoncée n'est pas caractéristique de cette surface.

22. Quadriques. — Les quadriques sont parmi les surfaces algébriques les plus simples que l'on puisse étudier. On peut en particulier chercher à faire la « carte » d'une telle surface sur un plan. Toute forme unicursale conviendra. Nous n'étudions pas en détail ce problème, nous contentant de signaler rapidement quelques résultats intéressants.

Une représentation commode pour les *quadriques réglées* est la suivante : Prenons les coordonnées d'un point sous la forme

$$x = \frac{auv + bu + cv + d}{\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta}, \qquad y = \frac{a'uv + b'u + c'v + d'}{\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta}, \qquad z = \frac{a''uv + b''u + c''v + d''}{\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta}.$$

On reconnaît là la généralisation de formules classiques pour l'hyperboloïde ou le paraboloïde, rapportés à leurs génératrices. D'ailleurs ici les droites $u = C^{te}$, $v = C^{te}$ du plan sur lequel on fait la carte, droites parallèles aux axes de coordonnées, correspondent aux génératrices de la surface. Cette quadrique est un paraboloïde si le plan de l'infini la coupe suivant deux génératrices, c'est-à-dire si $\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta$ est un produit de deux facteurs de la forme : $(mu + n)(pv + q)$, ce qui donne la condition $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Les coniques de section par des plans tels que

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ont pour représentation plane les coniques telles que

$$(Aa + Ba' + Ca'' + D\alpha)uv + (Ab + Bb' + Cb'' + D\beta)u + (Ac + Bc' + Cc'' + D\gamma)v + (Ad + Bd' + Cd'' + D\delta) = 0,$$

de la forme $Muv + Nu + Pv + Q = 0$. On a donc des hyperboles équilatères. On voit inversement que toute hyperbole équilatère du plan, à asymptotes parallèles aux axes de coordonnées, est la carte d'une conique, section plane de la quadrique. Cette équation est linéaire en u et v. Donc une telle conique n'est coupée qu'en un point par une génératrice donnée, résultat évident à priori. Si le plan est tangent à la quadrique, cette équation doit donner deux génératrices, ce qui exige : $MQ = NP$ qui, développé, donnerait l'équation tangentielle de la quadrique.

On verrait aisément que les cubiques gauches de la quadrique ont pour cartes les cubiques planes

$$Auv^2 + Buv + Cu + Dv^2 + Ev + F = 0$$

et inversement. Elles sont coupées en un point par toute génératrice $v = C^{te}$ et en deux points par toute génératrice $u = C^{te}$.

Une quartique correspond à une quartique plane dont l'équation est de l'une des deux formes :

$$Au^2v^2 + Bu^2v + Cu^2 + Duv^2 + Euv + Fu + Gv^2 + Hv + I = 0$$

ou

$$Au^3v + Bu^3 + Cu^2v + Du^2 + Euv + Fu + Gv + H = 0.$$

Les quadriques de la première famille sont coupées en deux points par une génératrice de l'une ou l'autre famille. On peut toujours les considérer comme intersections de deux et par suite d'une infinité de quadriques. Celles de l'autre famille sont coupées en un point par les génératrices $u = C^{te}$ et en trois par les génératrices $v = C^{te}$. Elles ne peuvent pas être considérées comme intersection de deux quadriques. On trouve un exemple simple de ce genre de quartiques, en cherchant le lieu du point central des génératrices $u = C^{te}$, c'est-à-dire du point de cette génératrice où le plan tangent à la quadrique est perpendiculaire au plan asymptote qui contient cette même génératrice.

On verrait de façon plus générale que toute courbe de degré n tracée sur la quadrique a pour carte une courbe de même degré, admettant un point multiple d'ordre p à l'infini sur l'un des axes et d'ordre $n - p$ sur l'autre, et inversement.

Tout point de l'une quelconque de ces courbes planes coupe l'hyperbole équilatère $\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta = 0$ en un certain nombre de points (n en général) qui correspondent aux points à l'infini de la courbe gauche de l'espace.

23. — *Les deux familles de lignes asymptotiques d'une quadrique sont données par les deux familles de génératrices*, résultat évident à priori. Elles ne sont réelles que si la quadrique est réglée. Le théorème de Dupin sur les systèmes triples orthogonaux montre que :

Les lignes de courbure d'une quadrique sont données par les intersections de cette quadrique avec les quadriques homofocales, car on sait que des quadriques homofocales forment un système triple orthogonal. Si en particulier on prend ces quadriques sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

il en passe trois par un point quelconque de l'espace. A un tel point (x, y, z) on peut donc faire correspondre les trois paramètres u, v, w, racines de l'équation ci-dessus du troisième degré en λ. Si l'une de ces quantités w est fixe, le point (x, y, z) décrit une quadrique, quand u, v varient. On peut faire la carte de cette quadrique en prenant u, v comme paramètres. D'après ce qui précède les droites $u = C^{te}$, $v = C^{te}$ du plan sur lequel on fait la carte correspondront aux lignes de courbure de la quadrique. Nous n'insisterons pas davantage sur ces représentations planes de surfaces du second degré.

Autres surfaces. — 24. — Prenons une courbe (U) :

$$x = U_1, \qquad y = U_2, \qquad z = U_3,$$

U_1, U_2, U_3 étant des fonctions arbitraires d'une même variable u et supposons que cette courbe se déplace par translation en s'appuyant constamment sur une courbe (V) :

$$x = V_1, \qquad y = V_2, \qquad z = V_3,$$

les lettres V désignant des fonctions arbitraires d'un paramètre v. Tout point de cette surface a des coordonnées de la forme

$$x = U_1 + V_1, \qquad y = U_2 + V_2, \qquad z = U_3 + V_3.$$

Une telle surface s'appelle *surface de translation*. La symétrie des formules en u et v montre qu'elle peut être engendrée d'une seconde façon, analogue à la première, par la translation d'une courbe (V) s'appuyant sur une courbe (U).

Le lieu des milieux des cordes s'appuyant sur deux courbes fixes est une surface de translation.

En effet, prenons pour courbes fixes

$$\frac{1}{2}x = U_1, \qquad \frac{1}{2}y = U_2, \qquad \frac{1}{2}z = U_3$$

et

$$\frac{1}{2}x = V_1, \qquad \frac{1}{2}y = V_2, \qquad \frac{1}{2}z = V_3,$$

les U indiquant des fonctions arbitraires de u et les V de v. On voit immédiatement que le lieu des milieux des cordes s'appuyant sur ces courbes est la surface déjà considérée.

Si l'on suppose que u et v soient les arcs des deux courbes (U) et (V), on a, pour l'élément linéaire de la surface,

$$ds^2 = du^2 + 2\,du.dv\,(U_1'V_1' + U_2'V_2' + U_3'V_3') + dv^2,$$

les accents indiquant des dérivations par rapport à u ou v.

Si l'on remarque que $\frac{\partial^2 x}{\partial u.\partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u.\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u.\partial v} = 0$ on voit que $D' = 0$ et que par suite *les courbes* (U) *et* (V) *sont conjuguées*. Ce résultat est évident géométriquement, si l'on considère la surface développable circonscrite à la surface donnée, tout le long d'une courbe (V), surface dont les génératrices, toutes parallèles, sont les tangentes aux courbes (U) dans diverses positions.

25. — Considérons les sphères

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

dans lesquelles a, b, c, R sont fonctions d'un même paramètre et *cherchons l'enveloppe de ces sphères*. La courbe caractéristique est donnée pour l'une de ces sphères par son intersection avec le plan

$$(x-a)da + (y-b)db + (z-c)dc + Rdr = 0.$$

C'est donc un cercle. La sphère étant tangente à son enveloppe tout le long de ce cercle la coupe donc sous un angle constant et, d'après le théorème de Joachimsthal, ce cercle est une ligne de courbure. Inversement :

Toute surface dont une des familles de lignes de courbure est formée de cercles peut être considérée comme une enveloppe de sphères,

car toute sphère, passant par ce cercle, coupe la surface sous un angle constant et par suite il y en a une tangente à la surface tout le long de ce cercle, qui admet cette surface comme enveloppe.

On appelle surface-canal l'enveloppe d'une sphère de rayon constant. Si l'on fait ci-dessus $dR = 0$ on voit que le cercle caractéristique d'une telle sphère est un grand cercle. Donc :

Une des familles de lignes de courbure d'une surface-canal est formée de cercles de rayon constant ou encore :
Un des rayons de courbure en chaque point est constant.

Inversement d'ailleurs, cette dernière propriété entraîne, tout le long d'une ligne de courbure, $dR = 0$ et la développée étant un point, cette ligne est un cercle de rayon R constant : on retrouve la définition des surfaces-canaux. On démontre d'ailleurs qu'une surface ne peut être surface-canal que d'une seule manière, sauf la sphère.

26. — Si les deux familles de lignes de courbure sont circulaires, la surface est de deux façons différentes enveloppe de sphères. Les lignes de courbure étant prises comme courbes-bases en un point (u, v), il y a deux sphères (U) et (V) tangentes. Aux points (u, v) (u, v') (u, v'') la sphère (U) est tangente aux sphères (V), (V'), (V''). Donc *les surfaces dont les deux familles de lignes de courbure sont circulaires peuvent être considérées comme enveloppes d'une sphère variable, tangente à trois sphères fixes*, ce qui suffit à les déterminer. On les appelle des *cyclides de Dupin*.

La transformation par inversion les transforme en surfaces analogues. Si l'on ramène, ce qui est possible, les sphères fixes à avoir leurs centres en ligne droite on verra aisément qu'elles se ramènent toutes au tore. Donc :

Toute cyclide de Dupin peut être considérée comme la transformée par inversion d'un tore.

Cette propriété permet d'étudier aisément ces cyclides.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

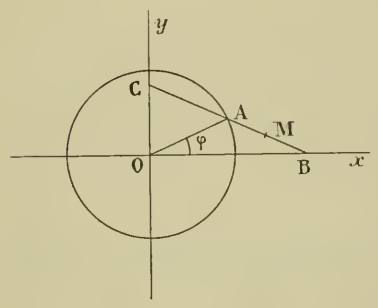
1775. — *On considère un cercle fixe dont le rayon est égal à* 3 *et rapporté à deux diamètres rectangulaires* Ox *et* Oy. *Sur* Ox *et sur le cercle glissent les extrémités d'un segment* AB *dont la longueur est aussi constamment égale à* 3.

1° *Trouver le lieu du milieu de* AB *et l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite* AB.

2° *Sur* AB *comme diamètre on décrit un cercle. Trouver et construire l'enveloppe de l'axe radical des deux cercles.*

3° *Trouver la développée de cette enveloppe, la rectifier et la construire.*

1. Soit φ l'angle de OA avec Ox ; les coordonnées du point A sont $3\cos\varphi$, $3\sin\varphi$, celles du point B, $6\cos\varphi$ et 0. Par suite les coordonnées du point M, milieu de AB, sont



$$x = \frac{9}{2}\cos\varphi, \qquad y = \frac{3}{2}\sin\varphi ;$$

le lieu du point M est donc l'ellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$$

L'équation de la droite AB est $\dfrac{y - 3\sin\varphi}{x - 3\cos\varphi} = -\operatorname{tg}\varphi$,

ou
$$x\sin\varphi + y\cos\varphi - 6\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Pour obtenir l'équation tangentielle de l'enveloppe de cette droite, identifions son équation avec l'équation $ux + vy + w = 0$, ce qui donne

$$\frac{\sin\varphi}{u} = \frac{\cos\varphi}{v} = -\frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{w},$$

et éliminons φ entre ces deux relations.

Nous en tirons $\qquad \cos\varphi = -\dfrac{w}{6u}, \qquad \sin\varphi = -\dfrac{w}{6v},$

puis $\qquad \dfrac{w^2}{36}\left(\dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1}{v^2}\right) = 1, \qquad$ ou $\qquad \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{36}{w^2}.$

On reconnaît l'équation tangentielle d'une hypocycloïde à quatre rebroussements (ou d'une astroïde), dont l'équation ponctuelle est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}}.$$

Ces résultats peuvent s'obtenir géométriquement. En effet, prolongeons AB jusqu'au point de rencontre C avec Oy ; nous avons $AC = AB = 3$, et $BC = 6$. L'enveloppe de BC est donc une astroïde.

De plus $MC = \dfrac{9}{2}$, $MB = \dfrac{3}{2}$, donc le lieu du point M est une ellipse ayant pour grand axe $\dfrac{9}{2}$ porté sur Ox, et son petit axe $\dfrac{3}{2}$ porté sur Oy.

2. Le cercle de diamètre AB a pour équation

$$(x - 3\cos\varphi)(x - 6\cos\varphi) + y(y - 3\sin\varphi) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 9x\cos\varphi - 3y\sin\varphi + 18\cos^2\varphi = 0.$$

On en déduit immédiatement l'équation de l'axe radical de ce cercle et du cercle donné :

(1) $$3x\cos\varphi + y\sin\varphi - 6\cos^2\varphi - 3 = 0.$$

Dérivons cette équation par rapport à φ, nous obtenons

$$-3x\sin\varphi + y\cos\varphi + 12\cos\varphi\sin\varphi = 0,$$

et, en résolvant ces deux équations par rapport à x et y, nous avons les équations paramétriques de l'enveloppe demandée :

(2) $$x = \cos\varphi(5 - 2\cos^2\varphi), \qquad y = 3\sin\varphi(1 - 2\cos^2\varphi).$$

On reconnaît immédiatement que cette courbe est symétrique par rapport aux deux axes, et que pour en avoir un quart, il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Les dérivées de x et y par rapport à φ sont

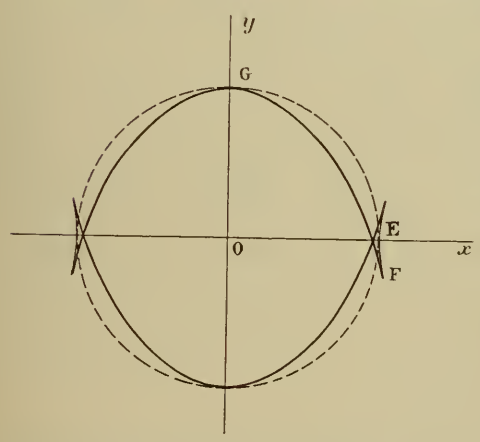
$$\frac{dx}{d\varphi} = \sin\varphi(6\cos^2\varphi - 5), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -3\cos\varphi(6\cos^2\varphi - 5).$$

Nous en tirons $\frac{dy}{dx} = -3\operatorname{cotg}\varphi$, et cette quantité est la pente de la droite (1), comme il était à prévoir.

Désignons par α l'angle aigu qui a pour cosinus $\sqrt{\frac{5}{6}}$, nous obtenons le tableau de variations

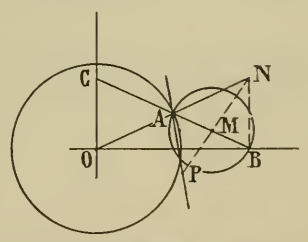
φ	0	croît	α	croît	$\frac{\pi}{4}$	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	3	croît	$\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$	décroît	$2\sqrt{2}$	décroît	0
y	0	décroît	$-2\sqrt{\frac{1}{6}}$	croît	0	croît	3
$\frac{dy}{dx}$	∞		$-3\sqrt{5}$		-3		0

Nous obtenons ainsi la branche de courbe EFG, qui est tangente au cercle donné aux points E et G, et qui admet un point de rebroussement au point F.



En achevant par symétrie par rapport aux deux axes on obtient la courbe complète. Le cercle donné est figuré en trait discontinu.

Remarque. — L'axe radical du cercle O et d'un cercle M de diamètre AB touche son enveloppe sur la droite joignant M au symétrique N de O par rapport à A.



En effet deux positions de cet axe se coupent sur l'axe radical des deux cercles égaux M et M′ correspondants, c'est-à-dire sur une perpendiculaire au milieu de MM′. Lorsque M′ vient en M, MM′ est la tangente en M à l'ellipse lieu de M et la perpendiculaire se confond avec la normale en M qui passe par le centre instantané N de la droite constante BMC.

3. Pour avoir la développée de cette courbe nous chercherons l'enveloppe de la normale. Celle-ci passe par le point limite de la tangente [dont les coordonnées sont fournies par les formules (2)] et est perpendiculaire à cette tangente [dont l'équation est l'équation (1)]. Par suite, l'équation de la normale peut s'écrire

$$\frac{x - \cos\varphi(5 - 2\cos^2\varphi)}{3\cos\varphi} = \frac{y - 3\sin\varphi(1 - 2\cos^2\varphi)}{\sin\varphi},$$

ou

$$(3) \qquad \frac{x}{\cos\varphi} - \frac{3y}{\sin\varphi} - 16\cos^2\varphi + 4 = 0.$$

Pour obtenir aisément le point limite de cette droite, multiplions l'équation par $\sin\varphi$, puis dérivons par rapport à φ ; nous obtenons immédiatement l'abscisse du point limite. Nous avons de même l'ordonnée en multipliant l'équation (3) par $\cos\varphi$ et en dérivant par rapport à φ. Nous trouvons ainsi

$$x = 12\cos^3\varphi(4\cos^2\varphi - 3), \qquad y = \frac{4}{3}\sin^3\varphi(1 - 12\cos^2\varphi).$$

Ce point décrit une courbe unicursale, symétrique par rapport aux deux axes, et dont le quart s'obtiendra en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons

$$\frac{dx}{d\varphi} = 12\cos^2\varphi\sin\varphi(9 - 20\cos^2\varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = 4\sin^2\varphi\cos\varphi(9 - 20\cos^2\varphi),$$

et $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\varphi$, ce qui était à prévoir d'après l'équation (3).

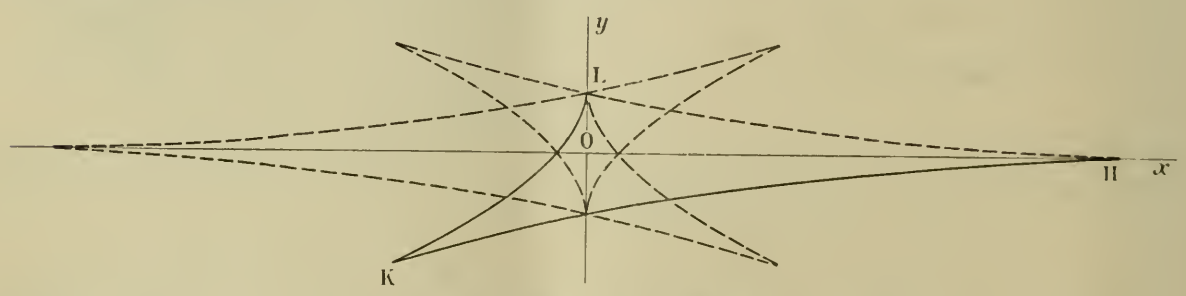
Désignons par β et γ les angles aigus dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{3}{\sqrt{20}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{12}}, \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{20}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Nous avons le tableau de variation suivant :

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		β		γ		$\frac{\pi}{2}$
x	12	décroît	0	décroît	$-\frac{243\sqrt{5}}{125}$	croît	$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$	croît	0
y	0	décroît	$-\frac{4}{3}$	décroît	$-\frac{121\sqrt{55}}{375}$	croît	0	croît	$\frac{4}{3}$
$\frac{dy}{dx}$	0	croît	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	croît	$\frac{\sqrt{11}}{9}$	croît	$\frac{\sqrt{11}}{3}$	croît	$+\infty$

et cela nous permet de construire l'arc de courbe HKL, où le point K est un point de rebroussement. En achevant par symétrie, on obtient toute la courbe.



Nous allons maintenant calculer les longueurs des arcs HK et KL. Nous avons

$$dx = -12\cos^2\varphi\sin\varphi(20\cos^2\varphi - 9)d\varphi,$$

$$dy = -4\sin^2\varphi\cos\varphi(20\cos^2\varphi - 9)d\varphi,$$

d'où nous tirons

$$ds^2 = 16\sin^2\varphi\cos^2\varphi(8\cos^2\varphi + 1)(20\cos^2\varphi - 9)d\varphi^2$$

et $$ds = \pm 4 \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{8\cos^2\varphi + 1}\,(20\cos^2\varphi - 9)d\varphi,$$
ou $$ds = \pm F(\varphi)d\varphi,$$
en posant $$F(\varphi) = 4\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{8\cos^2\varphi + 1}\,(20\cos^2\varphi - 9).$$

Quand φ croît de 0 à β, $F(\varphi)$ est positif, donc si nous supposons que s varie dans le même sens que φ, nous devons prendre $ds = +F(\varphi)d\varphi$, et nous avons

$$\text{arc HK} = \int_0^\beta F(\varphi)d\varphi.$$

Quand φ croît de β à $\frac{\pi}{2}$, $F(\varphi)$ est négatif, nous prendrons $ds = -F(\varphi)d\varphi$, et nous aurons

$$\text{arc KL} = -\int_\beta^{\frac{\pi}{2}} F(\varphi)d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^\beta F(\varphi)d\varphi.$$

On a donc

$$\text{arc HKL} = \int_0^\beta F(\varphi)d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\beta F(\varphi)d\varphi,$$

ou, en désignant par $G(\varphi)$ une fonction primitive quelconque de $F(\varphi)$,

$$\text{arc HKL} = 2G(\beta) - G(0) - G\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Calculons l'intégrale indéfinie $$G(\varphi) = \int F(\varphi)d\varphi.$$

Posons $\sqrt{8\cos^2\varphi + 1} = u$, nous en tirons $4\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{u\,du}{2}$, $\cos^2\varphi = \frac{u^2 - 1}{8}$ et $20\cos^2\varphi - 9 = \frac{5u^2 - 23}{2}$; par suite

$$\int F(\varphi)d\varphi = -\frac{1}{4}\int(5u^4 - 23u^2)du = -\frac{1}{4}\left(u^5 - \frac{23u^3}{3}\right),$$

ou $$G(\varphi) = \frac{u^3}{12}(23 - 3u^2).$$

Pour $\varphi = \beta$, $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{20}}$, $u = \sqrt{\frac{23}{5}}$ et $G(\beta) = \frac{23^2}{150}\sqrt{\frac{23}{5}}$;

Pour $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, $u = 3$ et $G(0) = -\frac{45}{4}$;

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$, $u = 1$ et $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{3}$.

On a donc

$$\text{arc HKL} = \frac{23^2}{75}\sqrt{\frac{23}{5}} + \frac{45}{4} - \frac{5}{3},$$

et, en multipliant ce résultat par 4, on a la longueur totale de la courbe.

Charles GUILLERME, lycée de Lyon.

Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Denain ; Jacques Paraf ; Rieumajou, à Sétif ; A. Rousseau, à Landrecies ; G. Foucry.

MÉCANIQUE

1776. — *Un corps solide étant en mouvement, trouver, à un instant donné, les courbes* (C) *telles que la vitesse en l'un quelconque de leurs points soit dirigée suivant la binormale.*

Ces courbes, dont les équations dépendent d'un paramètre unique, comprennent des hélices tracées sur des cylindres de révolution.

Lieu des axes de ces cylindres à l'instant t.

Lieu de ces mêmes axes dans le corps, lorsque celui-ci est en mouvement.

Démontrer que les plans osculateurs aux points d'intersection de toutes les courbes (C) *avec une surface donnée* (S) *d'ordre p, enveloppent une surface* (Σ) *de classe p. Cas où* S *est un plan.*

Dans quel cas les plans osculateurs auront-ils une droite fixe ?

Au point de vue des vitesses, un corps solide en mouvement se comporte à chaque instant t, comme s'il était animé d'un mouvement hélicoïdal. C'est le *mouvement hélicoïdal tangent*, et l'axe de ce mouvement est l'*axe instantané de rotation et de glissement*.

Soit a cet axe à l'époque t ; il varie avec le temps, non seulement dans l'espace, mais encore dans le corps solide lui-même. Dans l'espace, il engendre une surface réglée gauche ; dans le corps, il en engendre une autre, et la seconde touche la première tout le long de a, roule et glisse sur elle, d'après une certaine loi. Tous ces éléments du mouvement dépendent évidemment des équations qui donnent le mouvement du corps solide.

Nous allons donc étudier ce qui se passe dans un mouvement hélicoïdal ayant pour axe Oz.

Soit ω la vitesse angulaire et h le rapport de la vitesse de glissement à celle-ci. Soient aussi x, y, z les coordonnées d'un point du corps M, et O'M la perpendiculaire abaissée du point M sur Oz ; la vitesse du point M, en projection horizontale est perpendiculaire à O'M, orientée dans le sens positif ordinaire, de Ox vers Oy, en supposant bien entendu que le trièdre soit orienté dans le sens du mouvement, et elle a pour valeur numérique ω.O'M. Les composantes de la vitesse du point M sont donc

$$-y\omega, \quad x\omega, \quad h\omega,$$

et le plan osculateur à la courbe cherchée a pour équation

$$-y(X-x)+x(Y-y)+h(Z-z)=0,$$

ou

$$-yX+xY+h(Z-z)=0.$$

Pour que ce soit le plan osculateur, il faut que x, y, z dépendent d'un seul paramètre, et que l'arête de rebroussement de la surface qu'il enveloppe coïncide avec la courbe cherchée. Cette arête de rebroussement est définie par les trois équations

$$\begin{aligned} -yX+xY+h(Z-z)&=0,\\ -y'X+x'Y-hz'&=0,\\ -y''X+x''Y-hz''&=0, \end{aligned}$$

et il n'y a qu'à écrire que le point défini par les trois équations est le point (x, y, z) lui-même. Ceci donne les deux relations

$$\begin{aligned} -y'x+x'y-hz'&=0,\\ -y''x+x''y-hz''&=0. \end{aligned}$$

Ce sont les équations différentielles des courbes cherchées. Or la seconde est une conséquence de la première. Tout se réduit à celle-ci :

$$xdy-ydx=-hdz.$$

Le premier membre est le double de la différentielle de l'aire balayée par le rayon vecteur OM ; le second membre est proportionnel à dz.

Pour définir une courbe (C), nous prendrons donc une projection horizontale quelconque (C_1), et, sur le cylindre ayant ses génératrices parallèles à Oz et pour base (C_1), nous porterons sur chaque génératrice un vecteur ayant pour valeur algébrique l'aire engendrée par OM dans le plan des xy, à partir d'une certaine origine et multipliée par $-\frac{2}{h}$. Comme cas particulier, on rencontre toutes les droites de l'espace perpendiculaires à Oz et qui s'appuient sur Oz.

Si h est nul, les courbes (C) sont des courbes planes quelconques situées dans les plans qui passent par Oz.

Il est visible que si la courbe (C_1) choisie dans le plan horizontal est un cercle concentrique au point O, la courbe (C) de l'espace est une hélice circulaire ayant pour équations

$$x = R\cos\omega, \quad y = R\sin\omega, \quad z = k\omega + z_0,$$

z_0 étant la valeur initiale de z choisie arbitrairement ; c'est la cote du point $\omega = 0$.

Or ici
$$xdy - ydx = R^2 d\omega\,;$$
donc $hdz = -R^2 d\omega$, et, comme $dz = kd\omega$,
$$hk = -R^2, \qquad k = -\frac{R^2}{h}.$$

Ces courbes-là sont donc les hélices

$$x = R\cos\omega, \qquad y = R\sin\omega, \qquad z = -\frac{R^2}{h}\omega + z_0\,;$$

il y en a une double infinité. Toutes celles d'un même cylindre sont égales, superposables par une translation parallèle à Oz.

Reste à montrer qu'il n'y a pas d'autres hélices que celles-là. Pour cela, appelons u, v, w les cosinus directeurs de la direction des génératrices du cylindre de support de cette hélice. L'angle de sa génératrice avec la binormale est constant ; donc

$$\frac{-uy + vx + hw}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} = k,$$

et l'équation du cylindre est

$$k^2(x^2 + y^2 + h^2) - (-uy + vx + hw)^2 = 0.$$

C'est un cylindre parallèle à Oz ; pour que ce soit un cylindre de révolution il faut que la base soit un cercle, ce qui donne

$$u = 0, \qquad v = 0.$$

Le cylindre a donc Oz pour axe. La question est terminée.

Quant aux vitesses aux différents points du cylindre, elles sont toujours perpendiculaires aux hélices précédentes, elles enveloppent donc d'autres hélices orthogonales à celles-ci.

Soit $f(x, y, z) = 0$ la surface que décrit le point (x, y, z) ; le plan osculateur en ce point est

$$-yX + xY + h(Z - z) = 0\,;$$

il dépend de deux paramètres et enveloppe une certaine surface. Identifions son équation avec celle d'un plan quelconque

$$uX + vY + wZ + r = 0\,;$$

nous aurons

$$\frac{-y}{u} = \frac{x}{v} = \frac{h}{w} = \frac{-hz}{r}\,;$$

par suite

$$x = \frac{hv}{w}, \qquad y = -\frac{hu}{w}, \qquad z = -\frac{r}{w}.$$

L'enveloppe du plan a donc pour équation tangentielle

$$f\left(\frac{hv}{w}, \quad \frac{-hu}{w}, \quad \frac{-r}{w}\right) = 0.$$

Cette surface a une classe égale à l'ordre de la première.

Si la surface donnée est un plan, $ax + by + cz + d = 0$, l'enveloppe est

$$h(av - bu) - cr + dw = 0.$$

Le plan osculateur enveloppe un point qui a pour coordonnées homogènes

$$-bh, \qquad ah, \qquad d, \qquad -c$$

Ce point est d'ailleurs situé dans le plan donné.

Si le plan osculateur passe par un autre point fixe, il enveloppe une droite et il correspond alors aux courbes qui s'appuient sur l'intersection des deux plans.

Nous obtenons ainsi une infinité de droites conjuguées deux à deux.

Remarque. — Si on veut les courbes du système des courbes (C) qui sont planes, il faut écrire que l'une d'elles est dans un plan

$$ax + by + cz + d = 0,$$

c'est-à-dire que

$$adx + bdy + cdz = 0;$$

or

$$dz = -\frac{1}{h}(xdy - ydx);$$

donc

$$h(adx + bdy) - c(xdy - ydx) = 0,$$

$$(ah + cy)dx + (bh - ax)dy = 0,$$

$$\frac{dx}{ax - bh} = \frac{dy}{cy + ah}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$\frac{1}{a}\,\mathrm{L}(ax - bh) = \frac{1}{c}\,\mathrm{L}(cy + ah) + k,$$

ou

$$\mathrm{L}\,\frac{ax - bh}{k'} = \frac{a}{c}\,\mathrm{L}(cy + ah).$$

Nous avons ainsi toutes les courbes (C_1) qui correspondent aux courbes planes du système

$$ax - bh = k'(cy + ah)^{\frac{a}{c}},$$

les constantes a, b, c, k' sont quelconques.

Quand $a = c$, on obtient les droites du plan des xy. Cette solution était évidente *a priori*.

J. LOISEAU, élève du lycée Louis-le-Grand.

QUESTIONS PROPOSÉES

1845. — On considère deux coniques fixes C et C′, soient M et M′ les pôles d'une même droite par rapport aux deux coniques ; lieu de ces points sachant que le milieu de MM′ est situé sur une droite donnée D.

J. Lemaire.

1846. — On considère un paraboloïde de révolution d'axe Oz, tangent en son sommet O au plan xOy. Le cylindre droit ayant pour base un cercle quelconque C du plan xOy coupe le paraboloïde suivant une conique située dans le plan polaire d'un certain point γ de l'espace. A tout point de l'espace correspond ainsi un cercle du plan et inversement. On demande d'étudier la correspondance ainsi définie. En particulier :

Lieu des points γ correspondant à des cercles concentriques.

Lieu des points γ qui correspondent aux cercles orthogonaux à un cercle fixe, ou le coupant sous un angle V donné ;

Lieu des points γ correspondant aux cercles tangents à un cercle fixe.

Lieu des points γ correspondant à des cercles de rayon R donné.

Lieu des points γ qui correspondent aux cercles homothétiques d'un cercle donné par rapport à un point fixe.

Lieu des points correspondant aux cercles qui enveloppent une quartique bicirculaire.

Points γ correspondant à deux faisceaux de cercles orthogonaux.

Etudier ce que devient la transformation par inversion par rapport à un cercle d'inversion ayant l'origine, O, pour centre ou par rapport à un cercle quelconque du plan xOy.

A. Sainte-Laguë.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

1773. — *Si la série u_n à termes tous positifs est convergente, il en est de même de la série*

$$v_n = n(u_n - u_{n+1}),$$

et ces deux séries ont la même somme.

La même transformation s'applique à une série u_n à termes quelconques, quand $\lim\limits_{n=\infty} nu_n = 0$.

Appliquer aux séries

$$u_n = x^n, \qquad u_n = \frac{1}{n^2-1}, \qquad u_n = \frac{n}{n+1}x^{n+1}.$$

Soit S_n la somme des n premiers termes de la série (u_n) et S'_n la somme des n premiers termes de (v_n); on a

$$S'_n = (u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + \cdots + n(u_n - u_{n+1}),$$

et, en réduisant les termes semblables,

$$S'_n = S_n - nu_{n+1}.$$

Or, la série u_n étant convergente, le produit $n.u_{n+1}$ tend vers 0; donc quand n augmente indéfiniment

$$\lim. S'_n = \lim. S_n = S.$$

La série (v_n) est convergente et a même somme que la série (u_n).

Si, maintenant, nous considérons une série (u_n) à termes quelconques, convergente et telle que $\lim\limits_{n=\infty} nu_n = 0$, puis la série $v_n = a_n(u_n - u_{n+1})$, a_n étant le terme général d'une progression arithmétique de raison h, nous allons démontrer que la série (v_n) est convergente et trouver sa somme.

Prenons les mêmes notations que précédemment et formons S'_n,

$$S'_n = a_1(u_1 - u_2) + a_2(u_2 - u_3) + \cdots + a_n(u_n - u_{n+1}),$$

ou

$$S'_n = a_1u_1 + u_2(a_2 - a_1) + \cdots + u_n(a_n - a_{n-1}) - a_nu_{n+1}.$$

La raison de la progression arithmétique étant h, on a $a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} = h$, et, par suite,

$$S'_n = h(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - hu_1 + a_1u_1 - a_n.u_{n+1};$$

or $a_n = a_0 + nh$, donc $a_n.u_{n+1} = \dfrac{a_0 + h.n}{n+1}(n+1)u_{n+1}$, et comme, d'après l'hypothèse, la limite de $(n+1)u_{n+1}$ est nulle, on a aussi

$$\lim_{n=\infty}. a_nu_{n+1} = 0.$$

Nous avons donc

$$\lim_{n=\infty}. S'_n = hS + u_1(a_1 - h),$$

en appelant S la somme de la série (u_n). La série (v_n) est convergente et nous avons sa somme.

Applications. — 1° $u_n = x^n$, $|x| < 1$. En commençant à $n = 1$, la somme de la série u_n est

$$S = \frac{x}{1-x}.$$

La série v_n a pour terme général

$$v_n = n(x^n - x^{n+1}) = nx^n(1 - x),$$

S'_n est donc égal à

$$S'_n = x(1 - x) + 2x^2(1 - x) + \cdots + nx^n(1 - x).$$

Par suite, à la limite,

$$S' = (1 - x)(x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots) = \frac{x}{1 - x},$$

et on déduit immédiatement de là la somme de la seconde série

$$S' = x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

2° $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 1}$. Si on commence la série à $n = 2$, on a $S = \dfrac{3}{4}$; ceci est facile à voir en mettant u_n sous la forme $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$. La série (v_n) a pour terme général

$$v_n = n\left[\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{(n+1)^2 - 1}\right] = \frac{2n + 1}{(n - 1)(n + 1)(n + 2)}$$

et sa somme est aussi $\dfrac{3}{4}$.

3° $u_n = \dfrac{n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < 1.$

En décomposant u_n, on a

$$u_n = x^{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n + 1}.$$

La somme de la série (u_n) est donc, en commençant à $n = 1$,

$$\frac{x^2}{1 - x} + L(1 - x) + x,$$

ou

$$S = \frac{x}{1 - x} + L(1 - x).$$

Le terme général de la série (v_n) est

$$v_n = n\left(\frac{n}{n+1} x^{n+1} - \frac{n+1}{n+2} x^{n+2}\right),$$

qu'on peut écrire

$$v_n = nx^{n+1} - nx^{n+2} - \frac{n}{n+1} x^{n+1} + \frac{n}{n+2} x^{n+2}.$$

Comme nous connaissons les sommes des séries dont les termes généraux sont

$$v_n, \qquad nx^{n+1}, \qquad \frac{n}{n+1} x^{n+1},$$

nous pouvons déduire de cette égalité la somme de la série, dont le terme général est

$$w_n = \frac{n}{n+2} x^{n+2}.$$

On trouve ainsi

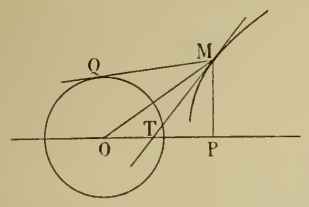
$$\sigma = x + 2L(1 - x) + \frac{x}{1 - x},$$

$$= 2S - \frac{x^2}{1 - x}.$$

P. SERVANTIE, école des Anglais, Lyon.

Bonnes solutions : MM. J. Bing, à Toul ; G. Lach, à Denain ; M. Larrocque, à Toulouse ; P. Névejans, à Douai ; A. Rousseau, à Landrecies ; L. Simon, à Châlons ; A. Courtois ; Amblard.

1774. — *Trouver une courbe telle que le cercle décrit sur la tangente* MT *comme diamètre soit orthogonal à un cercle fixe de centre* O, *et que le rapport anharmonique* M(QTOP) = — 1, MQ *étant une tangente au cercle* O, *et* MP *l'ordonnée du point* M.



Note. — L'énoncé de cette question impose à la courbe deux conditions incompatibles. Par conséquent, il n'y a pas lieu de s'occuper de cette question dont l'énoncé est mal construit et dont nous ne pouvons publier de solution.

N. d. l. R.

MÉCANIQUE

1782. — *On considère un segment de droite* AB *de longueur constante* $2a$ *dont les deux extrémités glissent sur deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy *et un système d'axes mobiles* $O'x'$, $O'y'$, *ayant pour origine le milieu de* AB, *orienté dans le même sens que le système* Oxy, *et tel que* $O'x'$ *soit dirigé suivant* O'A ; *on considère en outre un plan mobile invariablement lié aux axes* $O'x'$, $O'y'$ *et glissant sur le plan fixe qui contient les axes* Ox *et* Oy. *Le mouvement de ce plan est tel que la vitesse angulaire de* AB *soit constante et égale à* 1.

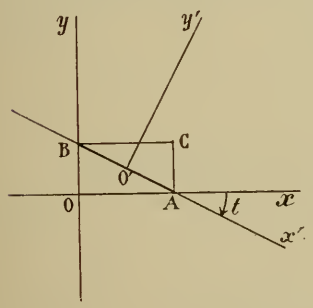
1° *Etudier le mouvement des points* A, B *et* O'.

2° *Former les équations du mouvement d'un point quelconque du plan* $O'x'y'$ *dont les coordonnées sont* $x' = \alpha$, $y' = \beta$. *Trouver la trajectoire, la vitesse, l'accélération de ce mouvement. Trouver le point de vitesse nulle au temps* t, *le lieu de ce point dans le plan fixe et son lieu dans le plan mobile. Montrer que le second roule sans glissement sur le premier.*

3° *Trouver les trajectoires singulières des points du plan mobile et le lieu des sommets de celles qui correspondent aux points d'une droite passant par le point* O'.

4° *Construire le centre de courbure qui correspond à un point* M *du plan mobile. Trouver le point qui a pour centre de courbure le symétrique de* A *par rapport à* O *et le lieu de ce point quand* t *varie.*

Prenons pour origine des temps l'instant où $O'x'$ est couché sur Ox, dans le sens Ox. Alors, au bout du temps t, l'angle de $O'x'$ avec Ox, l'angle $(Ox, O'x')$, aura pour valeur le nombre t, puisque la vitesse angulaire est égale à 1.



L'angle t de la figure peut être regardé comme étant négatif, ce qui veut dire que la position figurée par AB est d'une époque antérieure à l'origine des temps. On pourrait d'ailleurs prendre pour cet angle une autre valeur $2k\pi + t$, et, par suite, pour la position figurée de AB, une autre époque. Cette simple remarque correspond à ce fait que AB occupe la même position une infinité de fois, à une infinité d'époques différentes.

La valeur algébrique de AB est $-2a$, ses cosinus directeurs sont $\cos t$, $\sin t$.

1° Cela posé les coordonnées du point A sont

$$x = 2a \cos t, \quad y = 0 ;$$

celles de OB

$$x = 0, \quad y = -2a \sin t.$$

Chacun de ces points est animé d'un mouvement vibratoire simple sur l'axe qui le porte.

Les coordonnées du point O' sont

$$x = a \cos t, \quad y = -a \sin t.$$

Ce point décrit d'un mouvement uniforme, avec une vitesse angulaire égale à -1, le cercle de centre O et de rayon a. Le mouvement du point O′ est un mouvement vibratoire circulaire.

2° Soient α et β les coordonnées d'un point du plan mobile, par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$; les coordonnées x, y de ce point, par rapport aux axes Ox et Oy, s'obtiennent en appliquant les formules de transformation de coordonnées classiques. Ce sont

$$x = -a\cos t + \alpha\cos t - \beta\sin t,$$
$$y = a\sin t + \alpha\sin t + \beta\cos t,$$

ou

$$(1)\qquad \begin{cases} x = (a+\alpha)\cos t - \beta\sin t, \\ y = (\alpha - a)\sin t + \beta\cos t. \end{cases}$$

Ces équations donnent les équations du mouvement du point (α, β); ce sont donc aussi les équations paramétriques de la trajectoire. On sait que ces équations représentent une ellipse ayant le point O pour centre. D'ailleurs, il est facile d'avoir l'équation cartésienne de cette courbe; il suffit d'éliminer t entre les deux équations. A cet effet, on calcule $\cos t$ et $\sin t$ et l'on exprime que

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Le calcul se fait sans peine de la façon suivante :

$$(a+\alpha)\cos t - \beta\sin t - x = 0,$$
$$\beta\cos t + (\alpha - a)\sin t - y = 0,$$
$$\frac{\cos t}{\beta y + (\alpha - a)x} = \frac{\sin t}{(a+\alpha)y - \beta x} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 - a^2},$$
$$(2)\qquad [\beta y + (\alpha - a)x]^2 + [(\alpha + a)y - \beta x]^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - a^2)^2.$$

Cette dernière équation représente bien une ellipse ayant l'origine pour centre en général. Toutefois, si $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ cette ellipse dégénère en une ellipse impropre réduite à deux droites confondues avec la droite $(\alpha - a)x + \beta y = 0$.

Le mouvement d'un point quelconque du plan des $x'y'$ est donc un mouvement vibratoire elliptique, sauf pour les points du cercle ayant pour centre le point O′ et pour rayon a, qui sont animés chacun d'un mouvement vibratoire simple dont le centre est au point O.

Les deux points A et B sont deux points particuliers de cette espèce. Le point O′ est de la première espèce, et, pour lui, le mouvement elliptique devient un mouvement circulaire.

La vitesse a pour composantes

$$\frac{dx}{dt} = -2a\sin t - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - 2a\cos t,$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = y_0 - y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - x_0,$$

en posant $x_0 = 2a\cos t$, $y_0 = -2a\sin t$.

Le point (x_0, y_0) est le point C, sommet opposé à O du rectangle ayant OA et OB pour côtés.

Le vecteur CM a pour composantes $x - x_0$, $y - y_0$; donc le vecteur vitesse est ce même vecteur, qui a tourné d'un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ autour du point C. Par conséquent tout se passe comme si le point M tournait autour du point C avec une vitesse angulaire égale à 1. Ce résultat est très connu. Le point C est le point de vitesse nulle. C'est ce qu'on appelle le centre instantané de rotation.

Le lieu du point C dans le plan fixe est le cercle $x^2 + y^2 = 4a^2$ décrit du point O comme centre avec AB comme rayon. Dans le plan mobile, c'est évidemment le cercle de diamètre AB. D'ailleurs si on remplace x par $2a\cos t$, y par $-2a\sin t$ dans les formules (1), on trouve de suite

$$\alpha\cos t - \beta\sin t = a\cos t, \qquad \alpha\sin t + \beta\cos t = -a\sin t,$$

puis

$$\alpha = a\cos 2t, \qquad \beta = -a\sin 2t.$$

Ce sont les coordonnées du point C dans le plan mobile ; le lieu du point (α, β) est visiblement le cercle $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$.

Ce cercle touche le précédent au point C. Il reste à montrer que les éléments d'arcs sont égaux, c'est-à-dire que

$$dx^2 + dy^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 ;$$

cela est immédiat.

Alors le mouvement est produit par le roulement du second cercle sur le premier, sans glissement, le plan mobile étant entraîné avec le second cercle.

Les composantes de l'accélération sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2a\cos t - \frac{dy}{dt} = -x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2a\sin t + \frac{dx}{dt} = -y.$$

Le vecteur accélération est donc le vecteur MO.

3° Les trajectoires singulières sont les ellipses impropres que nous avons signalées ; ce sont les diamètres du cercle OC.

Pour que le point (x, y) soit le sommet d'une autre trajectoire, il faut que la vitesse soit perpendiculaire au rayon OM, ce qui donne

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \text{ou} \qquad x\sin t + y\cos t = 0.$$

Or

$$x\sin t + y\cos t = \alpha\sin 2t + \beta\cos 2t,$$

donc

$$\alpha\sin 2t + \beta\cos 2t = 0,$$

et, comme $\beta = m\alpha$, puisque le point du plan mobile est situé sur une droite donnée qui passe au point O', nous voyons que le lieu du sommet s'obtiendra en éliminant t entre

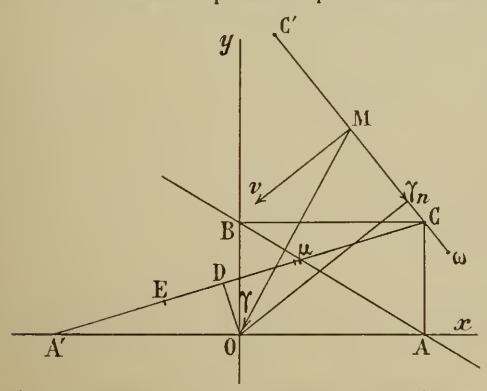
$$x\sin t + y\cos t = 0, \qquad \sin 2t + m\cos 2t = 0.$$

Ce calcul est immédiat et donne

$$m(y^2 - x^2) + 2xy = 0. \tag{3}$$

Le lieu est donc constitué par deux droites rectangulaires qui passent à l'origine. Ce sont les deux diamètres du cercle fixe OC sur lesquels glissent les extrémités du diamètre du cercle mobile, qui a pour équation $\beta = m\alpha$ dans le système $O'x'y'$. Ce résultat est très connu aussi.

4° Soit M un point du plan mobile, MO est l'accélération γ, MC la normale ; donc $M\gamma_n$, projection de MO sur MC est l'accélération normale ; enfin la vitesse Mv est égale à MC.



D'autre part, on a $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho}$, $\rho\gamma_n = v^2$; si donc ω désigne le centre de courbure, on a

$$M\gamma_n . M\omega = \overline{MC}^2.$$

Soit C' le symétrique de C par rapport à M ; le point ω est le conjugué harmonique du point γ_n par rapport à C et C'.

Pour que le point ω soit en A', il faut que $MC\omega$ coïncide avec CA' ; le point M est donc sur CA' et le point γ_n devient le pied D de la perpendiculaire abaissée du point O sur CA'. Soit E le conjugué harmonique de C par rapport à D et A', le point M est ici le milieu μ de CE.

Pour faire les calculs, il faut avoir l'équation de CA' et les abscisses des points A', C, D et E.

L'équation de CA′ est

$$y = \lambda(x + 2a\cos t), \qquad \text{avec} \qquad \lambda = -\frac{\sin t}{2\cos t};$$

c'est donc

$$x\sin t + 2y\cos t + a\sin 2t = 0.$$

L'abscisse de A′ est $-2a\cos t$; celle de C, $2a\cos t$. Celle de D s'obtient en abaissant de O une perpendiculaire sur CA′,

$$\frac{x}{\sin t} = \frac{y}{2\cos t} = \frac{-a\sin 2t}{\sin^2 t + 4\cos^2 t}, \qquad x = -\frac{2a\sin^2 t\cos t}{1 + 3\cos^2 t}.$$

Soit enfin x celle de μ, celle de E sera $2x - 2a\cos t$.

En écrivant que les deux couples

$$2a\cos t, \qquad 2x - 2a\cos t; \qquad -2a\cos t, \qquad \frac{-2a\sin^2 t\cos t}{1 + 3\cos^2 t}$$

se divisent harmoniquement, on aura x :

$$2a\cos t(x - a\cos t) + 2a^2\frac{\sin^2 t\cos^2 t}{1 + 3\cos^2 t} + x\left(a\cos t + \frac{a\sin^2 t\cos t}{1 + 3\cos^2 t}\right) = 0.$$

De là, on déduit

$$x[3\cos t(1 + 3\cos^2 t) + \sin^2 t\cos t] = 2a[\cos^2 t(1 + 3\cos^2 t) - \sin^2 t\cos^2 t],$$

$$x(8\cos^2 t + 4) = 8a\cos^3 t, \qquad x = \frac{2a\cos^3 t}{1 + 2\cos^2 t}.$$

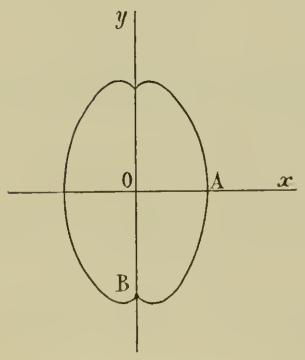
Enfin y se tire de l'équation de CA′,

$$2y\cos t = -x\sin t - 2a\sin t\cos t,$$

$$y = -a\frac{\sin t\cos^2 t}{1 + 2\cos^2 t} - a\sin t, \qquad y = -a\sin t\,\frac{1 + 3\cos^2 t}{1 + 2\cos^2 t}.$$

Les équations paramétriques du lieu du point μ sont donc

$$x = 2a\frac{\cos^3 t}{1 + 2\cos^2 t}, \quad y = -a\sin t\,\frac{1 + 3\cos^2 t}{1 + 2\cos^2 t}.$$



Cette courbe est une ligne fermée du sixième degré, qui admet pour axes de symétrie les deux axes de coordonnées et que nous construirons en faisant varier t de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour $t = 0$, $x = \frac{2a}{3}$, $y = 0$; pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = -a$. En outre, les dérivées sont

$$x' = -2a\cos^2 t\sin t\,\frac{3 + 2\cos^2 t}{(1 + 2\cos^2 t)^2},$$

$$y' = -a\cos t\,\frac{6\cos^4 t + 7\cos^2 t - 1}{(1 + 2\cos^2 t)^2};$$

elles nous montrent immédiatement qu'au point $t = 0$, x' est nul sans que y' le soit, et qu'au point $t = \frac{\pi}{2}$, $\frac{y'}{x'}$ est encore infini; les deux tangentes en ces points sont donc parallèles à Oy.

Pour

$$\cos t = \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{73}}{12}},$$

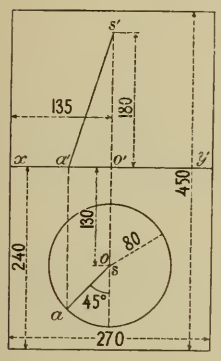
y' s'annule et change de signe, de négative qu'elle était d'abord, elle devient positive. La courbe a donc la forme suivante, qu'on achèvera en tenant compte de la double symétrie.

Très bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; Marescalchi ; A. Rousseau, à Landrecies.
Solution satisfaisante : M. A. Courtois, à Douai.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

CYLINDRE TANGENT A UN CONE ET AU PLAN HORIZONTAL.

1796. — *Cadre* 450^{mm} *sur* 270^{mm}. — *Placer la ligne de terre xy parallèlement aux petits côtés du cadre et à* 240^{mm} *du côté inférieur.*



On considère :

1° *Un cône de révolution d'axe vertical ; sa base située dans le plan horizontal est un cercle de* 88^{mm} *de rayon ; le centre o de ce cercle est à égale distance des grands côtés du cadre et à* 130^{mm} *au-dessous de xy ; la hauteur du cône est* 180^{mm}.

2° *Un cylindre de révolution de* 60^{mm} *de rayon repose sur le plan horizontal par une de ses génératrices rectilignes ; il est tangent au cône en un point de la génératrice (sa, s'a') et traverse le cône.*

Après avoir déterminé les projections de la ligne commune aux deux surfaces, conique et cylindrique, on représentera l'ensemble des deux corps en limitant le cylindre à deux plans de section droite situés à 100^{mm} *de part et d'autre de l'axe du cône.*

Dans la mise à l'encre, on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points et droites remarquables.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. — Titre intérieur : Cylindre tangent à un cône et au plan horizontal.

(*Ecole Centrale, concours de 1909.*)

Mise en place. — Le contour apparent vertical du cône s'obtient immédiatement ainsi que sa base horizontale. Le contour apparent vertical du cylindre se compose des deux génératrices de cote zéro et de cote 12^{cm} limitées aux sections droites demandées dans l'énoncé, et des deux demi-ellipses qui sont les projections de la moitié des circonférences des cercles verticaux qui limitent le cylindre. Nous déterminerons ces ellipses ultérieurement. Pour avoir le contour apparent horizontal du cylindre prenons pour plan vertical auxiliaire le plan qui projette la génératrice du cône *sa, s'a'* sur laquelle a lieu le contact des deux surfaces ; c'est un plan de section droite du cylindre et par suite nous aurons le centre de cette section en construisant la circonférence de rayon 60^{mm}, tangente à la génératrice *sa*, $s_1'a_1'$ et à la ligne de terre. Son centre est le point *o*, o_1' et par suite l'axe du cylindre a pour projection horizontale *bc*. Nous en déduisons les deux génératrices de contour apparent horizontal sur chacune desquelles nous prenons 10^{cm} de part et d'autre du plan méridien du cône et nous formons ainsi le rectangle *de* à l'intérieur duquel se projette toute la surface cylindrique. Les projections des côtés *db* et *ce* sur le plan vertical primitif donnent les petits axes des deux ellipses dont il a été parlé plus haut.

Intersection des deux surfaces. — On pourrait employer une série de plans horizontaux coupant le cône suivant des circonférences se projetant horizontalement en vraie grandeur et le cylindre suivant des génératrices. Nous prendrons de préférence des plans passant par le sommet du cône et parallèles aux génératrices du cylindre ; en nous servant du plan vertical auxiliaire ay_1 ces plans seront de bout, leurs traces verticales passeront toutes par le point s_1' et les points où ces traces couperont la section droite du cylindre donneront des génératrices qui couperont les deux génératrices du cône situées dans le même plan en quatre points appartenant à l'intersection.

Nous avons commencé par déterminer les plans limites : l'un est le plan tangent commun aux deux surfaces, il donne le point double réel situé sur les deux génératrices de contact en *f*, *f'*, l'autre est le plan de bout qui projette la seconde génératrice du contour apparent du cône sur le plan vertical auxiliaire ; il donne deux génératrices sur le cylindre projetées horizontalement en *g*,g_1' et *h*,h_1', qui, d'après un théorème bien connu, sont tangentes à la courbe d'intersection aux points correspondants *g* et *h*.

Remarquons maintenant que la courbe d'intersection sera symétrique par rapport au plan méridien passant par le point double, et qu'il y aura pénétration du cylindre par le cône.

Points remarquables. — Les points sur le contour apparent horizontal du cylindre s'obtiendront en menant le plan auxiliaire par la génératrice qui seule perce le cône, l'autre étant en dehors du dièdre utile formé par les deux plans limites. Nous trouvons ainsi les deux points *k* et *l*.

La courbe touche le cercle de base du cône aux points où la génératrice de contact du cylindre avec le plan horizontal traverse cette base, et les points sur le contour apparent vertical du cylindre

sont donnés par les plans auxiliaires qui passent par la génératrice la plus haute et par la génératrice la plus basse du cylindre, soient p et q. Enfin les points sur les génératrices de contour apparent vertical du cône s'obtiennent en prenant les projections de ces génératrices sur le plan vertical ay, et en menant des plans auxiliaires par ces génératrices. Nous trouvons ainsi les quatre points r, r', v, v', où la courbe touche le contour apparent vertical du cône.

Rappelons encore que les points de l'intersection h et g situés dans le plan méridien du cône passant par le point double, autres que ce point double, sont tels que le plan tangent à chaque surface en chacun d'eux est perpendiculaire à ce plan méridien ; la tangente à la courbe en ces points est donc horizontale, c'est-à-dire parallèle aux génératrices du cylindre, et en projection verticale l'un de ces points est le plus haut, l'autre le plus bas sur l'arc de courbe qui y passe.

Ligne des points doubles en projection. — Si nous prenons l'intersection des deux plans verticaux conjugués de la direction des droites de bout dans chaque surface nous obtenons la verticale zz' qui coupe en projection verticale la courbe d'intersection en deux points doubles ; chacun de ces points correspond à des points ζ_1 et ζ_2 de la projection horizontale qui ont le même éloignement par rapport au plan de front mené par le sommet du cône.

Points courants. — Ayant ainsi déterminé un certain nombre de points remarquables de la courbe d'intersection on achève d'en préciser la forme au moyen de quelques points courants et des tangentes correspondantes. Nous avons indiqué les constructions pour les points m, m' et ζ, ζ' ; la tangente s'obtient en prenant la trace horizontale des plans tangents à chaque surface au point considéré, et joignant l'intersection 0 de ces deux traces à ce point. Pour le cylindre la trace du plan tangent est toujours perpendiculaire au plan vertical x_1y_1 et pour le cône, c'est la tangente à sa base au pied de la génératrice qui passe par le point.

Ponctuation. — La distinction des parties vues et cachées de la courbe d'intersection ou des contours apparents n'offre aucune difficulté. Puisque l'on conserve les deux corps, la portion de chaque génératrice de contour apparent comprise entre les deux points où elle perce la seconde surface est cachée. De plus la génératrice $s\rho$, $s'\rho'$ du cône pénétrant dans le cylindre au point r, r' situé sur la portion de surface vue sur le cylindre en projection verticale restera vue de s' en r', tandis que la génératrice du cylindre $\beta'\gamma'$ cessera d'être vue à partir du point où elle croise la première. Enfin la courbe sera vue seulement quand elle sera sur les portions de chaque surface qui sont visibles à la fois.

On en déduit la ponctuation.

Nous n'avons pas donné la construction des tangentes au point double réel qui n'est pas demandée dans l'énoncé. Rappelons à ce sujet qu'on peut les déterminer en remplaçant l'une des deux surfaces par le cône qui a pour sommet ce point double et pour directrice la courbe d'intersection ; on sait que ce cône est du second degré, on peut donc en déterminer une base plane en prenant les traces de cinq génératrices quelconques sur un plan choisi à volonté. Ici il serait très simple de donner pour base à ce cône le plan parallèle au plan mené par le point double et l'une des deux tangentes en h ou en g, ce plan de base passant par l'autre tangente ; il couperait le cône suivant une parabole dont on a immédiatement la projection horizontale et qu'il est d'ailleurs inutile de tracer pour trouver ses points d'intersection avec le plan tangent commun aux deux surfaces données. En joignant ces deux points d'intersection au point double on a les deux tangentes cherchées.

Bonnes épures de MM. Montaut, à Alger ; Rousseau, à Landrecies ; Simon, à Châlons-sur-Marne.

ÉCOLE CENTRALE (1909).

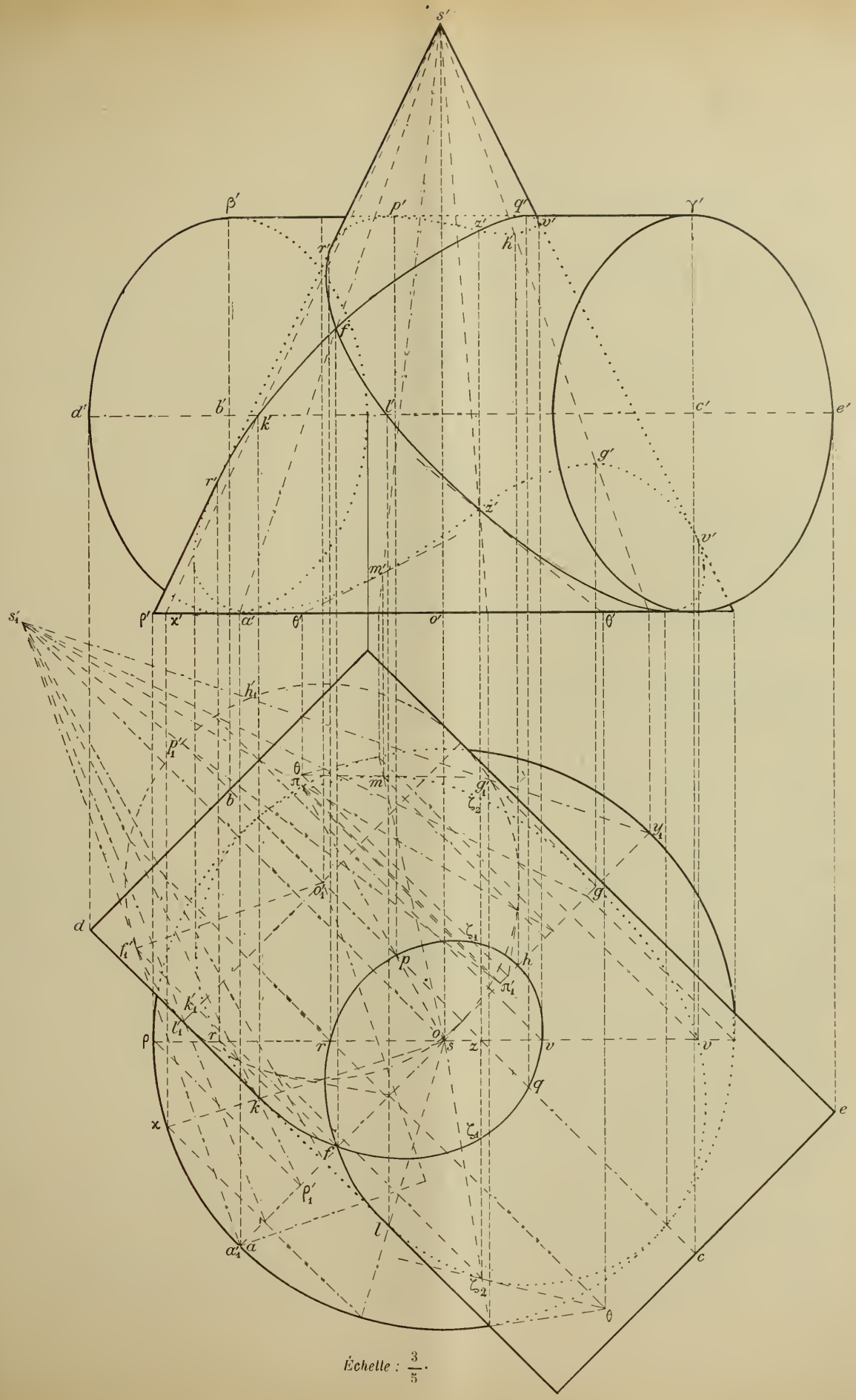
QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

4820. — Etudier les mouvements rectilignes

$$x = v_0 t - \frac{1}{3} g t^3, \qquad x = a \cos^2 \omega t, \quad \text{(force qui produirait ce mouvement)}$$

$$x = 3e^{\omega t} + 2e^{-\omega t}, \qquad x = t - 2 \sin t, \qquad x = 3t + 4 \sin t.$$

Diagrammes



Échelle : $\frac{3}{5}$.

4821. — Composition de deux mouvements rectilignes sur une même droite. Exemples :

1° $x_1 = a\cos(\omega t + \alpha)$, $x_2 = b\cos(\omega t + \beta)$;

2° $x_1 = a\,\mathrm{ch}(\omega t + \alpha)$, $x_2 = b\,\mathrm{ch}(\omega t + \beta)$.

4822. — Etudier le mouvement plan d'un point M dont les distances à deux points fixes O, O′ du plan sont données en fonction du temps par les formules

$$r = 2a\cos^2\omega t, \qquad r' = 2a\sin^2\omega t.$$

Trajectoire, vitesse sur la trajectoire, accélération.

4823. — Trouver la loi d'un mouvement plan dont la trajectoire est la parabole $y^2 - 2px = 0$, sachant que la composante horizontale de la vitesse est constante et égale à a. Equation du mouvement sur la trajectoire. — Même problème quand la composante verticale de la vitesse est constante ; quelle est la particularité du mouvement dans ce cas ?

4824. — La trajectoire d'un point M est, en axes rectangulaires, l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et la vitesse aréolaire du point (par rapport à l'origine) est constante. — En déduire la loi du mouvement.

4825. — Un mobile décrit la courbe $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$ avec une vitesse aréolaire constante. — Trouver la force qui produit le mouvement.

4826. — Mouvement d'un point de vitesse aréolaire constante, la trajectoire étant la courbe d'équation

$$\rho = 1 + \mathrm{tg}^2\frac{\omega}{2}.$$

4827. — Etudier le mouvement d'un point donné par les équations

$$x = a\,\mathrm{sh}(\omega t + \alpha), \qquad y = b\,\mathrm{ch}(\omega t + \beta).$$

Trajectoire, force capable de produire le mouvement.

4828. — On sait que l'hodographe d'un mouvement est la droite

$$\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}.$$

Qu'en résulte-t-il pour la trajectoire ?

4829. — Composer les trois mouvements rectilignes simultanés

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

Trajectoire, force capable de produire le mouvement.

4830. — Etudier le mouvement défini par les équations

$$x = at^2, \qquad y = bt^2, \qquad z = ct^2 + c't.$$

Trajectoire, vitesse, accélération, force qui produirait ce mouvement.

4831. — Composer les trois mouvements

$$x = at + bt^2, \qquad y = a't + b't^2, \qquad z = a''t + b''t^2.$$

Trajectoire, force capable de produire le mouvement.

4832. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires, un point $A(x_1, y_1, z_1)$ et un axe Δ d'équations

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}.$$

On fait tourner le point A autour de l'axe Δ avec une vitesse angulaire ω. Calculer les composantes de la vitesse du point A.

4833. — Equation différentielle des lignes de force d'un champ connu rapporté à trois axes rectangulaires. — Combien de constantes renfermeront les équations des lignes de force ? — Comment pourra-t-on déterminer complètement une ligne de force ?

4834. — Soient trois axes rectangulaires et un point M de coordonnées x, y, z tel que ses projections sur chacun des trois plans de coordonnées aient des vitesses aréolaires constantes, a, b, c (par rapport à l'origine des coordonnées). — Montrer que le point M se meut dans un plan contenant l'origine et qu'il est soumis à l'action d'une force dont la ligne d'action passe par l'origine.

4835. — Mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement au carré de la distance.

4836. — Etudier le mouvement d'un point M attiré par deux centres fixes A et B proportionnellement à sa masse et aux distances AM, BM.

4837. — Mouvement d'un point M, attiré par un centre O proportionnellement à la distance OM, et repoussé par un centre O′ proportionnellement à la distance O′M.

4838. — Mouvement d'un point pesant M, repoussé par un centre fixe O proportionnellement à la distance OM. Trajectoire, vitesse, accélération. Montrer que tout se passe comme si le point M était repoussé par une force unique émanant d'un autre point fixe O′.

4839. — Sur une table horizontale rugueuse, on lance un point M_0 de poids p avec une vitesse initiale v_0. — Etudier le mouvement ; position extrême du mobile ; au bout de combien de temps atteindra-t-il cette position ?

4840. — On considère un cône de révolution autour de Oz, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe. — Mouvement d'un point pesant M placé sur le cône. Force centrifuge en M. — Exprimer que la résultante de la force centrifuge en M et du poids de M est normale au cône ; condition d'équilibre du point M.

4841. — Relation entre les moments linéaires d'un vecteur AB par rapport à deux points O et O′ de l'espace.

4842. — Relation entre les moments d'un même système de vecteurs par rapport à deux axes parallèles.

4843. — Composantes suivant les axes du moment d'un vecteur $(x_0, y_0, z_0, X_0, Y_0, Z_0)$ par rapport au point (x, y, z).

4844. — Composantes suivant les axes du moment d'un vecteur AB(x, y, z, X, Y, Z) par rapport à l'axe Δ allant du point (x_1, y_1, z_1) au point (x_2, y_2, z_2).

4845. — On considère un axe dirigé $z'z$ et un vecteur AB ; définir le moment du vecteur AB par rapport à l'axe $z'z$; le calculer en fonction de la longueur du vecteur, de la plus courte distance du vecteur à l'axe et du sinus de l'angle de leurs directions.

4846. — Formule de dimension du moment d'un vecteur ; formules de dimension d'une force, d'une vitesse, d'une accélération.

4847. — On considère un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, un vecteur V ayant pour caractéristiques X, Y, Z, L, M, N et un vecteur OA de composantes X_1, Y_1, Z_1. Trouver un vecteur BC perpendiculaire à OA, tel que le système des deux vecteurs BC et OA soit équivalent au vecteur V.

4848. — Étant donné un système quelconque de vecteurs, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le moment résultant de ce système par rapport à un point soit indépendant du point choisi ?

4849. — Condition pour qu'un système de forces ait une résultante unique. — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante est qu'il existe une infinité de points en ligne droite pour lesquels le moment résultant du système est nul.

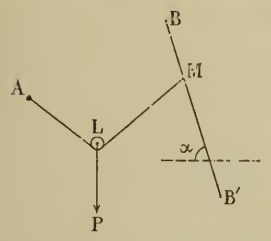
4850. — A quoi se réduit le système de vecteurs

$$X = 2, \quad Y = 5, \quad Z = 1, \quad L = 3, \quad M = -1, \quad N = -1 \text{ ?}$$

Equations de la ligne d'action.

4851. — Equivalence de deux systèmes de vecteurs. — Quand deux systèmes de vecteurs sont équivalents, montrer qu'on peut passer de l'un à l'autre par des opérations élémentaires.

4852. — Centre de gravité du volume d'un hémisphère homogène.



4853. — Equilibre d'un corps solide invariable qui a un point fixe. — Que deviennent les conditions d'équilibre quand le point peut glisser sans frottement le long d'un axe ?

4854. — Conditions d'équilibre d'un corps solide invariable soumis à des forces déterminées et reposant sur un plan par un de ses points. — Expressions analytiques des conditions d'équilibre ; cas où il y aurait frottement au point d'appui.

4855. — Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. On considère un corps solide invariable soumis à des forces données et reposant sur le plan zOx en un point A, sur le plan xOy en un point B. Conditions d'équilibre.

4856. — Poulie fixe avec frottement en supposant les cordons rectangulaires.

4857. — Dans un plan vertical, on a un point A et une tige BB' faisant avec le plan horizontal un angle α ; un fil de longueur donnée a une extrémité fixée en A, l'autre M mobile sans frottement sur BB' ; ce fil supporte une poulie mobile L soumise à l'action d'une charge P. Conditions d'équilibre.

Géométrie et géométrie descriptive. — (M. Arnal).

4858. — Démontrer que dans un trièdre, la somme des dièdres est comprise entre deux droits et six droits.

4859. — On considère un plan P, une droite D dans ce plan et deux points A et B hors du plan. Soient AA', BB' les perpendiculaires abaissées de ces points sur le plan P. Trouver sur la droite D un point d'où l'on voie sous le même angle les deux segments AA', BB'.

4860. — Appuyer sur deux droites données une horizontale de longueur donnée. Cas particulier où les projections horizontales des deux droites données sont parallèles. — Même problème en géométrie cotée.

4861. — Mener par un point donné une droite parallèle à un plan donné et rencontrant une droite donnée.

4862. — Mener parallèlement à une direction donnée une droite s'appuyant sur deux droites données.

4863. — Par un point donné (m, m'), mener une droite s'appuyant sur deux droites de profil données.

4864. — Intersection de deux plans donnés par une droite et un point.

4865. — On donne un plan défini par la ligne de terre et un point (a, a'), pris dans le second dièdre. On donne un second plan par sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal. — Intersection des deux plans.

4866. — Trouver dans un plan P une droite dont chaque point soit équidistant des traces d'un autre plan Q.

4867. — Trouver sur une droite donnée par ses deux projections un point dont la cote et l'éloignement soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

4868. — On donne une droite et un point extérieur ; trouver sur la droite un point à une distance donnée du point donné.

4869. — On donne trois points par leurs projections cotées a_1, b_2, c_4. Chercher un point du plan de comparaison qui soit équidistant de ces trois points.

4870. — Ombre d'une droite sur un plan donné par son échelle de pente.

4871. — Ombre d'un triangle $a_1\, b_2\, c_3$ sur un plan donné par son échelle de pente.

4872. — On donne un triangle horizontal abc, $a'b'c'$ et un prisme triangulaire dont la base est dans le plan horizontal. — Ombre portée par le triangle sur le prisme.

4873. — Trouver le point d'une droite de profil dont le rapport de la cote à l'éloignement est égal à $\frac{m}{n}$.

4874. — Trouver les points d'une droite donnée à une distance δ d'un plan, défini par son échelle de pente.

4875. — On donne une droite graduée et deux points cotés. Trouver sur la droite un point équidistant des deux points donnés.

4876. — On donne l'échelle de pente d'un plan et deux points dans ce plan. Trouver le troisième sommet d'un triangle équilatéral ayant les points donnés pour sommets, sachant qu'il est situé dans le plan donné.

4877. — On donne la droite a_1b_5. Mener par b la perpendiculaire à ab qui rencontre la droite c_8d_0.

4878. — Mener par un point la perpendiculaire à une droite donnée (cotée).

4879. — Abaisser d'un point la perpendiculaire sur une droite de profil donnée.

4880. — Angle de deux droites graduées (a_5b_2 et c_0d_0). — Bissectrices de leur angle.

4881. — Angle de deux droites dont l'une est parallèle au premier bissecteur, et l'autre au second.

4882. — On donne un plan vertical et une droite graduée. Angle de la droite et du plan.

4883. — Trouver les projections verticales de deux droites concourantes, connaissant leur angle, leurs projections horizontales et leurs traces horizontales.

4884. — On donne la ligne de terre xy et la trace horizontale αP d'un plan qui fait un angle donné avec xy. Trouver la trace verticale du plan.

4885. — Trouver un plan faisant le même angle avec trois droites données.

4886. — Etant donnés trois points cotés a, b, c, mener par la droite bc un plan faisant un angle α avec le plan du triangle abc.

4887. — Déterminer un plan passant par une droite donnée et faisant un angle α avec un plan donné, parallèle à la ligne de terre.

4888. — On donne les projections de deux droites situées dans un même plan, leurs traces et l'angle que fait leur plan avec le plan de comparaison. Trouver la cote de leur point de rencontre.

4889. — Déterminer dans un plan donné par ses traces, une droite faisant l'angle α avec le plan horizontal et qui se trouve à une distance d de la ligne de terre.

4890. — Mener dans un plan donné par ses traces, une droite faisant un angle donné avec le plan horizontal et telle que le segment compris entre les traces du plan ait une longueur donnée.

4891. — Construire une droite s'appuyant sur deux droites données et faisant avec chacune d'elles un angle donné.

4892. — Faire tourner un point autour d'un axe vertical, jusqu'à ce que les projections soient équidistantes de xy.

4893. — Faire tourner un point autour d'un axe vertical de façon à l'amener à une distance donnée d'un plan donné.

4894. — Faire tourner une droite autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à un plan donné par ses traces.

4895. — Faire tourner un plan autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'il passe par un point donné.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1847. — Soit une droite fixe de longueur AB. Par un point M variable pris sur AB, on mène d'un même côté de AB des parallèles à deux directions fixes AP, BQ. On obtient ainsi les deux triangles semblables APM et MQB. Montrer que : 1° le lieu du milieu PQ est une ligne droite ; 2° l'enveloppe de la droite PQ est une parabole. Construire cette parabole lorsque les triangles APM et MQB sont équilatéraux.

3° Trouver aussi le lieu de la projection de M sur PQ.

E.-N. Barisien.

1848. — Un objectif photographique, dont la distance focale est $\varphi = 16^{cm}$ et l'interstice (distance des points nodaux) $\varepsilon = 2^{cm}$, donne, d'un objet très éloigné AB, une image réelle et renversée A'B' de 1^{cm} de diamètre. On recule le verre dépoli à 48^{cm} du second point nodal O et on intercale entre ce verre dépoli et l'objectif, une lentille divergente mince C, de 10^{cm} de distance focale.

A quelle distance du point O doit-on la placer pour obtenir une image nette A''B'' sur le verre dépoli ? Quelle sera la grandeur de cette image ? Cette image étant mise en place sur la figure, construire les points nodaux du système total. Comment pourrait-on vérifier l'accord du résultat obtenu avec l'indication fournie par les formules générales des systèmes centrés ?

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Mars 1910. N° 6.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES CUBIQUES CIRCULAIRES UNICURSALES

par M. G. Cotty, élève à l'Ecole normale supérieure.

Dans le n° 2 (Novembre 1909) de la *Revue de Mathématiques spéciales*, M. Sire donne, comme conséquence d'un théorème démontré par M. Lemoyne et pour la démonstration duquel il renvoie aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1904), un théorème très intéressant sur la strophoïde. Ce théorème est une conséquence immédiate d'une proposition que j'ai démontrée dans la *Revue* (Août 1908) en employant une méthode connue pour étudier les cubiques circulaires unicursales et qui consiste à les regarder comme transformées de coniques par une inversion, le pôle d'inversion étant sur la conique.

Pour plus de clarté, je reprends très rapidement les quelques considérations qui conduisent au théorème en question, tout en insistant davantage sur l'usage q i'on peut faire de l'inversion pour déduire immédiatement des propriétés classiques des couples de points en involution sur une conique, les propriétés moins connues relatives à des couples en involution sur une cubique.

I. — Considérons une conique (Γ) et deux points O et M de cette conique. Par O et M, il passe deux cercles tangents à la conique en deux points P et Q diamétralement opposés, OP et OQ sont conjuguées harmoniques par rapport aux parallèles aux asymptotes de (Γ) menées par O. Et réciproquement, menons par O deux droites OP et OQ conjuguées harmoniques par rapport aux parallèles aux asymptotes de (Γ) menées par O, elles coupent (Γ) en P et Q et les points O, M, P et Q sont sur un même cercle.

Le cercle passant par O, P, Q enveloppe une quartique bicirculaire ayant en O son point double réel (car il passe par le point fixe O et son centre décrit une conique). Le cercle se réduisant dans deux positions particulières à chacune des parallèles aux asymptotes de (Γ) menées par O, la quartique précédente est tangente à ces parallèles.

Transformant tous ces théorèmes dans une inversion de pôle O, nous obtenons les propositions suivantes :

a) D'un point m d'une cubique circulaire à point double O, *on peut mener deux tangentes mp et mq à la cubique, autres que la tangente au point m.*

Soient p et q les points de contact de ces tangentes.

b) Les droites op, oq joignant les points de contact p et q des deux tangentes, au point double o, sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce point double.

Réciproquement, lorsque deux droites issues du point double d'une cubique circulaire unicursale sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux tangentes en ce point, les tangentes aux deux points où elles coupent la cubique concourent en un point de la courbe (*).

c) La corde des contacts pq enveloppe une conique tangente aux tangentes au point double de la cubique.

(*) Les théorèmes *b*, *c*, *d* de cette première partie, ainsi que les théorèmes *a*, *b*, *c*, *d* de la seconde partie, ont été démontrés directement par M. Lemoyne dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1904.

d) Le cercle passant par o, p, q passe par un point fixe, que nous appellerons point principal de la cubique.

Les propositions *a, b, c* étant projectives s'étendent de suite à toutes les cubiques unicursales.

Parmi les nombreux cas particuliers de ces théorèmes donnant des résultats intéressants pour l'étude des cubiques les plus connues, retenons ceux qui sont relatifs à la strophoïde.

Si la cubique est une strophoïde, les tangentes au point double sont rectangulaires, *op* et *oq* sont également inclinées sur les tangentes. (Ce théorème et sa réciproque sont classiques). Les deux points cycliques forment un des groupes (p, q). Les tangentes à la strophoïde en ces points se coupent donc sur la courbe. Or elles se coupent au foyer singulier de la cubique. Ce foyer est donc sur la strophoïde. La droite *pq* enveloppe une parabole (car une des positions de *pq* est la droite de l'infini) dont la directrice passe par le point double.

Trois positions particulières du cercle *opq* sont :

α) le cercle tangent à la strophoïde aux deux points cycliques dont le centre est le foyer singulier ;

β) les deux cercles osculateurs à la strophoïde à chacune des branches au point double.

Donc :

Théorème. — *La droite joignant les centres de courbure d'une strophoïde en son point double passe par le foyer singulier.*

II. — Nous donnerons maintenant quelques applications de l'inversion des coniques à la démonstration des propriétés de couples en involution sur une cubique. Quelques-uns de ces exemples sont des théorèmes établis par une tout autre voie dans le mémoire de M. Lemoyne.

Soient A et B deux points situés sur une conique (Γ).

On sait que si AB passe par un point fixe Ω, A et B varient en involution sur (Γ), et réciproquement si deux points varient en involution sur une conique, la droite qui les joint passe par un point fixe Ω.

On en conclut relativement aux cubiques ce qui suit :

a) Les cercles passant par le point double d'une cubique circulaire unicursale et par un point fixe ω du plan coupent la cubique en deux points a et b variant en involution.

b) Il y a deux cercles passant par le point double d'une cubique circulaire et par un point ω du plan et tangents à la courbe (les points doubles de l'involution sont leurs deux points de contact).

Réciproque :

c) Si deux points a et b sont en involution sur une cubique circulaire à point double, les cercles passant par le point double et par a et b ont en commun un second point ω.

Signalons comme cas particulier de ces théorèmes celui qui conduit à la proposition de M. Lemoyne, utilisée par M. Sire dans sa note. Si *oa* et *ob* sont également inclinées sur une sécante quelconque *os* passant par *o*, *a* et *b* sont bien en involution sur la cubique, les droites isotropes sont homologues, un couple (a, b) est formé des points cycliques. Le cercle (oab) est dans ce cas le cercle tangent à la cubique aux points I et J, il a comme centre le foyer singulier de la courbe. Donc :

d) Si par le point double d'une cubique circulaire unicursale on mène des sécantes oa, ob également inclinées sur une droite os et coupant la cubique en a et b les cercles (oab) ont leurs centres sur une droite passant par le foyer singulier de la courbe.

Revenons au théorème de Frégier généralisé rappelé au début du paragraphe précédent. On sait que :

Les cercles (OAB) enveloppent une quartique bicirculaire ayant son point double réel en O (car ces cercles passent par O et leur centre décrit une conique). Cette quartique bicirculaire dégénère en l'ensemble des droites isotropes passant par deux points lorsque la corde AB reste parallèle à une

direction fixe, autrement dit lorsque Ω est à l'infini. Dans ce cas, les points à l'infini de la conique sont un des couples (A, B) de l'involution et on sait que le cercle (OAB) passe par les deux points fixes O et K d'intersection de (Γ) avec la droite menée par O et ayant sur les axes de (Γ) une inclinaison inverse de celle de AB.

D'où ce théorème de Chasles :

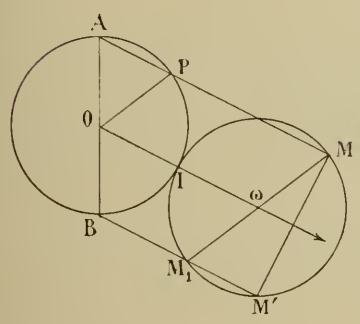
Deux points a et b variant en involution sur une cubique circulaire unicursale, si les deux points doubles de l'involution coïncident avec le point double de la cubique, la droite ab passe par un point fixe de la courbe. Si cette condition n'est pas remplie, la corde ab enveloppe une conique.

Ce théorème visiblement projectif se trouve ainsi établi pour toutes les cubiques unicursales. Je n'insisterai pas sur les innombrables conséquences de ce théorème bien connu et fondamental dans l'étude des cubiques.

NOTE SUR L'ÉPICYCLOIDE A UN REBROUSSEMENT

par M. **Jean Bing**, élève à l'Ecole des Mines.

Soient M le point du cercle mobile qui engendre l'épicycloïde, I le point de contact actuel et A la position initiale de ce point de contact, c'est-à-dire le point de rebroussement de l'épicycloïde. Nous avons



$$\text{arc AI} = \text{arc MI}$$

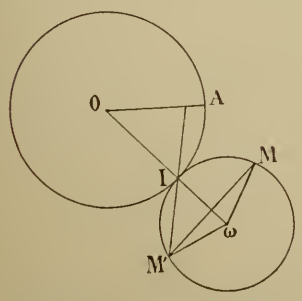
et, comme les deux cercles sont égaux, $\widehat{AOI} = \widehat{I\omega M}$. La figure AOωM est donc un trapèze isocèle, et AM *est parallèle à la ligne des centres.*

Soit P le second point de rencontre de la sécante AM avec le cercle fixe ; le triangle OAP est isocèle et la figure OPMω est un parallélogramme ; donc PM est égal à 2R et la courbe engendrée par le point M est une cardioïde ayant le point A pour point de rebroussement.

Soit M′ le symétrique de M par rapport à la ligne des centres. Pour une raison analogue à celle que nous venons de donner, $BM' = O\omega = 2R$; *le lieu du point* M′ est donc un cercle de rayon 2R et ayant pour centre le point B, symétrique de A par rapport au centre O.

Enfin il est visible que le cercle de centre I et de rayon IA passe en M. Ce cercle est normal à IM, il est donc tangent à la cardioïde et celle-ci est *l'enveloppe d'un cercle ayant son centre sur le cercle fixe et passant au point de rebroussement.*

N. d. l. R. — Bien que toutes ces propriétés soient très connues, il ne nous a pas paru inutile de les remettre sous les yeux de nos lecteurs, étant donné surtout le peu d'espace occupé par cette note.



L'auteur annonce que dans le cas de l'épicycloïde à deux rebroussements le lieu du point M′ symétrique de M par rapport à la ligne des centres est une ellipse dont le petit axe coïncide en grandeur et position avec la ligne des rebroussements et dont le grand axe est double de celui-ci. Cette épicycloïde est l'enveloppe du cercle ayant pour centre le point I et tangent à la droite des rebroussements, OA.

Nous laissons à nos lecteurs le soin d'établir ces deux propriétés, ce qui ne présente aucune difficulté.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1779. — *On considère une conique* C *de centre* O *et la conique* K *qui a pour sommets les rebroussements de la développée de* C.

1° *Soit* M *un point variable de la conique* K ; *sur* OM *comme diamètre, on décrit un cercle* Γ *qui coupe les axes en* P *et* Q. *Enveloppe de* PQ.

2° *Le cercle* Γ *rencontre la conique* K *en trois points* P_1, P_2, P_3 *autres que* M. *Enveloppe des côtés du triangle* $P_1P_2P_3$.

3° *Le triangle* $P_1P_2P_3$ *est conjugué par rapport à l'hyperbole équilatère conjuguée de celle dont les sommets sont les foyers de la conique* C.

4° *A chaque point* M *de la conique* K, *on fait correspondre la droite* μ *qui joint les centres de courbure en* M *aux deux coniques qui y passent et qui sont homofocales à la conique* C. *Enveloppe des droites* μ.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation ponctuelle de la conique C. Les coordonnées du point courant sont

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi$$

et l'équation tangentielle de la conique,

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

L'équation de la normale au point courant de paramètre φ est, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$a\sin\varphi\, x - b\cos\varphi\, y - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Cette normale touche son enveloppe au point de coordonnées

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi,$$

centre de courbure de C au point de paramètre φ.

L'équation ponctuelle de la développée de C est d'ailleurs

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{4}{3}} = 0,$$

et celle de la conique K,

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^4 = 0.$$

Nous pouvons encore donner de K des équations paramétriques qui nous serviront plus tard

$$x = \frac{c^2}{a}\cos\psi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin\psi.$$

Si ψ est le paramètre d'un point M de la conique K, le cercle décrit sur OM comme diamètre aura pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{a}\cos\psi\, x + \frac{c^2}{b}\sin\psi\, y = 0.$$

1° Les coordonnées des points P et Q sont respectivement

$$\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos\psi, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = -\dfrac{c^2}{b}\sin\psi, \end{cases}$$

et l'équation de la droite PQ est

$$a\sin\psi\, x - b\cos\psi\, y - c^2\sin\psi\cos\psi = 0,$$

c'est exactement l'équation trouvée de la normale à C au point de paramètre ψ.

L'enveloppe de cette droite PQ est donc la développée de la conique C, dont nous avons ci-dessus donné l'équation.

Ce résultat était d'ailleurs évident géométriquement, car les points P et Q sont les projections du point courant M de K sur les axes, et, la droite PQ étant ainsi définie, c'est un résultat connu qu'elle enveloppe une projection d'hypocycloïde à quatre rebroussements, dont chaque rebroussement coïncide avec un des sommets de K.

2° Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite. Nous voulons qu'elle puisse être regardée comme un des côtés, P_2P_3 par exemple, de l'un des triangles $P_1P_2P_3$, triangles qui dépendent d'un paramètre qu'on peut faire varier d'une façon continue, comme le point M sur la conique K.

D'après un théorème connu, les droites P_2P_3 et MP_1 sont, en direction, symétriques l'une de l'autre par rapport aux axes de la conique K. L'équation de la droite MP_1 sera donc de la forme

$$ux - vy + w' = 0.$$

Dans le faisceau ponctuel de coniques défini par la conique K d'une part, et la conique constituée par l'ensemble des deux droites précédemment envisagées d'autre part, doit se trouver un cercle passant par l'origine. Son équation sera

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^4 + \lambda(ux + vy + w)(ux - vy + w') = 0,$$

λ et w' devant satisfaire aux relations

$$a^2 + \lambda u^2 = b^2 - \lambda v^2, \qquad c^4 - \lambda w w' = 0.$$

Ce sont ces relations qui nous importent, et c'est pour les établir que nous avons formé l'équation du cercle. Mais le cercle doit avoir pour diamètre OM. Autrement dit OP_1 doit être rectangulaire sur MP_1. L'équation des rayons projetant les points M et P_1 du point O s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité entre les équations de la conique K et de la droite MP_1. Cette équation est ainsi

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^4\left(\frac{ux - vy}{w'}\right)^2 = 0.$$

Ecrivons qu'elle est satisfaite par la direction normale à la droite MP_1

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{-v}.$$

On a alors l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 - c^4\left(\frac{u^2 + v^2}{w'}\right)^2 = 0.$$

Les relations précédemment trouvées nous donnent

$$w' = \frac{c^4}{\lambda w} = -\frac{c^4}{w}\,\frac{u^2 + v^2}{a^2 - b^2} = -\frac{c^2}{w}\,(u^2 + v^2).$$

Portons cette valeur de w' dans la dernière équation. Après quelques réductions immédiates, cette équation se réduit à

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0,$$

c'est l'équation tangentielle de la conique C. L'enveloppe des côtés du triangle $P_1P_2P_3$ est la conique C.

3° Nous nous proposons de démontrer que le triangle $P_1P_2P_3$ est autopolaire par rapport à l'hyperbole équilatère H dont l'axe transverse est l'axe des y, dont le centre est en O, dont la distance des sommets au centre est c (c'est par erreur qu'il a été dit dans l'énoncé que le triangle était autopolaire par rapport à l'hyperbole conjuguée de celle que nous venons de désigner).

Considérons le triangle $P_1'P_2'P_3'$ transformé par polaires réciproques de $P_1P_2P_3$ par rapport à l'hyperbole H. La direction OP_1' doit être, en direction, symétrique de la polaire de P_1', P_2P_3, par rapport aux asymptotes de H, qui sont les bissectrices des axes Ox, Oy. Or il en est de même de OP_1 qui est rectangulaire sur la direction MP_1, qui est elle-même symétrique de P_2P_3 par rapport aux axes Ox, Oy. Le point

P_1' est donc sur OP_1. On montre par des considérations tout analogues que le côté $P_2'P_3'$ par exemple est parallèle à P_2P_3. Ainsi nous savons déjà que les triangles $P_1P_2P_3$ et $P_1'P_2'P_3'$ sont homothétiques l'un de l'autre par rapport au point O. Or la polaire $P_2'P_3'$ de P_1 doit être tangente à la conique transformée par polaires réciproques de K par rapport à H, puisque P_1 est un point de K. Et cette transformée par polaires réciproques de K n'est autre que la conique C, puisque les axes de K sont $-\frac{c^2}{a}$, $+\frac{c^2}{b}$ et ceux de C a et b. (Nous pouvons devant les axes mettre le signe que nous voulons.)

En définitive P_2P_3 et $P_2'P_3'$ sont ou confondues ou symétriques par rapport à l'origine, comme étant des droites parallèles, tangentes à la conique C. Je dis que l'hyperbole H donne P_2P_3 et $P_2'P_3'$ confondues, alors que l'hyperbole conjuguée H' eût donné P_2P_3 et $P_2'P_3'$ symétriques par rapport à l'origine. Il est bien évident, en passant continuement d'un triangle particulier $P_1P_2P_3$ à l'un quelconque de ces triangles que si l'hyperbole H pour le premier triangle donne P_2P_3 et $P_2'P_3'$ confondus, il en sera de même pour le second triangle, car dans la variation du triangle les droites P_2P_3 et $P_2'P_3'$ doivent à chaque instant être ou confondues ou symétriques. Il ne peut y avoir passage brusque de l'un à l'autre. Confondues à l'origine, ces deux droites resteront confondues. Or il apparaît d'une façon évidente sur la figure que pour le cas particulier où P_1 est confondu avec M au sommet de K situé sur l'axe Oy, P_2P_3 est du même côté de O que P_1, comme il en doit être aussi de $P_1'P_2'$. Nous avons ainsi montré que le triangle $P_1P_2P_3$ est autopolaire par rapport à H. Le symétrique par rapport à O de $P_1P_2P_3$ est le transformé par polaires réciproques de ce triangle par rapport à H', hyperbole conjuguée de H.

Si nous avions établi cette troisième partie directement par le calcul sans nous appuyer sur la seconde partie, comme il est possible de le faire, alors la seconde partie serait évidente géométriquement. L'enveloppe des côtés de $P_1P_2P_3$ nous apparaîtrait immédiatement comme transformée par polaires réciproques par rapport à H de la conique K lieu des points P_1, P_2, P_3.

4° Désignons par α et β les coordonnées du point M de la conique K. Elles satisfont à la relation

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4 = 0.$$

En ce point il passe deux coniques homofocales à C dont les équations sont de la forme

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} - 1 = 0$$

et ce sont celles qui correspondent aux valeurs λ_1, λ_2, racines de l'équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2-\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2-\lambda} - 1 = 0.$$

Les coordonnées des centres de courbure au point M (α, β) de ces deux coniques sont

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{c^2}{(a^2-\lambda_1)^2}\alpha^3, \\ Y_1 = -\dfrac{c^2}{(b^2-\lambda_1)^2}\beta^3, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_2 = \dfrac{c^2}{(a^2-\lambda_2)^2}\alpha^3, \\ Y_2 = -\dfrac{c^2}{(b^2-\lambda_2)^2}\beta^3. \end{cases}$$

Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation de la droite μ. Nous allons exprimer qu'elle passe par les deux centres de courbure. On a ainsi les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{u\alpha^3}{(a^2-\lambda_1)^2} - \dfrac{v\beta^3}{(b^2-\lambda_1)^2} + \dfrac{w}{c^2} = 0, \\ \dfrac{u\alpha^3}{(a^2-\lambda_2)^2} - \dfrac{v\beta^3}{(b^2-\lambda_2)^2} + \dfrac{w}{c^2} = 0, \end{cases}$$

qui, jointes aux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{a^2-\lambda_1}+\dfrac{\beta^2}{b^2-\lambda_1}-1=0, \\ \dfrac{\alpha^2}{a^2-\lambda_2}+\dfrac{\beta^2}{b^2-\lambda_2}-1=0 \end{cases}$$

et

$$(3)\qquad a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4=0$$

donnent cinq équations entre lesquelles nous pourrons éliminer λ_1, λ_2, α, β. Nous aurons ainsi l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite μ.

Des équations (1) on tire

$$(4)\quad \frac{u\alpha^3}{\dfrac{1}{(b^2-\lambda_1)^2}-\dfrac{1}{(b^2-\lambda_2)^2}}=\frac{v\beta^3}{\dfrac{1}{(a^2-\lambda_1)^2}-\dfrac{1}{(a^2-\lambda_2)^2}}=\frac{\dfrac{w}{c^2}}{\dfrac{1}{(a^2-\lambda_1)^2}\dfrac{1}{(b^2-\lambda_2)^2}-\dfrac{1}{(a^2-\lambda_2)^2}\dfrac{1}{(b^2-\lambda_1)^2}}.$$

De même, des équations (2), on tire

$$(5)\quad \frac{\alpha^2}{\dfrac{1}{b^2-\lambda_1}-\dfrac{1}{b^2-\lambda_2}}=\frac{\beta^2}{-\left(\dfrac{1}{a^2-\lambda_1}-\dfrac{1}{a^2-\lambda_2}\right)}=\frac{-1}{\dfrac{1}{a^2-\lambda_1}\dfrac{1}{b^2-\lambda_2}-\dfrac{1}{a^2-\lambda_2}\dfrac{1}{b^2-\lambda_1}},$$

ce qui permet de simplifier la ligne (4), qui devient

$$\frac{u\alpha}{\dfrac{1}{b^2-\lambda_1}+\dfrac{1}{b^2-\lambda_2}}=\frac{-v\beta}{\dfrac{1}{a^2-\lambda_1}+\dfrac{1}{a^2-\lambda_2}}=\frac{-\dfrac{w}{c^2}}{\dfrac{1}{a^2-\lambda_1}\dfrac{1}{b^2-\lambda_2}+\dfrac{1}{a^2-\lambda_2}\dfrac{1}{b^2-\lambda_1}},$$

ou encore

$$\frac{u\alpha}{\dfrac{2b^2-S}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}}=\frac{-v\beta}{\dfrac{2a^2-S}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}}=\frac{-\dfrac{w}{c^2}}{\dfrac{2a^2b^2-(a^2+b^2)S+2P}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}},$$

en posant $\qquad S=\lambda_1+\lambda_2, \qquad P=\lambda_1\lambda_2.$

D'autre part, la ligne (5) pouvait encore s'écrire

$$\frac{\alpha^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}=\frac{\beta^2}{-(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}=\frac{1}{c^2}.$$

Finalement les équations (4) deviennent

$$\frac{\alpha(2b^2-S)}{u}=\frac{\beta(2a^2-S)}{v}=\frac{2a^2b^2-(a^2+b^2)S+2P}{w}.$$

D'autre part, on trouve facilement

$$S=a^2+b^2-(\alpha^2+\beta^2), \qquad P=a^2b^2-b^2\alpha^2-a^2\beta^2,$$

d'où les relations

$$\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{u}=\frac{\beta(\alpha^2+\beta^2+c^2)}{v}=\frac{c^4-(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}{w}.$$

Il reste à éliminer α et β entre ces deux dernières équations et l'équation (3).

Ces deux dernières peuvent encore être mises sous la forme

$$\frac{\alpha[2c^2\beta^2-(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)]}{u}=\frac{\beta[2c^2\alpha^2-(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)]}{v}=\frac{c^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)}{-w}.$$

En faisant cette élimination on trouverait comme enveloppe la conique C. Mais les calculs sont longs

et pénibles. Nous allons seulement vérifier que la droite est bien tangente à cette conique, c'est-à-dire que l'on a $$E \equiv a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

Formons cette expression. Nous obtiendrons

$$E \equiv a^2\alpha^2[2c^2\beta^2 - (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)]^2 + b^2\beta^2[2c^2\alpha^2 - (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)]^2 - c^4(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2$$

et par quelques réductions évidentes on trouve bien $E \equiv 0$.

L'enveloppe des droites μ est la conique C. Z.

Solutions satisfaisantes : MM. A. Rousseau, à Landrecies ; G. Lach, à Denain.

1780. — *On sait que le lieu des projections d'un point* A *sur les génératrices d'un cylindroïde*

$$z = \frac{2kxy}{x^2 + y^2}, \qquad ou \qquad z = \frac{k(X^2 - Y^2)}{X^2 + Y^2},$$

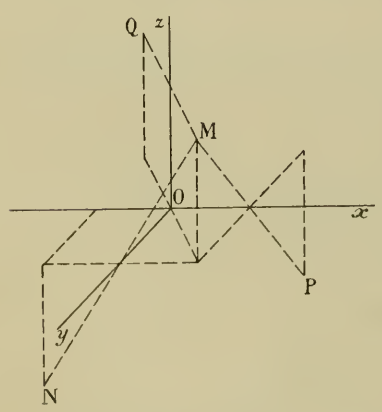
est une courbe plane dont le plan P *passe par une génératrice* G *du cylindroïde (une conique). L'abscisse et l'ordonnée du point* A *étant* x_1 *et* y_1 *(sa cote est indifférente), la génératrice* G *est celle qui correspond à* $\frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}$, *et le point de contact* B *du plan* P *avec la surface est la projection du point* A *sur cette génératrice.*

Si le point A *se déplace sur un cylindre d'axe* Oz *(ou simplement sur une section droite d'un tel cylindre), les axes* X'OX *et* Y'OY, *qui sont les bissectrices des axes primitifs* x'Ox *et* y'Oy, *interceptent sur la droite ab, projection de* AB, *une longueur constante* 2a, *a étant le rayon du cylindre ; le lieu du point* B *est l'intersection du cylindroïde et d'une quadrique de révolution : examiner les projections de cette courbe sur les plans* XOY, zOY, zOX *; montrer que le plan de l'infini est doublement osculateur à la courbe.*

Le cylindroïde qui a pour équation

$$z = \frac{2kxy}{x^2 + y^2}$$

admet pour plan directeur le plan des xy, que nous appellerons plan horizontal, et toutes ses génératrices s'appuient sur l'axe Oz qui est lui-même une génératrice double. y restant fixe, l'équation montre qu'à deux valeurs de x opposées correspondent deux valeurs opposées de z : à tout point M du cylindroïde correspond un point N symétrique par rapport à Oy, et, puisque x et y jouent dans l'équation des rôles analogues, un point P symétrique par rapport à Ox. L'axe des z est aussi, comme on le voit facilement, un axe de symétrie de la surface.



Les plans bissecteurs zOX et zOY du dièdre $xOzy$ sont plans de symétrie de la surface, puisque le changement de x en y et de y en x n'altère pas son équation. Une rotation de 45° autour de Oz amène le plan zOx sur zOX, zOy sur zOY, et l'équation de la surface devient

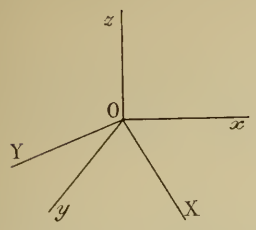
$$z = \frac{k(X^2 - Y^2)}{X^2 + Y^2}.$$

Tout plan parallèle au plan horizontal coupe la surface suivant deux génératrices qui se rencontrent sur la verticale Oz et dont le couple a pour équations

$$z = h, \qquad h(x^2 + y^2) - 2kxy = 0,$$

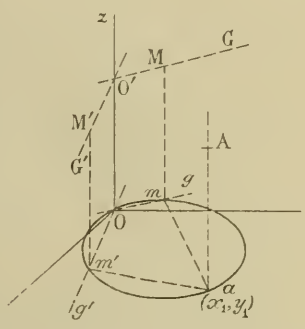
h étant la cote du plan envisagé.

Ces génératrices, symétriques par rapport à zOx et zOy, sont réelles tant que h reste compris entre $-k$ et $+k$. Lorsque h prend la valeur $-k$, elles viennent se confondre avec une parallèle à OY :



pour la valeur $+k$ elles sont confondues avec une parallèle à OX. Pour toutes les autres valeurs de k, elles sont imaginaires.

Les plans projetant le point A sur les génératrices de la surface sont tous verticaux ; ils forment un faisceau tournant autour de la verticale du point a. La cote de A est donc indifférente.



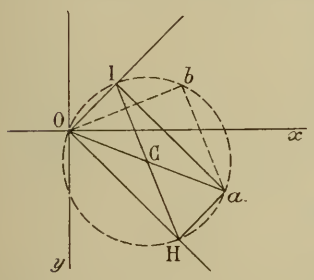
Quand le plan horizontal $z = h$ engendre la surface, les points m et m' projections horizontales des points M et M' du lieu, décrivent le cercle de diamètre Oa. Le lieu est donc l'intersection du cylindre à axe vertical $x^2 + y^2 - x_1x - y_1y = 0$ avec la surface.

L'intersection de ces deux surfaces est une courbe du sixième ordre ; mais il est facile de voir que cette courbe se décompose : Oz, génératrice double du cylindroïde, compte pour deux génératrices d'intersection. Le plan de l'infini $t = 0$ coupe les deux surfaces suivant la même conique

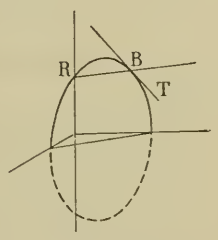
$$t = 0, \quad x^2 + y^2 = 0.$$

La partie restante de l'intersection est donc une conique. Le lieu des points M et M' est une conique. Cette conique située sur un cylindre circulaire est une ellipse.

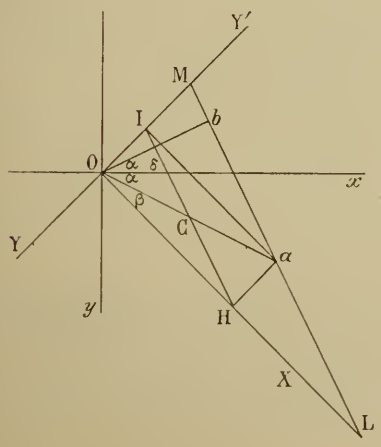
Le plan de cette courbe est facile à déterminer. Le point le plus haut est en effet donné par la génératrice de cote maximum, qui, comme on l'a vu, est parallèle à OX. Le point le plus bas est donné par la génératrice parallèle à OY. En ces deux points de la conique la tangente est horizontale : d'autre part sa projection horizontale qui lui est parallèle est tangente au cercle, d'où la construction de la direction des horizontales du plan.



Du point a on abaisse dans le plan horizontal des perpendiculaires aux bissectrices de l'angle des axes ; on obtient ainsi les projections H et I du point le plus haut et du point le plus bas de l'ellipse. La direction des horizontales est perpendiculaire à la diagonale HI du rectangle ainsi déterminé, qui n'est autre que la projection du grand axe de l'ellipse.



Le plan de l'ellipse coupe en outre la surface suivant une génératrice qui, étant une horizontale du plan et devant rencontrer l'axe des z, s'obtient de la façon suivante : on prend le point d'intersection du plan et de la verticale Oz, et l'on y fait passer l'horizontale correspondante. Cette génératrice coupe l'ellipse en deux points : l'un est situé sur l'axe Oz, l'autre, B, a pour projection le point b de rencontre du cercle avec la parallèle à HI menée par a : le point B est en effet le point du lieu correspondant à la génératrice parallèle aux horizontales du plan. En tout point de la génératrice RB il y a un plan tangent à la surface, à l'exception du point R, point de la génératrice double où la surface admet deux plans tangents : l'un est déterminé par RB et Oz, l'autre par Oz et la tangente à l'ellipse au point R, ou, ce qui revient au même, par Oz et la seconde génératrice passant par R.



Au point B, le plan tangent défini par RB et la tangente à l'ellipse, n'est autre que le plan de l'ellipse.

Il serait facile de vérifier que la projection Ob de RB est symétrique de Oa par rapport aux axes

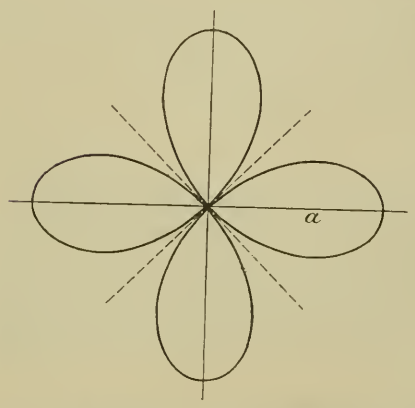
$$\alpha = 45 - \beta, \qquad \alpha' = 90 - \delta = 90 - (45 + \beta) = \alpha.$$

Si le point A se déplace sur un cylindre d'axe Oz, de rayon a, sa projection a décrit dans le plan xOy un cercle de rayon $Oa = a$. La droite ab, projection de AB, hypoténuse du triangle rectangle OLM, a une longueur $\overline{LM}$ égale au double de la médiane Oa, c'est-à-dire à $2a$; elle enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements dont les axes sont OX et OY.

Le lieu du point B de l'espace se projette sur le plan horizontal suivant une courbe qui est la podaire de l'hypocycloïde par rapport à son centre O. Cette courbe a évidemment pour équation en coordonnées polaires $\rho = a \cos 2\alpha$. Les symétries rendent sa construction très facile ; c'est une rosace à quatre branches.

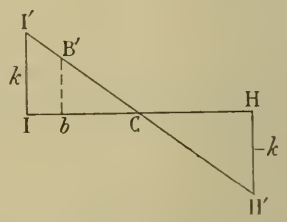
Son équation cartésienne, que l'on obtient immédiatement est $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$.

Envisageons le plan vertical Ob, qui contient le point B dont nous étudions le lieu ; le point B a pour abscisse dans ce plan $\overline{Ob}$ dont la longueur est $a \cos 2\alpha$. Cherchons la cote de B, et pour cela prenons comme plan vertical de projection le plan de trace III.



$$\frac{bB'}{II'} = \frac{Cb}{CI}$$

ou $$bB' = k \frac{\frac{a}{2} \sin 2\alpha}{\frac{a}{2}} = k \sin 2\alpha.$$



Le point B qui a pour abscisse et pour cote $a \cos 2\alpha$ et $k \sin 2\alpha$ est dans le plan envisagé sur une ellipse qui a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1$. Le lieu du point B est donc l'intersection du cylindroïde avec l'ellipsoïde de révolution ainsi défini, qui a pour équation

$$k^2(x^2 + y^2) = a^2(k^2 - z^2).$$

On obtient facilement l'équation de cette quadrique en combinant l'équation du cylindroïde et celle du cylindre projetant la rosace, ce qui constitue une vérification.

Si l'on prend comme nouveaux plans de coordonnées les plans zOY et zOX, l'équation de l'ellipsoïde ne change pas. Celle du cylindroïde devient

$$z = \frac{k(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}.$$

L'équation de la projection du lieu sur le plan zOX s'obtient en éliminant y^2 entre les deux équations

$$z = \frac{k(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \qquad k^2(x^2 + y^2) = a^2(k^2 - z^2).$$

De la seconde on tire $$y^2 = \frac{k^2(a^2 - x^2) - a^2z^2}{k^2}.$$

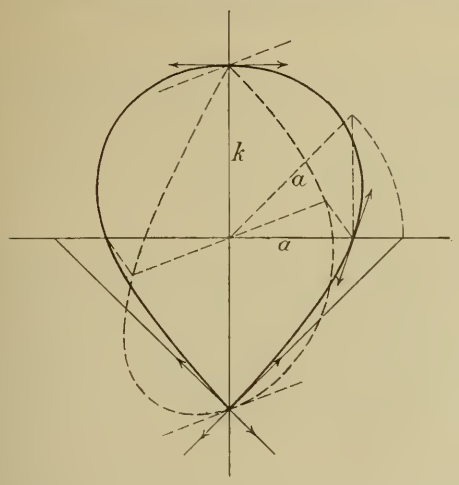
En portant dans la première on a l'équation du lieu

$$z = \frac{k\,[2k^2x^2 - a^2(k^2 - z^2)]}{a^2\,[k^2 - z^2]}$$

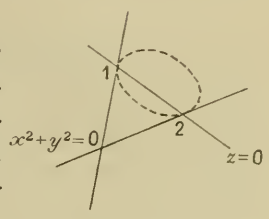
ou $$a^2(z + k)^2(z - k) + 2k^3x^2 = 0.$$

Cette équation représente une cubique admettant Oz comme axe de symétrie. Cette courbe coupe l'axe des x aux points $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{a}{\sqrt{2}}$, et l'axe des z aux points $z = k$ et $z = -k$. Ce dernier est un point double ; les tangentes en ce point, que l'on obtient facilement en y transportant l'origine des coordonnées, ont pour pentes $\frac{k}{a}$ et $-\frac{k}{a}$.

La partie de cette cubique qui représente la projection de l'intersection de l'ellipsoïde et du cylindroïde a seule été conservée sur cette figure.



La projection de la courbe sur le plan zOY est, d'après les remarques du début, symétrique de la précédente par rapport à Ox ; elle est indiquée sur cette figure en perspective.



Cette courbe, lieu du point B, étant l'intersection de surfaces de deuxième et de troisième ordre, est coupée par tout plan en six points.

Cherchons ses points d'intersection avec le plan de l'infini, et pour cela coupons les deux surfaces dont elle est l'intersection par ce plan.

Le cylindroïde est coupé par le plan de l'infini suivant les trois droites $t = 0$, $x^2 + y^2 = 0$; $t = 0$, $z = 0$;
l'ellipsoïde, suivant la conique $t = 0$, $k^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 = 0$.

On obtient évidemment les points d'intersection du plan de l'infini et de la courbe en prenant l'intersection de cette conique et de ces trois droites du plan de l'infini.

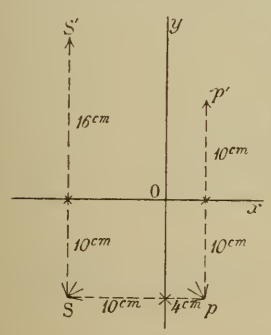
Mais les équations de la conique montrent qu'elle est tangente au couple $t = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ en ses points de rencontre avec la droite $t = 0$, $z = 0$. Sur les six points d'intersection, trois sont confondus avec 1 et trois avec 2. Le plan de l'infini est donc doublement osculateur à la courbe, aux points 1 et 2.

RICHARD TREMBLOT.

Bonnes solutions de MM. Louis SIRE ; M. AMBLARD, à Ruines ; A. ROUSSEAU ; R. SASPORTES.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1759. — *Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (qui ne seront pas passés à l'encre), les points p, p' et s, s' sont définis par le croquis ci-joint.*



On considère le conoïde droit à plan directeur horizontal ayant : 1° pour directrice rectiligne la verticale du point s, s' : 2° pour noyau la sphère (S) *de centre p, p' ayant un rayon de 6 centimètres.*

Ce conoïde étant limité d'une part à cette directrice rectiligne, de l'autre à ce noyau sphérique (supposé enlevé), on en retire toute la partie intérieure au cône de sommet s, s' circonscrit à la sphère (S).

On demande de représenter la partie restante de ce conoïde.

Les lignes de contour seront dessinées en noir (trait plein pour les parties vues, ponctué pour les parties cachées), les lignes de construction en rouge.

On indiquera la construction d'un point courant et de la tangente en ce point pour la ligne d'intersection du cône et du conoïde.

(Ecole des Ponts et Chaussées, places réservées aux conducteurs, concours de 1908.)

Le contour apparent du cône circonscrit à la sphère s'obtient en menant par chaque projection du sommet les tangentes au grand cercle de contour apparent correspondant de la sphère.

Le conoïde a pour contour apparent vertical les trois droites $s'\sigma'$, verticale sur laquelle glisse la génératrice, et $s'a'$, $\sigma'a'$ tangentes horizontales au grand cercle contour apparent de la sphère ; son contour apparent horizontal est le même que celui du cône puisque les plans tangents verticaux sont communs aux deux surfaces.

Il n'y a pas lieu de chercher la courbe de contact de la sphère et du conoïde puisqu'on demande seulement

de représenter la portion du solide extérieure au cône circonscrit à la sphère; ce solide sera limité par la courbe d'intersection des deux surfaces et ce qui subsistera du contour apparent du conoïde.

Intersection des deux solides. — Nous couperons le cône et le conoïde par des plans verticaux pivotant autour de s, $\sigma's'$: ces plans coupent chaque surface suivant des génératrices dont les points d'intersection donnent dans chaque plan auxiliaire quatre points d'intersection. Pour obtenir facilement les génératrices du cône nous donnerons à celui-ci une base plane, la courbe d'intersection de sa surface par le cylindre vertical circonscrit à la même sphère; cette base se projette horizontalement suivant le grand cercle horizontal de la sphère, et verticalement suivant la droite $b'c'$, puisque le cône et le cylindre admettent tous deux pour plan de symétrie le plan de front du centre de la sphère.

Un plan vertical auxiliaire SD coupera le cône suivant les génératrices $s\delta_1$, $s'\delta'_1$ et $s\delta_2$, $s'\delta'_2$, et le conoïde suivant deux génératrices horizontales qui sont les tangentes aux deux parallèles de la sphère dont les projections touchent la droite sd et dont nous avons immédiatement le rayon pf; les projections verticales de ces parallèles se confondent avec les projections des génératrices du conoïde et coupent les deux génératrices du cône aux points m'_1, p'_1 et d' et p'_2 qu'il suffit de rappeler en projection horizontale sur la droite sd pour avoir quatre points de la courbe. Comme l'énoncé suppose le conoïde limité à son contact avec la sphère, les points m_1 et d qui se trouvent au delà du point de contact de la génératrice du conoïde avec la parallèle ne seront pas conservés, et nous gardons seulement les points p_1, p'_1 et p_2, p'_2.

En répétant cette construction, on a autant de points de la courbe que l'on veut. Nous remarquerons que cette courbe est symétrique par rapport au plan de front qui passe par l'axe du conoïde et le centre de la sphère, puisque c'est un plan de symétrie pour les deux surfaces; la projection verticale correspondra donc à deux branches de la projection horizontale symétriques par rapport à ps.

Le plan vertical SG coupant chacune des surfaces suivant deux génératrices confondues donnera un point double g, g' sur la courbe d'intersection, et le plan vertical SP donnera sur le conoïde la génératrice la plus basse et la plus haute, le long desquelles le plan tangent à la surface est horizontal; d'ailleurs les plans tangents au cône le long des génératrices situées dans ce plan de symétrie sont de bout: ils couperont donc les précédents suivant des droites de bout en sorte que la tangente aux points correspondants de l'intersection sera une droite de bout, telle que kh'.

La tangente en un point courant de la section s'obtiendra en prenant l'intersection des deux plans tangents en ce point à chaque surface. Au point p_2, p'_2 par exemple nous avons le plan tangent au cône en prenant la trace de la génératrice sp_2, $s'p'_2$ sur le plan de base, soit δ_2, et en menant en ce point la tangente à la base; elle se projette horizontalement suivant la tangente au cercle $\delta_2 t$ et verticalement sur $b'c'$. La trace du plan tangent sur le plan équateur de la sphère est donc la droite t_1t, t'_1p'. Le plan tangent au conoïde passe par la génératrice horizontale sp_2, $s'_2p'_2$ de cette surface; on connaît donc la direction sp_2 de sa trace sur le plan de l'équateur et il suffit d'en trouver un point pour la construire. Or si on coupe le conoïde par un plan normal à la génératrice au point considéré, on sait que la tangente à la section en ce point perce le plan de l'équateur de la sphère en un point dont la distance à la projection horizontale de la génératrice est proportionnelle à la distance du point de contact à l'axe du conoïde lorsque ce point se déplace sur la même génératrice. Mais nous connaissons la trace de la tangente à la section par le plan normal au point où la génératrice touche la sphère, puisque c'est la tangente au méridien de la sphère qui passe par ce point. Il est donc facile d'en déduire le point cherché. A cet effet nous avons construit la trace qv du plan tangent à la sphère au point f, puis, ayant joint fv, nous lui avons mené une parallèle par le point p_2; cette parallèle a coupé sv en un point par où nous avons mené une parallèle à vq. On aurait pu aussi remarquer que ce point est sur la droite qui joint s à la trace de la tangente au méridien perpendiculaire à sp_2 (*). Cette parallèle est la trace du plan tangent en p_2 au conoïde; elle coupe la droite $t't$ en un point 0 que nous avons joint au point p_2, ce qui nous a donné la tangente cherchée.

La courbe d'intersection ayant été complètement construite, le solide qui reste est limité par une portion de surface conique concave sur laquelle la génératrice $s'k'$ seule subsiste au contour apparent vertical et est cachée, puis par la surface du conoïde limitée à l'axe et à la courbe d'intersection qui est entièrement vue sur

(*) Considérons le conoïde défini par les équations $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = f(\omega)$.

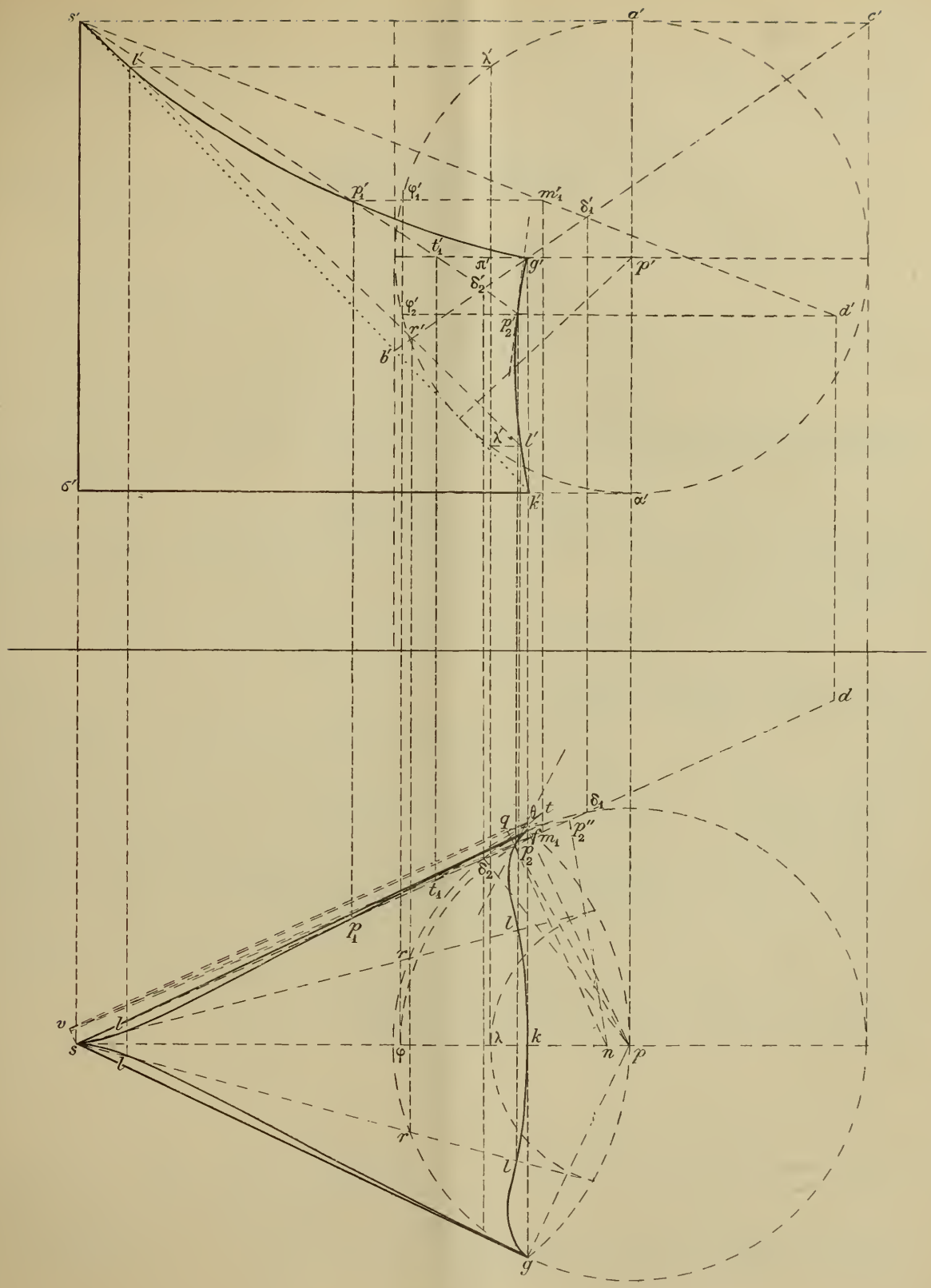
Si ρ reste constant, le point (x, y, z) décrit sur la surface une trajectoire orthogonale aux génératrices, tangente en ce point à la section de la surface par le plan normal à la génératrice qui y passe. La tangente à cette section a donc pour équations

$$X = \rho\cos\omega - k\rho\sin\omega, \qquad Y = \rho\sin\omega + k\rho\cos\omega, \qquad Z = f(\omega) + kf'(\omega).$$

Pour une valeur donnée de ω le point T de cote nulle correspond à $k = -\dfrac{f(\omega)}{f'(\omega)}$, et par suite on a

$$X = \alpha\rho, \qquad Y = \beta\rho$$

où α et β sont fonctions de ω seulement. Le point T décrit donc une droite qui rencontre Oz.



Echelle : $\frac{2}{3}$.

chaque projection. La génératrice horizontale la plus basse limite le contour apparent vertical et subsiste jusqu'au point k'.

Très bonne épure de M. P. Salleron, à Albi.

QUESTIONS PROPOSÉES

1849. — On considère le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et on suppose que ses éléments satisfont aux diverses relations

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = 0, \qquad (i \neq j)$$

les nombres i et j prenant successivement toutes les valeurs entières de 1 à n.

1° Démontrer que l'on a dans ces conditions

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0.$$

2° Démontrer que D est égal à ± 1 et que chaque élément de D est égal au mineur correspondant multiplié par ± 1.

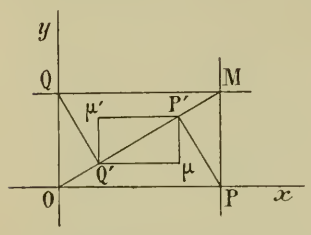
3° On considère l'équation

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - S & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - S \end{vmatrix} = 0;$$

démontrer que cette équation est réciproque.

Quand admet-elle sûrement les racines $+1$ ou -1 ?

J. Haag.



1850. — On considère deux axes rectangulaires, Ox et Oy, et un point M, dont les coordonnées sont x, y ou ω, ρ. On abaisse de ce point les perpendiculaires MP, MQ sur Ox et Oy; puis PP', QQ' sur OM; par les points P' et Q', on mène des parallèles aux axes, qui se coupent en μ, μ'.

1° Etudier, pour chaque point μ, μ', la transformation ainsi définie, en coordonnées polaires et en coordonnées rectangulaires.

2° Quels sont les lieux de ces points quand M décrit une droite, un cercle concentrique à l'origine, un cercle ayant son centre sur Ox et passant en O, etc.

Louis Sire, à Lyon.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1781. — *L'équation du 6e degré*

$$x^3[ax^2 + (x-a)^3] - (x-a)^6 = 0$$

se réduit au 5e degré. Montrer qu'elle a pour racine $x = \frac{a}{2}$ *et que les quatre autres racines sont imaginaires.*

Si on divise le premier membre de cette équation par x^6, si on y ajoute et si on en retranche l'unité, cette équation devient, après changement des signes,

$$\left(\frac{x-a}{x}\right)^6 - \left(\frac{x-a}{x}\right)^3 + \frac{x-a}{x} - 1 = 0.$$

Posant $\frac{x-a}{x} = X$, on a

$$X^6 - X^3 + X - 1 \equiv (X-1)[X^3(X^2+X+1)+1] = 0.$$

La racine $X = 1$, qui donne une racine infinie de l'équation du sixième degré en x, correspond à la disparition du coefficient du terme en x^6 dans cette équation du sixième degré.

Après suppression du facteur $X - 1$, il reste

$$X^4(X+1) + X^3 + 1 \equiv (X+1)(X^4+X^2-X+1) \equiv (X+1)\left[X^4 + \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right].$$

Sous cette dernière forme, on voit que l'équation primitive n'admet que la racine $x = \frac{a}{2}$ qui correspond à $X = -1$. Le second facteur du second membre de la dernière identité, $X^4 + \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ se compose de trois termes qui sont respectivement les carrés de X^2, de $X - \frac{1}{2}$ et de $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En égalant ce second facteur à zéro, on a donc une équation qui a ses quatre racines imaginaires. A ces quatre racines imaginaires de la transformée, correspondent évidemment quatre racines imaginaires de la proposée.

En revenant à la notation primitive en x, on peut mettre la proposée sous la forme $(2x - a)[4(x-a)^4 + x^2(x-2a)^2 + 3x^4] = 0$, sous laquelle il apparaît immédiatement que les racines de l'équation du quatrième degré, dont les trois termes du premier membre sont les carrés respectivement de $2(x-a)^2$, de $x(x-2a)$ et de $\sqrt{3}x^2$, sont imaginaires.

Donc le problème proposé revient à la vérification, qui est immédiate, de l'identité suivante :

$$x^3[ax^2 + (x-a)^3] - [x-a]^6 \equiv \frac{a}{4}(2x-a)[4(x-a)^4 + x^2(x-a)^2 + 3x^4] = 0.$$

CAMILLE MASSING, à Puttelange.

Assez bonnes solutions : MM. H. JANOIS, à Nantes ; A. DARMON ; G. LACH, à Denain ; R. MANEN, à Albi ; A. ROUSSEAU, à Landrecies ; M. RICHARD, lycée de Saint-Etienne ; G. FOUCRY, à Roanne.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1785. — *On connaît la base* BC *d'un triangle* ABC, *en grandeur et en position ; on sait en outre que l'une des bissectrices de l'angle* A, *limitée au côté* BC, AD, *satisfait à la relation*

$$AD.BC = AB.AC.$$

Trouver le lieu du sommet A *et l'enveloppe de la bissectrice* AD.

Supposons d'abord que AD soit bissectrice intérieure du triangle ABC, et désignons par E le point où cette droite rencontre le cercle circonscrit au triangle. Le point E est le milieu de l'arc BC, les deux triangles ADC et ABE sont semblables et donnent

$$AB.AC = AD.AE.$$

Comme on a par hypothèse

$$AB.AC = AD.BC,$$

on en conclut que $AE = BC$; par suite, la figure ABEC est un trapèze isocèle dont les bases sont CE et AB, et si l'on désigne par 2φ l'angle A, on a $\widehat{CBA} = \varphi$ et $\widehat{xCA} = 3\varphi$.

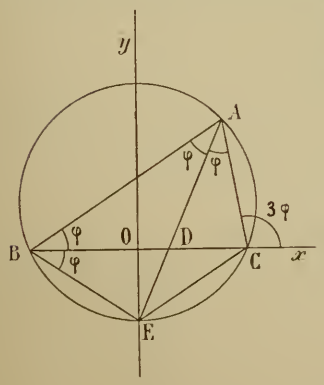


Fig. 1.

En prenant pour axes BC et la perpendiculaire élevée en son milieu O, et en posant $BC = 2a$, les équations des droites AB et AC sont alors

$$(1) \qquad y = (x+a)\operatorname{tg}\varphi, \qquad y = (x-a)\operatorname{tg}3\varphi,$$

et on aura le lieu du point A en éliminant φ entre ces deux équations.

Si nous considérons maintenant la bissectrice extérieure AD′, qui rencontre le cercle circonscrit au point E′, les triangles semblables AD′C et ABE′ nous donnent encore

$$AB.AC = AD'.AE',$$

et nous voyons que $AE' = BC$.

Par suite ACBE′ est un trapèze isocèle dont les bases sont AC et BE′, et en désignant l'angle A par $\pi - 2\varphi$, on a $\widehat{ACx} = \varphi$ et $\widehat{CBA} = 3\varphi - \pi$.

Les équations des droites AB et AC sont alors

$$(2) \qquad y = (x + a)\operatorname{tg} 3\varphi, \qquad y = (x - a)\operatorname{tg}\varphi,$$

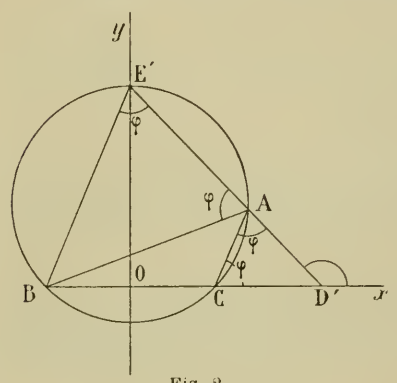


Fig. 2.

et le lieu du point A s'obtient en éliminant φ entre ces deux équations.

Remarquons que les équations (2) se déduisent des équations (1) en changeant x en $-x$ et y en $-y$. Il en résulte que le lieu engendré par le point de rencontre des droites (2) est symétrique par rapport à l'origine du lieu décrit par le point commun aux droites (1).

Il nous suffira donc de construire ce dernier lieu.

Dans la relation

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi},$$

remplaçons $\operatorname{tg}\varphi$ par $\dfrac{y}{x+a}$, $\operatorname{tg} 3\varphi$ par $\dfrac{y}{x-a}$; nous avons

$$\frac{y}{x-a} = \frac{3\dfrac{y}{x+a} - \dfrac{y^3}{(x+a)^3}}{1 - 3\dfrac{y^2}{(x+a)^2}},$$

ou, en divisant par le facteur y qui correspond à la valeur $\varphi = 0$,

$$\frac{1}{x-a} = \frac{3(x+a)^2 - y^2}{(x+a)[(x+a)^2 - 3y^2]},$$

ou encore

$$(x+a)[(x+a)^2 - 3y^2] = (x-a)[3(x+a)^2 - y^2].$$

Sous cette forme on reconnaît que le point $B(-a, 0)$ est point double. Transportons l'origine des coordonnées en ce point, l'équation se réduit à

$$x(x^2 + y^2) - a(3x^2 - y^2) = 0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire, symétrique par rapport à Ox, ayant un point double à l'origine à tangentes distinctes, et admettant pour asymptote la droite $x + a = 0$.

Pour la construire, résolvons son équation par rapport à y^2,

$$y^2 = \frac{x^2(3a - x)}{x + a}, \qquad \text{ou} \qquad y = \pm x\sqrt{\frac{3a - x}{x + a}};$$

nous discuterons seulement la valeur

$$y = x\sqrt{\frac{3a - x}{x + a}},$$

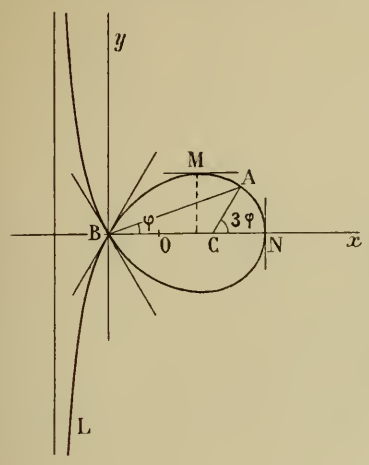
et nous prendrons la symétrique de la branche de courbe obtenue par rapport à Ox

La valeur de y n'existe que si x est comprise entre $-a$ et $3a$.

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a^2 - x^2}{(x+a)^2\sqrt{\dfrac{3a - x}{x + a}}};$$

cette dérivée est positive dans l'intervalle $(-a, \ a\sqrt{3})$ et négative dans l'intervalle $(a\sqrt{3}, \ 3a)$. On en déduit la variation de y :



x	$-a$		0		$a\sqrt{3}$		$3a$
y	$-\infty$	croît	0	croît	*max.*	décroît	0

et la branche de courbe LBMN. Les tangentes au point B font l'angle $\frac{\pi}{3}$ avec Ox.

Cette courbe est la *trisectrice de Mac-Laurin ;* elle est ainsi nommée, parce qu'elle peut servir à diviser un angle en trois parties égales. Cela résulte immédiatement des équations (1), qui nous montrent que A étant un point de la courbe, l'angle CBA est le tiers de l'angle NCA.

Observons en terminant que le lieu du point A se compose de cette trisectrice et de la courbe symétrique par rapport au point O.

Cherchons maintenant l'enveloppe de la bissectrice AD.

Dans la première hypothèse (*fig.* 1), la bissectrice AD passe par le point E qui a pour coordonnées 0 et $-a \operatorname{tg}\varphi$ et fait avec Ox l'angle 2φ. Son équation est donc

$$y + a \operatorname{tg}\varphi = x \operatorname{tg} 2\varphi. \tag{3}$$

Dans la deuxième hypothèse (*fig.* 2), le point E′ a pour coordonnées 0 et $+a \operatorname{tg}\varphi$, la bissectrice AD′ fait encore l'angle 2φ avec Ox. Donc l'équation de cette bissectrice est

$$y - a \operatorname{tg}\varphi = x \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Elle se déduit de la précédente en changeant x en $-x$ et y en $-y$; donc, son enveloppe est symétrique de l'enveloppe de la droite (3) par rapport à l'origine.

Nous allons étudier l'enveloppe de la droite (3) où nous remplacerons $\operatorname{tg}\varphi$ par t et $\operatorname{tg} 2\varphi$ par $\frac{2t}{1-t^2}$. Nous avons ainsi

$$y + at = x\frac{2t}{1-t^2} \tag{4}$$

ou

$$2tx + (t^2-1)y + at(t^2-1) = 0.$$

Comme cette équation est du troisième degré par rapport à t, par un point quelconque du plan passent trois de ces droites ; par suite, l'enveloppe est une courbe de troisième classe.

Pour avoir les coordonnées du point limite, conservons l'équation (4) et différentions-la par rapport à t, nous obtenons $a = \frac{2x(1+t^2)}{(t^2-1)^2}$, ou $x = \frac{a(t^2-1)^2}{2(t^2+1)}$, et en remplaçant x par cette valeur dans l'équation (4), nous obtenons la valeur de y, $y = -\frac{2at^3}{t^2+1}$.

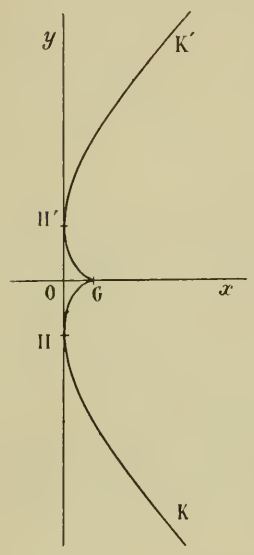
Les équations paramétriques de l'enveloppe sont donc

$$x = \frac{a(t^2-1)^2}{2(t^2+1)}, \qquad y = \frac{-2at^3}{t^2+1};$$

cette enveloppe est du quatrième degré. Si on change t en $-t$, x ne change pas et y change de signe ; la courbe est symétrique par rapport à Ox. On en construira la moitié en donnant à t des valeurs positives. En prenant les dérivées de x et y par rapport à t, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{at(t^2-1)(t^2+3)}{(t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{2at^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2},$$

et $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}$, ce qui était à prévoir d'après l'équation (4) de la tangente au point (t) de la courbe.



Quand t croît de 0 à $+\infty$, x et y varient d'une manière continue, x est minimum pour $t = 1$, et y va sans cesse en décroissant.

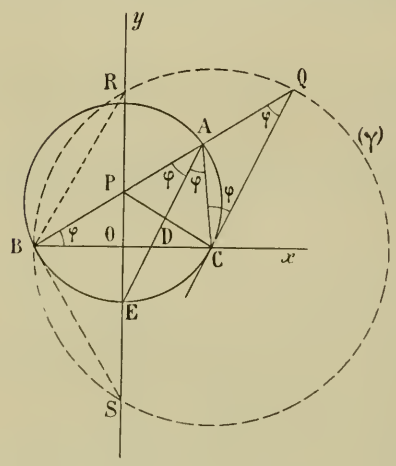
t	0		1		$+\infty$
x	$\frac{a}{2}$	décroît	0	croît	$+\infty$
y	0	décroît	$-a$	décroît	$-\infty$
$\frac{dy}{dx}$	0	croît	$+\infty$ | $-\infty$	croît	0

On en déduit l'arc de courbe GHK, et les tangentes aux points G et H qui sont respectivement Ox et Oy.

Quand t croît indéfiniment, $\frac{y}{x}$ a pour limite zéro, donc la branche infinie de courbe HK est parabolique dans la direction Ox.

L'enveloppe de la droite (4) se compose alors de l'arc GHK et de son symétrique par rapport à Ox, GH'K'; et, enfin, l'enveloppe de toutes les bissectrices AD et AD' est constituée par la courbe KHGH'K' et sa symétrique par rapport au point O.

R. MANEN, à Albi.



Remarque. — On peut démontrer géométriquement que le lieu du point A est une trisectrice de Mac-Laurin.

Traçons le cercle (γ) qui a pour centre le point C et pour rayon CB. La droite AB rencontre le cercle au point Q et Oy au point P. On voit aisément que les deux triangles isocèles BPC et CAQ sont égaux, car $BC = CQ$, et les angles à la base sont égaux à l'angle φ.

Donc $BP = AQ$, et nous voyons que le point A décrit une cubique circulaire, symétrique par rapport à BC admettant le point B pour point double, les tangentes en ce point étant les droites BR et BS qui font avec Ox l'angle $\frac{\pi}{3}$. L'asymptote est la symétrique de la droite Oy par rapport au point B. Ces propriétés caractérisent la trisectrice.

Louis SIRE.

Bonnes solutions par MM. A. Courtois, lycée de Douai ; G. Esteben ; G. Lach, à Denain ; Marescalchi ; Rieumajou ; A. Rousseau, à Landrecies.

ÉCOLE CENTRALE (1909).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

4886. — Etant donnés trois points cotés a, b, c, mener par la droite bc un plan faisant un angle α avec le plan du triangle abc.

4887. — Déterminer un plan passant par une droite donnée et faisant un angle α avec un plan donné, parallèle à la ligne de terre.

4888. — On donne les projections de deux droites situées dans un même plan, leurs traces et l'angle que fait leur plan avec le plan de comparaison. Trouver la cote de leur point de rencontre.

4889. — Déterminer dans un plan donné par ses traces, une droite faisant l'angle α avec le plan horizontal et qui se trouve à une distance a de la ligne de terre.

4890. — Mener dans un plan donné par ses traces, une droite faisant un angle donné avec le plan horizontal et telle que le segment compris entre les traces du plan ait une longueur donnée.

4891. — Construire une droite s'appuyant sur deux droites données et faisant avec chacune d'elles un angle donné.

4892. — Faire tourner un point autour d'un axe vertical, jusqu'à ce que les projections soient équidistantes de xy.

4893. — Faire tourner un point autour d'un axe vertical de façon à l'amener à une distance donnée d'un plan donné.

4894. — Faire tourner une droite autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à un plan donné par ses traces.

4895. — Faire tourner un plan autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'il passe par un point donné.

4896. — On donne une droite dans le plan horizontal et une autre droite dans le plan vertical. — Plus courte distance de ces deux droites.

4897. — Plus courte distance d'une droite à la ligne de terre.

4898. — On donne deux droites de profil, dans deux plans différents. Trouver leur plus courte distance.

4899. — Perpendiculaire commune et plus courte distance de deux droites graduées.

4900. — On donne les projections horizontales de deux droites, et les projections de leur perpendiculaire commune. Trouver les projections verticales des deux droites.

4901. — On donne les projections ab, $a'b'$ d'une droite, la projection horizontale cd d'une seconde droite et la projection horizontale mn de leur perpendiculaire commune. Trouver $m'n'$ et $c'd'$.

4902. — On donne dans le plan du tableau trois points a, b, c. Ce sont les points où les trois arêtes d'un trièdre trirectangle percent le plan du tableau. Construire la projection du trièdre et déterminer la cote du sommet.

4903. — Construire un tétraèdre régulier dont la base repose sur un plan PαQ', l'un des côtés de la base faisant un angle donné avec la trace horizontale du plan.

4904. — On donne dans un plan horizontal la base ABC d'un tétraèdre. Connaissant la cote du sommet et les pentes des faces SAB, SAC, déterminer le tétraèdre.

4905. — Construire un tétraèdre reposant sur le plan horizontal, connaissant les quatre faces.

4906. — Une pyramide a pour base le quadrilatère ABCD dans le plan de cote 0, et pour sommet le point S de cote 5. Couper la pyramide par un plan, de manière à obtenir un parallélogramme.

4907. — On donne les projections ab, $a'b'$ d'une arête d'un cube et la direction en projection horizontale d'une arête qui part du point A. Construire le cube.

4908. — On donne les projections ab, $a'b'$ de l'arête d'un parallélépipède rectangle en grandeur et position, la projection horizontale ac d'une deuxième arête, et la longueur de la troisième arête issue de a, a'. Placer le parallélépipède.

4909. — Projections d'un cube ayant une diagonale verticale.

4910. — On donne une pyramide pentagonale régulière reposant par une face latérale sur le plan du tableau. Projection de la pyramide.

4911. — On donne le sommet d'une pyramide pentagonale régulière; sa base est dans un plan donné et on connaît un sommet a, a' de cette base. Projections de cette pyramide.

4912. — Construire un dodécaèdre régulier reposant par une face sur le plan horizontal.

4913. — On donne trois points cotés, trouver les axes de l'ellipse, projection du cercle passant par les trois points.

4914. — Déterminer les axes des ellipses, projections d'un cercle dont on donne le rabattement, et le plan par sa trace horizontale et le rabattement de sa trace verticale.

4915. — Dans un plan donné par son échelle de pente, se trouve un cercle, base d'un cône de sommet s_6. On donne une droite graduée, points de rencontre de la droite avec le cône, plans tangents en ces points.

4916. — Dans un plan donné par son échelle de pente, on prend un point de cote 2. Ce point est le centre d'un cercle du plan donné, base d'un cône de sommet s_5. Contour apparent de ce cône.

4917. — On donne un cercle dans un plan de bout et un point (s, s'). Contours apparents du cône de sommet (s, s') ayant le cercle pour directrice.

4918. — Contours apparents d'un cône de sommet (s, s') dont la base est un cercle donné par son centre et son rayon dans un plan défini par la ligne de terre et un point.

4919. — On donne un cercle dans un plan parallèle à la ligne de terre et un point s, s'. Contours apparents du cône ayant (s, s') comme sommet et le cercle donné pour directrice.

4920. — Contours apparents d'un cône de révolution dont la base est située dans un plan parallèle à la ligne de terre. On donne le sommet (s, s') du cône et une génératrice sa, $s'a'$.

4921. — Un triangle dont les sommets a, b, c ont respectivement pour cotes 1, 2, 3 est projeté suivant un triangle équilatéral. Coter un point du plan de ce triangle connaissant sa projection horizontale o. C'est le centre d'un cercle de rayon donné, situé dans le plan du triangle. Contour apparent d'un cône de sommet s_6 ayant ce cercle pour base.

4922. — On donne un tétraèdre régulier SABC. Contour apparent du cône de sommet A dont la base est le cercle circonscrit au triangle SBC.

4923. — Contour apparent d'un cylindre dont la base est un cercle dans un plan défini par son échelle de pente et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée.

4924. — On donne un plan par son échelle de pente, et un cercle, dans ce plan, qui est la base d'un cône de sommet S_6. Ombre de ce cône sur le plan, les rayons lumineux ayant une direction donnée.

4925. — Ombre d'un cône de révolution à axe de front, éclairé par des rayons parallèles, eux-mêmes de front.

4926. — Ombre propre d'un cône dont la base est un cercle situé dans un plan de profil.

4927. — Contours apparents et ombre au flambeau d'un cylindre défini par un cercle dans un plan de profil et la direction de ses génératrices.

4928. — Par un point donné, mener une tangente commune à deux cônes de sommets donnés dont les bases sont des cercles donnés, dans un même plan.

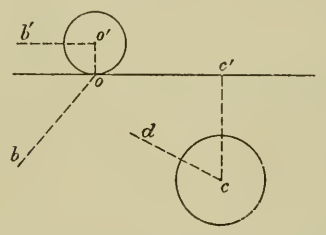
4929. — On donne deux cônes de révolution dont les bases sont l'une dans le plan vertical, l'autre dans le plan horizontal ; mener par ce point une tangente commune aux deux cônes.

4930. — On donne un cône de révolution d'axe de bout dont la base est un cercle du plan vertical ; dans un plan horizontal, on donne un cercle, base d'un cylindre vertical. Par un point m, m' donné, mener une droite s'appuyant sur le cône et le cylindre.

4931. — On donne une droite graduée. Mener par cette droite un plan de pente $\frac{3}{5}$.

4932. — On donne un point sur la ligne de terre. C'est le sommet d'un cône de révolution tangent aux deux plans de projection. On donne d'autre part la génératrice de contact avec le plan horizontal et on demande les contours apparents du cône.

4933. — Un cylindre a pour base dans le plan vertical un cercle o, o', les génératrices sont parallèles à l'horizontale $ob, o'b'$; un deuxième cylindre a pour base dans le plan horizontal, le cercle c, c' et la projection horizontale de ses génératrices est donnée suivant cd. Trouver la projection verticale $c'd'$ de façon que les deux cylindres aient un plan tangent commun.



4934. — Construire un cylindre de révolution tangent à la fois à un cône de révolution donné par son axe, son sommet et son angle au sommet, et au plan horizontal suivant une direction donnée.

4935. — Normales communes à deux cônes dont les bases sont des cercles horizontaux.

4936. — Normales communes à deux cylindres de révolution, l'un vertical, l'autre de bout.

4937. — Dans un plan de bout $P\alpha Q'$ on donne deux cercles par leurs centres et leurs rayons ; le premier est la base d'un cône de sommet s, s', le second est base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan $P\alpha Q'$. Normales communes au cône et au cylindre.

4938. — On donne un cylindre de base circulaire et une droite ; normales communes au cylindre et à la droite.

4939. — Normales communes à un cône circulaire dont le sommet est dans le plan vertical et à une droite quelconque.

4940. — On donne un plan par ses traces et dans ce plan un cercle qui est la base d'un cylindre de révolution. Normales communes à la ligne de terre et au cylindre.

4941. — On donne une droite $a_5 b_1$ et un cône dont la base est un cercle dans le plan de cote 0 et le sommet le point s_4. Normales communes au cône et à la droite.

4942. — Lieu du point d'où on voit un cylindre de révolution sous un angle donné.

4943. — On donne un plan de bout et une droite quelconque : mener par cette droite un plan faisant un angle donné avec le plan donné.

4944. — On donne un plan par ses traces et une droite $ab, a'b'$. Mener par la droite un plan faisant un angle α avec le plan donné.

4945. — On donne un plan parallèle à la ligne de terre, et une droite quelconque. Mener par cette droite un plan faisant avec le premier un angle donné α.

4946. — Mener par un point une droite faisant un angle α avec le plan de comparaison et un angle β avec une droite donnée.

4947. — On donne deux droites graduées ; mener par la première un plan faisant un certain angle avec la seconde.

4948. — Mener par un point une droite faisant des angles donnés avec deux droites de l'espace, données par leurs projections.

4949. — Mener une droite s'appuyant sur deux droites données et faisant avec les plans de projection des angles donnés.

4950. — On donne deux plans, l'un vertical, l'autre de bout. Mener par un point (m, m') un plan faisant des angles donnés avec les plans donnés.

4951. — Trouver sur une droite les points situés à une distance donnée de la ligne de terre.

4952. — On donne deux droites AA', BB' et un point quelconque (m, m'). Mener par (m, m') une droite qui soit à une distance α de AA' et à une distance β de BB'.

4953. — Mener par un point une droite qui soit à une distance donnée d'une droite donnée.

4954. — Par une droite de profil, mener un plan dont les traces fassent entre elles un angle donné.

4955. — Mener d'un point les plans tangents à deux sphères données.

4956. — On donne deux sphères dont les centres ont même cote. Leur mener un plan tangent commun parallèle à une direction donnée.

4957. — Mener par un point une droite tangente à une sphère donnée et à un cylindre de révolution donné, d'axe vertical.

4958. — Mener par un point une droite tangente à une sphère, et faisant un angle donné avec le plan de comparaison.

4959. — On donne une sphère éclairée par des rayons parallèles. Trouver les points de la courbe d'ombre situés sur un plan horizontal donné. Trouver ceux qui sont sur un méridien vertical donné.

4960. — Courbe de séparation d'ombre et de lumière d'une sphère éclairée par un point de la ligne de terre.

4961. — Mener par une droite un plan tangent à une sphère.

4962. — Par une droite de profil, ab, $a'b'$, mener un plan tangent à une sphère dont le centre est sur la ligne de terre.

4963. — On donne une droite graduée et une sphère par son centre et son rayon. Mener par la droite des plans tangents à la sphère.

4964. — Mener par trois points donnés par leurs projections cotées une sphère tangente au plan de comparaison.

4965. — Sphère inscrite dans un tétraèdre donné.

4966. — Ombre au soleil d'une droite sur une sphère.

4967. — On donne une sphère de rayon $R = 2^m$ et dont le centre est un point O de cote 3^m. On donne aussi un plan par son échelle de pente. Couper la sphère par un plan parallèle au plan donné, de façon que la section ait un rayon donné r.

4968. — On donne une sphère et une droite ; mener par cette droite un plan coupant la sphère suivant un cercle de rayon donné.

4969. — On donne trois sphères. Trouver un plan les coupant suivant trois cercles de rayons donnés.

4970. — On donne une sphère et deux points A, B. Mener par B un plan, à une distance d de A et coupant la sphère suivant un cercle de rayon r.

4971. — On donne un cône de révolution à axe vertical ; déterminer sur le cône le lieu des points tels que leur cote soit égale à leur éloignement. Développer le cône et construire la transformée de la section. Point, tangente, points d'inflexion.

4972. — On trace un secteur circulaire dont l'angle au centre égale un droit ; comment inscrire un cercle dans ce secteur ? — On enroule le secteur circulaire de façon à obtenir un cône de révolution d'axe vertical. Trouver les projections du cône ainsi que celles de la courbe qui se transforme suivant le cercle. Construction d'un point et de la tangente en ce point.

4973. — Un plan étant donné par ses traces, lieu des points de ce plan tels que $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$, α et β désignant la cote et l'éloignement du plan. Construire un point du lieu et la tangente en ce point.

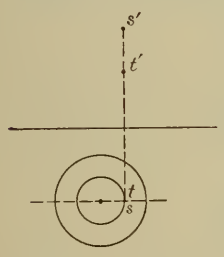
4974. — Trouver dans un plan donné par ses traces un point qui se trouve à des distances données de deux droites données.

4975. — Points à l'infini dans l'intersection de deux cônes à bases circulaires horizontales.

4976. — On donne deux cylindres ayant pour bases deux cercles dans le plan horizontal. Intersection : point et tangente ; points où la tangente est horizontale. Ligne des points doubles en projection. Mener par un point donné une droite tangente aux deux cylindres.

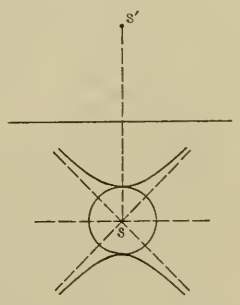
4977. — On donne dans le plan horizontal deux cercles (c, c'), (d, d') dont la ligne des centres est parallèle à xy ; soient s, t les deux points d'intersection de ces deux cercles. Un premier cône a pour sommet (s, s') et pour base le cercle (c, c'), un second cône a pour sommet (t, t') et pour base le cercle (d, d'). Intersection des deux cônes ; asymptotes.

4978. — On considère deux cercles concentriques ; le plus grand est la base d'un cône de révolution, le plus petit celle d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une génératrice du cône. Intersection des deux surfaces.

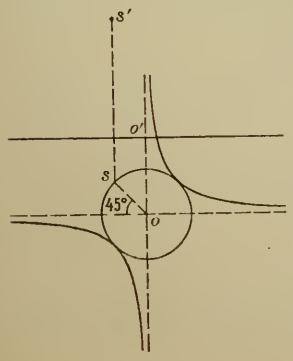


4979. — On donne deux cercles concentriques dans le plan horizontal ; le petit cercle est la base d'un cône de sommet (s, s'), et le grand cercle la base d'un cône de sommet (t, t') ; intersection et particularités.

4980. — On donne un cercle dans le plan horizontal, base d'un cône de révolution de sommet (s, s') ; on donne dans le même plan horizontal une hyperbole équilatère dont l'axe transverse est perpendiculaire à xy ; c'est la base d'un cylindre droit. Intersection du cône et du cylindre.



4981. — On donne un cône de sommet (s, s') et dont la base est le cercle (o, o') dans le plan horizontal. Intersection de ce cône avec un cylindre ayant pour base l'hyperbole équilatère figurée ci-contre.



4982. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un cylindre de bout.

4983. — On donne deux plans de bout PαQ', PαR' ayant même trace horizontale. Intersection de deux cônes ayant pour sommets deux points donnés et pour bases deux cercles donnés par leurs centres et leurs rayons, l'un dans le plan PαQ', l'autre dans le plan PαR'.

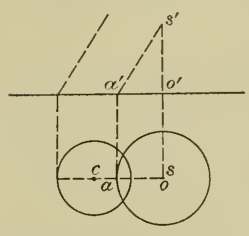
4984. — On donne deux plans et dans ces plans deux ellipses projetées horizontalement suivant deux cercles donnés ; elles sont les bases de deux cônes ayant pour sommets les points (s, s'), (t, t') sur la ligne de terre. Intersection des deux cônes. Points où la tangente est horizontale.

4985. — On donne deux cercles égaux, tangents au même point à xy, l'un vertical de centre (o, o'), l'autre horizontal de centre (ω, ω'). Intersection du cône ayant pour sommet le point (ω, ω') et pour base le cercle (o, o') avec le cône ayant pour sommet le point (o, o') et pour base le cercle (ω, ω').

4986. — On donne un cylindre défini par un cercle du plan vertical, et dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée. Dans un plan de profil, on donne un cercle qui doit être tangent à la trace du plan de profil sur un plan PQ', parallèle à la ligne de terre. Ce cercle est la base d'un second cylindre dont les génératrices sont parallèles à XY. Intersection des deux cylindres.

4987. — Contour apparent d'un cône ayant pour sommet le sommet A d'un tétraèdre régulier SABC et pour base le cercle inscrit dans la face opposée SBC. Intersection de ce cône avec un cylindre dont la base est le cercle inscrit dans la face ABC, les génératrices étant parallèles à SA.

4988. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical, avec un cylindre ayant pour base un cercle dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à une génératrice de front du cône. Particularités de l'intersection. Asymptotes.



4989. — On donne un cylindre de révolution à axe vertical ; un plan de front est tangent au cylindre et à un cône de sommet (s, s') dont la base est un cercle dans le plan horizontal. Intersection des deux surfaces.

4990. — On donne un cylindre de révolution d'axe horizontal et un cône de révolution par son sommet, son axe et son angle. Trouver un point de l'intersection ; tangente en ce point. Déterminer les contours apparents du cône et son ombre propre, les rayons lumineux ayant une direction donnée.

4991. — On donne un cylindre horizontal dont la base est un cercle dans le plan vertical et un cône de révolution dont l'axe est dans le plan horizontal. Intersection, point et tangente, asymptotes.

4992. — Intersection d'un cône de révolution ayant sa base dans le plan vertical avec un cylindre de front ayant pour base dans le plan horizontal une hyperbole équilatère dont une asymptote est perpendiculaire à la ligne de terre.

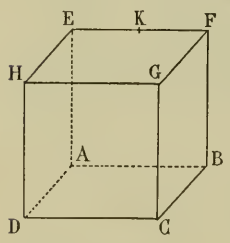
4993. — On donne un tétraèdre régulier SABC ; on considère un cylindre de révolution d'axe SC et de diamètre AB et un deuxième cylindre dont la base est le cercle inscrit à SBC et les génératrices sont parallèles à SA. Intersection. — Même problème en remplaçant le second cylindre par un cône de sommet A ayant pour base le cercle inscrit à SBC.

4994. — Etant donné un tétraèdre SABC, on considère un cercle dans le plan SAE perpendiculaire à la face ABC : ce cercle est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à BC. Intersection de ce cylindre avec un cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans la face SBC.

4995. — Intersection d'un cône ayant pour base le cercle inscrit dans la face horizontale d'un cube et son sommet au centre de la face parallèle avec un cylindre de révolution inscrit dans le même cube et ayant ses génératrices perpendiculaires à l'axe du cône.

4996. — Un cône a pour sommet le centre de l'une des faces de profil d'un cube et pour base le cercle inscrit dans la face opposée. Intersection avec le cylindre vertical qui a pour base le cercle inscrit dans la face qui repose sur le plan horizontal.

4997. — On considère un cube ABCDEFGH, adossé aux deux plans de projection. Intersection du cône de sommet E, ayant pour base le cercle inscrit dans la face BCGF avec le cône de sommet F ayant pour base le cercle inscrit dans la face ABCD.



4998. — Intersection du cône de sommet F ayant pour base le cercle inscrit dans la face ADHE avec le cône ayant pour sommet le milieu K de l'arête EF et pour base le cercle inscrit dans la face ABCD.

4999. — Intersection de deux cônes de sommets (s,s'), (t,t') ayant un cercle donné pour base commune.

5000. — On donne deux cônes qui ont même base circulaire dans le plan horizontal et pour sommets des points (s, s'), (t, t'), tels que s et t soient aux extrémités d'un même diamètre parallèle à xy. Intersection de deux cônes et particularités.

5001. — Intersection des deux cylindres ayant pour base commune une ellipse donnée dans un plan de front P.

5002. — Intersection de deux cylindres ayant pour base commune un cercle dans un plan de profil.

5003. — Un cercle de front tourne autour d'un axe vertical et engendre une surface. Soit m' la projection verticale d'un point de la surface, trouver la projection horizontale m et le plan tangent en ce point.

5004. — On donne une surface engendrée par une courbe quelconque située dans un plan de front, en tournant autour d'un axe vertical. Connaissant la projection verticale d'un point, trouver la projection horizontale, déterminer le plan tangent en ce point, ainsi que le point de la méridienne principale situé sur le parallèle de ce point.

5005. — Dans un plan de bout à 45° sur le plan horizontal on donne un cercle par son centre (o,o') et son rayon. Ce cercle tourne autour de la verticale qui passe par l'extrémité du diamètre horizontal la plus rapprochée du plan vertical. — Trouver un point de la méridienne principale; connaissant la projection verticale m' d'un point, trouver sa projection horizontale m. — Plan tangent en ce point.

5006. — On considère une courbe dont les projections sont deux cercles égaux ; on la fait tourner autour d'une verticale ω. Déterminer un point de la surface connaissant sa projection verticale m'. Plan tangent en ce point.

5007. — On donne l'axe (quelconque) d'une surface de révolution, la projection horizontale m d'un point de la surface et sa distance à l'axe; trouver la projection verticale m'.

5008. — On considère un ellipsoïde de révolution à axe vertical ; trouver un plan le coupant suivant une courbe dont la projection soit un cercle.

5009. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et un plan PαQ'. Trouver le sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde le long de la section de la surface par ce plan.

5010. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un plan de bout bitangent.

5011. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution : 1° à axe vertical; 2° à axe de front.

5012. — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution à axe de front.

5013. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un cylindre de révolution de front dont l'axe rencontre celui du cône : particularités de la projection verticale.

5014. — On donne un cylindre de révolution parallèle à xy et un cône de révolution dont l'axe rencontre l'axe du cylindre. Intersection des deux surfaces.

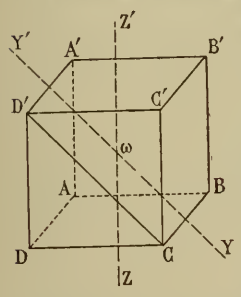
5015. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes situés dans un même plan de profil sont l'un vertical, l'autre horizontal.

5016. — Intersection d'un cylindre de révolution horizontal et d'un cône de révolution d'axe horizontal, dont le sommet est situé sur l'axe du cylindre.

5017. — Intersection d'un cône circonscrit à une sphère avec un cylindre circonscrit à la même sphère.

5018. — On donne un cône de révolution à axe vertical et un cylindre de révolution de bout dont une section droite est inscrite dans la section du cône par le plan de front contenant l'axe. — Intersection ; plans des deux courbes planes.

5019. — On donne un cube adossé aux deux plans de projection. L'arête DD′ tourne autour de l'axe vertical ZZ′ et la diagonale CD′ autour de l'axe de front YY′ qui joint les milieux des arêtes opposées BC, A′D′. Intersection de deux surfaces engendrées.



5020. — On donne l'axe sa, $s'a'$ d'un cône de révolution d'angle au sommet donné. Déterminer un point connaissant l'une de ses projections. Intersection avec une sphère.

5021. — On donne une sphère de centre (O, O′) et un cylindre ayant pour directrice la section de la sphère par le plan passant par xy et le point (O, O′), les génératrices étant parallèles à une direction donnée. Intersection. Courbe de contact du cylindre circonscrit à la sphère dont les génératrices sont parallèles à celles du cylindre précédent.

5022. — Intersection d'un paraboloïde de révolution d'axe de bout avec une sphère, avec un ellipsoïde de révolution d'axe de bout également.

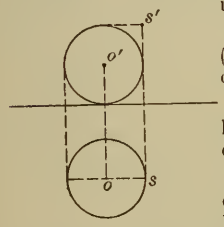
5023. — On donne un tore à axe vertical. On considère un cône circonscrit à une sphère donnée et qui a pour sommet un point de l'axe du tore. Intersection des deux surfaces.

5024. — Soit dans un plan de front un cercle (C, C′) et un axe vertical (Z, Z′). On considère le tore engendré par le cercle (C, C′) en tournant autour de cet axe ; un cône a pour sommet le point (S, S′) de l'axe et pour base la section du tore par le plan de profil du centre du cercle (C, C′). Intersection des deux surfaces.

5025. — On donne dans un plan de front deux axes, l'un vertical, l'autre horizontal et deux cercles égaux ayant leurs centres sur chacun des axes. Chaque cercle en tournant autour de l'axe qui ne contient pas son centre engendre un tore. Intersection des deux tores ainsi engendrés.

5026. — Un cône de sommet (S, S′) a pour base une courbe quelconque dans le plan horizontal. Intersection avec une sphère (O, O′).

5027. — Intersection d'une sphère (O, O′) avec un cône dont le sommet est au centre de la sphère et dont la base est une ellipse donnée dans le plan horizontal. Point et tangente. Tangentes horizontales.



5028. — On donne une sphère tangente au plan horizontal ; un cône a pour sommet le point (s, s') et pour base dans le plan horizontal le cercle de contour apparent horizontal de la sphère. On demande un point de l'intersection des deux surfaces. Particularités. — Tangentes au point double.

5029 — Intersection d'une sphère avec un cylindre dont la base est une ellipse donnée dans le plan horizontal ; ligne des points doubles en projection horizontale. Comment reconnaître si le cylindre a des génératrices tangentes à la sphère ?

5030. — On donne une sphère (o, o') et dans le plan horizontal du centre une ellipse dont on donne la projection horizontale. Cette ellipse est la base d'un cylindre de front dont on demande l'intersection avec la sphère.

5031. — Déterminer une génératrice d'un hyperboloïde de révolution, de façon que sa projection verticale soit parallèle à une direction donnée.

5032. — On donne une hyperbole et une droite de l'espace qui rencontre l'hyperbole. La droite et l'hyperbole peuvent-elles appartenir à un même hyperboloïde de révolution ? Trouver son axe.

5033. — Construire une droite s'appuyant sur trois droites données. Combien y a-t-il de solutions ? Quelle est la surface engendrée par ces droites, son centre, etc ?

5034. —Intersection d'une droite et d'un hyperboloïde défini par trois génératrices.

5035. — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est défini par une génératrice de front A, A′ et son axe. Intersection avec un cône admettant A,A′ comme génératrice et dont la directrice est une courbe donnée dans le plan horizontal.

5036. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical par son cercle de gorge et une génératrice de front. Cette génératrice appartient aussi à un cylindre elliptique dont la base est donnée dans le plan horizontal. Intersection des deux surfaces.

5037. — On donne deux frontales (ab, $a'b'$), (cd, $c'd'$). Contour apparent horizontal de la surface engendrée par une droite de profil s'appuyant sur les deux frontales données.

5038. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par ses deux plans directeurs qui sont les deux plans de projection, les traces de la surface sur ces deux plans et le sommet du paraboloïde. Etant donnée la projection horizontale d'un point, trouver la projection verticale.

5039. — Mener un plan tangent, parallèle à un plan donné, à un paraboloïde hyperbolique dont les plans directeurs sont les plans de projection et dont on connaît les traces sur ces deux plans, ainsi que le sommet.

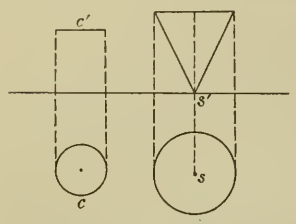
5040 – On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Mener à cette surface un plan tangent parallèle à un plan donné.

5041. — On donne un paraboloïde hyperbolique par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Mener un plan tangent par un point (s, s'). Point de contact.

5042. — On donne une sphère éclairée par des rayons lumineux parallèles. Ombre portée sur le plan horizontal.

5043. — On donne un cône de révolution d'axe vertical et un cercle horizontal dont le centre est sur l'axe du cône. Trouver l'ombre de ce cercle sur le cône. Point le plus haut de l'ombre.

5044. — Un cône de révolution à axe vertical repose par son sommet (s, s') sur le plan horizontal. On donne un cercle (c, c') dans un plan horizontal. Ombre du cercle sur le cône.



5045. — On donne dans un plan de profil la base d'un cylindre de révolution perpendiculaire à ce plan, puis un cercle horizontal. Trouver l'ombre du cercle sur le cylindre.

5046. — On donne un plan de bout et un point dans ce plan : c'est le centre d'un cercle de rayon R, base d'un cylindre de révolution. On considère un second plan de bout parallèle au premier et le point de rencontre de ce nouveau plan avec l'axe du cylindre ; on prend ce point pour centre d'un cercle de rayon plus grand que R, situé dans le deuxième plan. Ombre de ce cercle sur le cylindre, les rayons lumineux ayant une direction donnée. Trouver les points où en projection verticale la tangente est parallèle aux traces verticales des deux plans de bout.

5047. — On donne un demi-cylindre de révolution creux, limité à un plan horizontal. Ombre propre et ombre portée à l'intérieur.

5048. — On donne un demi-cône de révolution creux, limité à un plan horizontal. On l'éclaire par des rayons lumineux parallèles à une direction donnée. Ombre propre, ombre portée à l'intérieur. Point de l'ombre portée où la tangente est horizontale.

5049. — On donne un cône de révolution d'axe vertical et un cylindre de révolution vertical. Intersection, points à tangente horizontale. Ombres propres du cône et du cylindre, les rayons lumineux étant parallèles à une direction donnée. Ombre portée par l'une des surfaces sur l'autre.

5050. — On donne un cylindre vertical de révolution sur lequel repose un prisme à base carrée de même axe que le cylindre. Ombre propre du cylindre. Ombre portée par le prisme sur le cylindre (rayons lumineux à 45°).

5051. — Même problème en remplaçant le prisme par un second cylindre de révolution de même axe que le premier.

5052. — Ombre de l'écuelle, demi-sphère creuse, éclairée par des rayons lumineux de direction donnée. Ombre portée par le bord supérieur. Nature de la courbe d'ombre, à priori.

5053. — Ombre au soleil d'une sphère sur une autre sphère.

QUESTIONS PROPOSÉES

1851. — On donne deux circonférences O et O′ qui se coupent en B et C, on joint un point A de la circonférence O à B et C, et on détermine ainsi sur O′ les points B′ et C′.

Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de A sur B′C′ ainsi que l'enveloppe de B′C′.

Voir ce que deviennent ces courbes, quand les cercles O et O′ sont orthogonaux ou tangents.

Étude géométrique de la question.

G. Lach, à Denain.

1852. — De l'eau étant placée dans un vase qu'on supposera protégé contre tout échange de chaleur avec le milieu ambiant, on y fait passer bulle à bulle de l'air sec pris à la pression H et à la température T et qui se sature d'humidité en traversant le liquide. Ecrire une relation entre la masse d'eau M contenue à un moment donné dans le vase et sa température t. Calculer à 1° près la température la plus basse que l'eau puisse atteindre, à l'aide des données numériques suivantes :

$H = 760^{mm}$, $T = 15°$. Chaleur spécifique de l'air : $C = 0{,}237$.

Densité de la vapeur d'eau $\delta = 0{,}625$. Chaleur de vaporisation de l'eau $\lambda = 606{,}5 - 0{,}695\ t$.

Forces élastiques maxima de la vapeur d'eau de degré en degré, de 0° à 10°, en millimètres de mercure : 4,6 ; 4,9 ; 5,3 ; 5,7 ; 6,1 ; 6,5 ; 7,0 ; 7,5 ; 8,0 ; 8,6 ; 9,2.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Avril 1910. N° 7.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

ÉTUDIÉE PAR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES

par M. **A. Durand**, professeur au lycée Saint-Louis.

1. — Soient Ox, Oy (fig. 1) deux axes rectangulaires, et sur Ox deux points F et F′ symétriques par rapport à O.

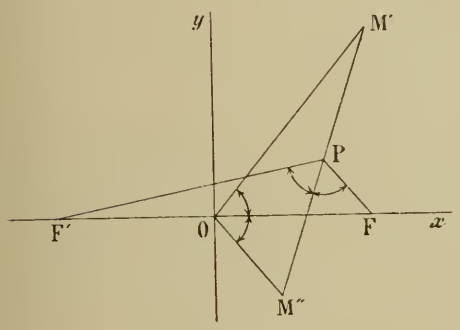


Fig. 1.

Soit $\overline{OF} = -\overline{OF'} = c$. Désignons par z le nombre complexe, affixe d'un point M du plan, $z = x + iy$, et par Z l'affixe d'un autre point P, $Z = X + iY$. Faisons correspondre le point P au point M par la transformation

$$(1) \qquad Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right);$$

la relation entre Z et z, mise sous forme entière, est

$$(2) \qquad z^2 - 2Zz + c^2 = 0.$$

A tout point M, (z), sauf au point O, correspond *un point* P et *un seul*. Inversement, P, c'est-à-dire le nombre complexe Z, étant donné, il existe deux valeurs de z, soient z' et z'', racines de l'équation (2), et par suite au point P correspondent *deux points* M′ et M″.

Entre z' et z'' existent les relations

$$(3) \qquad z' + z'' = 2Z,$$

$$(4) \qquad z'z'' = c^2.$$

La première exprime que :

Théorème I. — *Le point* P *est le milieu de* M′M″ (fig. 1).

La seconde exprime que :

Théorème II. — *Les vecteurs* $\overline{OM'}$, $\overline{OM''}$ *sont inverses l'un de l'autre, la puissance étant* $\overline{OF}^2$: *c'est-à-dire que le produit des modules* $\overline{OM'} \times \overline{OM''}$ *est égal à* $\overline{OF}^2$, *et que les arguments sont égaux et de signes contraires ;* OF *est donc bissectrice intérieure de l'angle* M′OM″.

La transformation par laquelle on passe de M′ à M″, ou inversement, est une *inversion* (pôle O, puissance c^2), *suivie d'une symétrie* relative à Ox.

L'équation (2) peut s'écrire, en ajoutant Z^2 de part et d'autre,

$$Z^2 - c^2 = Z^2 - 2Zz + z^2 = (Z - z)^2, \qquad \text{ou} \qquad (Z - c)(Z + c) = (Z - z)^2,$$

équation entre des quantités complexes, qui se décompose en deux autres :
équation entre les modules :

$$(5) \qquad \overline{PF} \times \overline{PF'} = \overline{PM'}^2 = \overline{PM''}^2;$$

équation entre les arguments,

$$\text{(6)} \qquad \arg.\,(Z - c) + \arg.\,(Z + c) = 2\arg.\,(Z - z') + 2k\pi,$$

ce qui équivaut à $\frac{1}{2}$ (angle PF + angle PF′) = angle PM′ + $k\pi$ = angle PM″ + $k\pi$,

les angles étant ceux que les vecteurs font avec Ox. Cette dernière relation montre que M′ et M″ sont situés sur la bissectrice *intérieure* de l'angle de PF avec PF′ (on sait déjà que M′ et M″ sont symétriques relativement à P).

2. **Théorème III.** — *Il y a donc entre le groupe de points* F, O, F′ *d'une part, et le groupe* M′, P, M″ *de l'autre deux relations réciproques très remarquables :*

1° $PM' = PM'' = \sqrt{PF \times PF'}$ et $OF = OF' = \sqrt{OM' \times OM''}$.

2° M′M″ *est bissectrice intérieure de l'angle* FPF′, *et de même* FF′ *est bissectrice intérieure de l'angle* M′OM″.

Théorème IV. — M′, M″, F, F′ *sont sur un cercle, et relativement à ce cercle, les cordes* M′M″, F′F *sont conjuguées* (*).

Traçons en effet le cercle M′FF′ (*fig.* 2) et soit R le point où OM′ prolongé coupe ce cercle. On aura, entre les longueurs des vecteurs, la relation

$$OM' \times OR = OF' \times OF.$$

Donc les longueurs OM″ et OR sont égales ; les points R et M″ sont symétriques relativement à Oy, et le cercle, qui a son centre sur Oy (puisqu'il passe en F et F′), passant par R, passera aussi par M″.

Soit de même S le point où OM″ coupe le cercle. Il est symétrique de M′ relativement à Oy. Les deux droites RS et M′M″ se coupent sur Oy, en un point I, O et I sont donc conjugués par rapport au cercle.

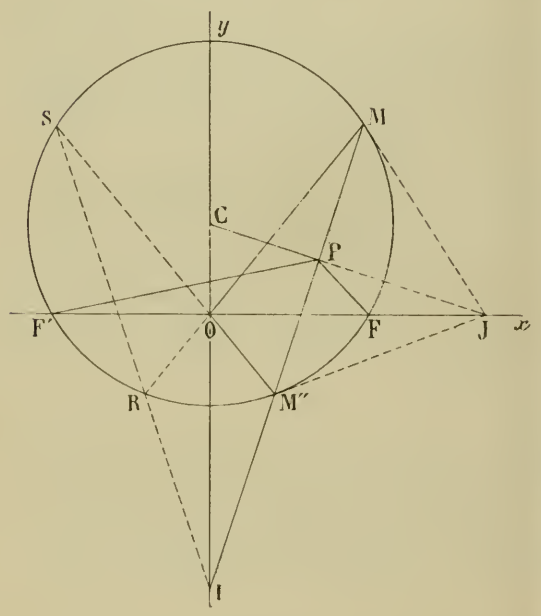


Fig. 2.

3. *Construction géométrique des points correspondants* (*fig.* 2).

P étant connu, on obtient M′ et M″ en traçant la bissectrice intérieure de l'angle FPF′, et en portant sur cette bissectrice, de part et d'autre de P, la moyenne géométrique de PF et PF′.

Si le point M′ est donné, on trace le cercle FM′F′, et l'on mène la demi-droite symétrique de OM′ relativement à Ox ; cette demi-droite coupe le cercle, dont le centre est sur Oy, en un seul point M″. P est le milieu de M′M″.

Cette construction est en défaut si M′ est situé sur FF′, mais dans ce cas on opérera ainsi : on prendra le conjugué harmonique de M′ relativement à F et F′, et P sera le milieu de M′M″.

5. Nous allons étudier quelques propriétés de cette transformation.

L'équation qui la définit peut s'écrire, en retranchant c de part et d'autre,

$$Z - c = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z} - 2c\right),$$

(*) Dans le *Bulletin de Mathématiques Elémentaires*, M. Ch. Michel a publié une étude géométrique des quadrilatères ayant cette propriété. Plusieurs résultats obtenus dans cette note y sont déjà formulés. Mais la méthode est tout à fait différente.

Depuis l'envoi de la présente note, M. Michel en a publié une dans le n° de février 1909 de la Revue sur le même sujet.

c'est-à-dire

$$(7) \qquad Z - c = \frac{1}{2z}(z-c)^2;$$

on aura de même

$$(7') \qquad Z + c = \frac{1}{2z}(z+c)^2,$$

et par division,

$$(8) \qquad \frac{Z-c}{Z+c} = \left(\frac{z-c}{z+c}\right)^2.$$

Cette équation complexe se décompose en deux autres :
équation entre les modules,

$$(9) \qquad \frac{PF}{PF'} = \left(\frac{M'F}{M'F'}\right)^2 = \left(\frac{M''F}{M''F'}\right)^2,$$

équation entre les arguments,

$$\frac{1}{2}\,(\text{angle } PF - \text{angle } PF') = \text{angle } M'F - \text{angle } M'F' + k\pi,$$

(les angles étant toujours ceux que les vecteurs forment avec Ox); cette équation montre que

$$\widehat{FPF'} = 2\,\widehat{FMF'} + k\pi;$$

et cette égalité a lieu pour M′ et pour M″ (*fig.* 3).

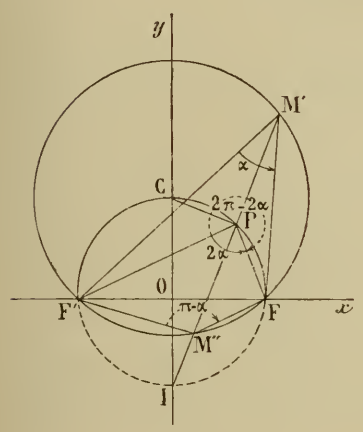


Fig. 3.

Ces propriétés permettent de transformer deux systèmes de cercles :

1° *Cercles ayant* O*y pour axe radical*, F *et* F′ *pour points limites de Poncelet : un de ces cercles se transforme en un cercle du même faisceau.*

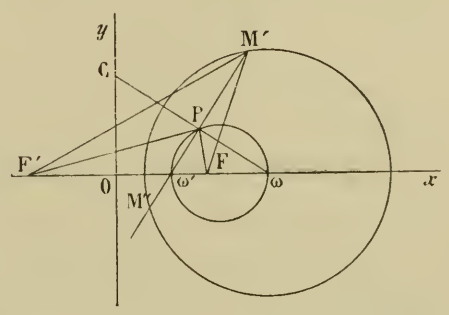


Fig. 4.

Car si P décrit un de ces cercles, $\frac{PF}{PF'} = r$, et par suite $\frac{MF}{MF'} = \sqrt{r}$; le cercle que décrit P passe par le centre ω de celui que décrivent M′ et M″, et la droite M′PM″ passe par le point fixe ω′ conjugué de ω relativement à F et F′ (*fig.* 4).

2° *Cercles ayant* O*x pour axe radical, et passant en* F *et* F′ *: un de ces cercles se transforme en un cercle du même faisceau* (*fig.* 3).

Si M décrit un cercle passant en F et F′, l'angle $FMF' = \alpha$ sur un arc, et $\alpha - \pi$ sur l'autre, donc $FPF' = 2\alpha$ ou $2\alpha - 2\pi$; P se déplace donc sur un cercle passant en F et F′, mais *il ne décrit qu'un segment capable* (de F en F′) *quand* M′ et M *parcourent un cercle entier.* Ce segment est celui qui passe par le centre C du cercle que décrivent M′ et M″.

La ligne M′M″, bissectrice de FPF′, passe par un point fixe I situé sur O*y*.

6. Revenons aux équations (7) et (7′),

$$Z - c = \frac{1}{2z}(z-c)^2, \qquad Z + c = \frac{1}{2z}(z+c)^2;$$

elles donnent entre les modules $\quad PF = \frac{\overline{M'F}^2}{2OM'} \quad$ et $\quad PF' = \frac{\overline{M'F'}^2}{2OM'}$;

en ajoutant, on obtient

$$PF + PF' = \frac{\overline{M'F}^2 + \overline{M'F'}^2}{2OM'}, \qquad \text{or} \qquad \overline{M'F}^2 + \overline{M'F'}^2 = 2\overline{OM'}^2 + 2\overline{OF}^2,$$

la relation précédente devient donc

$$(11) \qquad PF + PF' = OM' + \frac{c^2}{OM'}.$$

En retranchant au contraire, on obtient

$$(12) \qquad PF' - PF = \frac{\overline{M'F'}^2 - \overline{M'F}^2}{2OM'} = \frac{2\overline{OH} \times \overline{F'F}}{2OM'},$$

H étant la projection de M′ sur Ox.

Or $\frac{OH}{OM'} = \cos(xOM')$, on a donc

$$(12) \qquad PF' - PF = 2c\cos(xOM').$$

Ces relations permettent de transformer deux autres systèmes de courbes.

1° *Ellipses ayant* F *et* F′ *pour foyers. Il leur correspond des cercles ayant* O *pour centre.* Car si $PF + PF' = 2a$, on a $OM' + \frac{c^2}{OM'} = 2a$; M′ et M″ décrivent les cercles dont les rayons sont racines de

$$x + \frac{a^2 - b^2}{x} = 2a.$$

Ces rayons sont $a - b$ et $a + b$, et les cercles sont bien connus sous le nom de *cercles de Chasles.*

2° *Hyperboles ayant* F *et* F′ *pour foyers. Il correspond à chacune d'elles deux droites issues de* O, *qui sont précisément ses asymptotes.* Car si $PF - PF' = 2a$, on aura $\cos(xOM') = \frac{a}{c}$.

Dans le premier cas la droite PM′ est *normale* à l'ellipse, dans le second cas elle est *tangente* à l'hyperbole; dans les deux cas, sa longueur est moyenne géométrique entre celles des rayons vecteurs de P.

7. Reprenons encore les équations

$$PF = \frac{1}{2}\frac{\overline{M'F}^2}{OM'}, \qquad PF' = \frac{1}{2}\frac{\overline{M'F'}^2}{OM'},$$

et multiplions membre à membre : nous trouvons $PF.PF' = \frac{1}{4}\left(\frac{M'F.M'F'}{OM'}\right)^2$.

Remplaçons $2\overline{OM'}^2$ en fonction de $\overline{M'F}^2$ et $\overline{M'F'}^2$ par $\overline{M'F}^2 + \overline{M'F'}^2 - 2c^2$, et prenons les inverses,

$$\frac{1}{2PF.PF'} = \frac{1}{\overline{M'F}^2} + \frac{1}{\overline{M'F'}^2} - \frac{2c^2}{\overline{MF}^2 \cdot \overline{M'F'}^2};$$

divisons par $2c^2$ et retranchons de $\frac{1}{4c^4}$ les deux membres, l'équation se met sous la forme :

$$(13) \qquad \frac{1}{4c^2}\left[\frac{1}{c^2} - \frac{1}{PF.PF'}\right] = \left(\frac{1}{2c^2} - \frac{1}{\overline{M'F}^2}\right)\left(\frac{1}{2c^2} - \frac{1}{\overline{M'F'}^2}\right).$$

Si le produit $\overline{PF}.\overline{PF'}$ est une constante quelconque, le lieu de M′ et de M″ est une courbe du quatrième degré (quartique bicirculaire).

Mais un cas très intéressant est celui où $PF \times PF' = c^2$, car le lieu de M′ et de M″ est formé de deux cercles, ayant F et F′ pour centres, et $c\sqrt{2}$ pour rayon ; d'ailleurs

$$PM' = PM'' = \sqrt{PF.PF'} = c.$$

Le lieu de P est la *lemniscate* qui a F et F′ pour foyers (*fig.* 5). On retrouve ainsi la description connue de la lemniscate par un *système articulé formé de trois barres :* en effet F′M″, FM′, M′M″ sont constants, et respectivement égaux à $c\sqrt{2}$, $c\sqrt{2}$ et $2c$, et le point P est milieu de M′M″. On peut prendre comme position initiale du système deux côtés opposés Fm', F′m'', et la diagonale $m'm''$ du carré dont FF′ est la seconde diagonale. Si l'on déforme ce système, articulé en m' et m'', F et F′ étant fixes, le milieu de $m'm''$ décrit la lemniscate qui a F et F′ pour foyers.

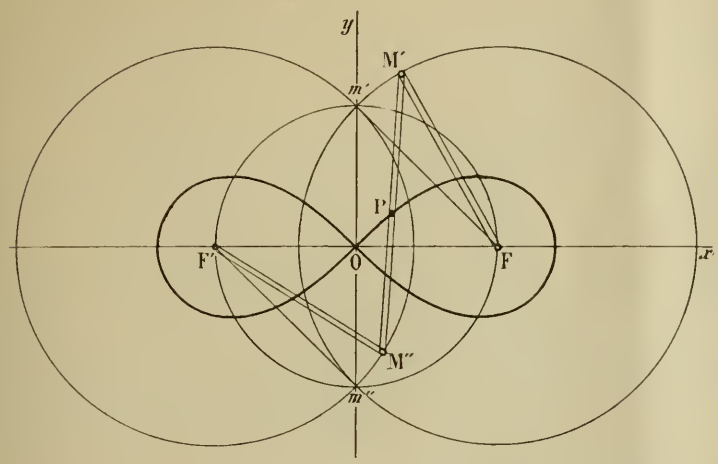


Fig. 5.

8. *Propriétés de la transformation relatives aux tangentes.*

Une transformation définie par une équation $Z = f(z)$ a la propriété de conserver les angles. On peut le démontrer aisément dans le cas particulier que nous étudions.

Supposons que z' soit fonction d'un paramètre t : $z' = a(t) + ib(t)$; on aura

$$Z = z' + z'', \qquad \text{avec} \qquad z'z'' = a^2.$$

Z est donc aussi une fonction de t. En dérivant ces équations par rapport à t, on a

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dz'}{dt} + \frac{dz''}{dt}, \qquad 0 = z''\frac{dz'}{dt} + z'\frac{dz''}{dt},$$

ce qui donne

$$(14) \qquad \frac{dZ}{dt} = \left(1 - \frac{z''}{z'}\right)\frac{dz'}{dt} = (z' - z'')\frac{d\log z'}{dt} = i\mathrm{M''M'}d\,\frac{\log z'}{dt}.$$

Or soit $z' = re^{i\theta}$, $\log z' = \log r + i\theta$, et $\dfrac{d\log z'}{dt} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{dt} + i\dfrac{d\theta}{dt}$.

Le vecteur $\dfrac{dz'}{dt}$, porté par la tangente à la courbe que décrit M′ (dont l'affixe est z'), est donc le produit du vecteur z' par $\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{dt} + i\dfrac{d\theta}{dt}$.

Cela exprime que ce vecteur est la résultante de deux vecteurs, l'un $z' \times \dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{1}{r}$, l'autre $z' \times \dfrac{d\theta}{dt} \times i$. Le premier est porté par l'axe OM′ ; en prenant OM′ comme sens positif, sa mesure algébrique est $\mathrm{OM'}.\dfrac{dr}{rdt} = \dfrac{dr}{dt}$ (car $\mathrm{OM'} = r$) ; l'autre est porté par l'axe mené par M′ faisant l'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ avec OM′, sa mesure algébrique est $r\dfrac{d\theta}{dt}$.

Or l'équation (14) exprime que le vecteur $\dfrac{dZ}{dt}$ est la résultante de deux vecteurs, l'un $2\mathrm{PM'}\dfrac{dr}{rdt}$, porté sur l'axe PM′ (dans le sens PM′ si $\dfrac{dr}{rdt} > 0$), l'autre $2\mathrm{PM'}\dfrac{d\theta}{dt}$ porté sur l'axe PC qui fait avec PM′ l'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

Il en résulte évidemment que :

Théorème V. — *L'angle de la tangente en* P *avec* PM′ *est égal à l'angle de la tangente en* M′ *avec* OM′, *et de même l'angle de la tangente en* P *avec* PM″ *est égal à l'angle de la tangente en* M″ *à la courbe que décrit* M″ *avec* OM″ (*fig.* 6)

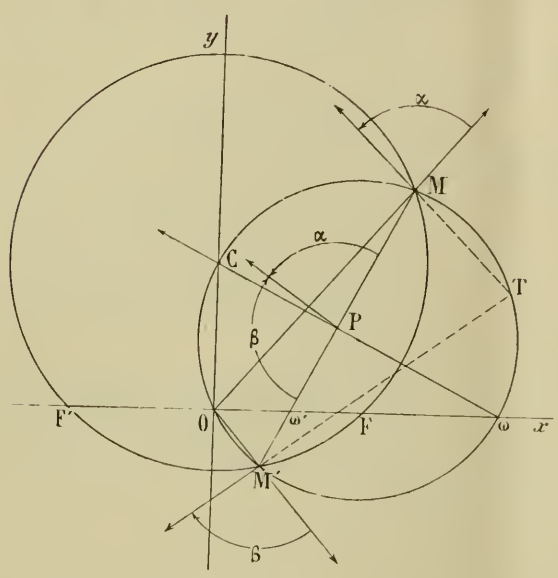


Fig. 6.

Donc si deux courbes se coupent en un point M′ sous l'angle V, les courbes transformées se coupent au point P sous le même angle.

Application. — Nous avons vu que le système S_1 des droites issues de O se change en un système d'hyperboles ayant F et F′ pour foyers, et que le système S_2 des cercles ayant O pour centre se change en un système d'ellipses ayant F et F′ pour foyers.

Or les systèmes S_1 et S_2 sont orthogonaux. On retrouve donc la propriété connue que les ellipses et hyperboles homofocales forment deux systèmes orthogonaux.

Mais on peut remarquer aussi que les courbes qui coupent sous un angle constant les droites du système S_1 ou les cercles du système S_2 sont des spirales logarithmiques, superposables les unes aux autres par une rotation autour de O (puisque les cercles du système S_2 admettent cette rotation), ou par une homothétie dont le pôle est O (puisque les droites S_1 ne changent pas par cette homothétie). On peut donc énoncer :

Théorème VI. — *Les trajectoires sous un angle constant* V *des ellipses ou des hyperboles ayant* F *et* F′ *pour foyers sont les courbes déduites de ces spirales logarithmiques par la transformation qui vient d'être étudiée* (*).

Le calcul des coordonnées d'un point est facile : l'équation en coordonnées polaires de la spirale est $r = ce^{(\theta-\theta_0)m}$ (r, rayon vecteur, θ, angle polaire, θ_0, constante arbitraire, m, constante qui dépend de l'angle V); or $z = re^{i\theta}$.

Donc $$z' = ce^{(\theta-\theta_0)m+i\theta}, \qquad z'' = ce^{-(\theta-\theta_0)m-i\theta},$$

et $$Z = \frac{1}{2}c\left[e^{(\theta-\theta_0)m}\times(\cos\theta + i\sin\theta) + e^{-(\theta-\theta_0)m}\times(\cos\theta - i\sin\theta)\right]$$
$$= c\left[\frac{e^{(\theta-\theta_0)m}+e^{-(\theta-\theta_0)m}}{2}\times\cos\theta + i\,\frac{e^{(\theta-\theta_0)m}-e^{-(\theta-\theta_0)m}}{2}\sin\theta\right]$$
$$= c[\operatorname{ch} m(\theta-\theta_0)\times\cos\theta + i\operatorname{sh} m(\theta-\theta_0)\times\sin\theta].$$

Les coordonnées d'un point de la trajectoire sont donc, en fonction du paramètre θ :

$$X = c\cos\theta\operatorname{ch} m(\theta-\theta_0), \qquad Y = c\sin\theta\operatorname{sh} m(\theta-\theta_0).$$

(*) Ce théorème a déjà été établi précédemment par l'auteur, voir *Revue*, n° d'octobre 1909, p. 315.

N. d. l. R.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1909.

1787. — *Étant donnée la fonction* $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$ *de la variable réelle* x :

1. *Étudier les variations de cette fonction et les représenter par une courbe.*

2. *Calculer l'intégrale indéfinie* $\int y dx$.

3. *Soit* $F(x)$ *l'une quelconque des fonctions primitives de* y :

Trouver trois constantes P, Q, R, *telles que la fonction*

$$\Phi(x) = F(x) - Px^2 - Qx - R\,L\,|x|$$

reste finie lorsque x *devient infini, et prouver qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs des constantes* P, Q, R *satisfaisant à cette condition.*

Nota. — *La notation* $L\,|x|$ *désigne le logarithme népérien de la valeur absolue de* x.

4. *Les constantes* P, Q, R *étant celles qui satisfont à la condition précédente, et* $F(x)$ *désignant la fonction* $F(x) = \int_3^x y dx$, *déterminer, d'une manière précise, ce que devient la fonction* $\Phi(x)$, *lorsque* x *devient infini.*

1. — La fonction proposée s'écrit

$$y = x^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}};$$

elle est définie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, nulle pour $x = 0$ et pour $x = 6$, négative avant la valeur 6 et positive ensuite. Sa dérivée est

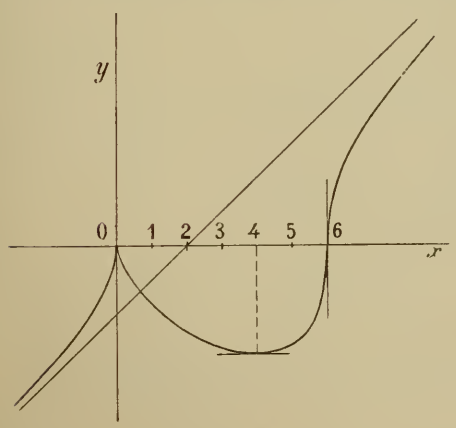
$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(x-6)^{-\frac{2}{3}},$$

ou

$$y' = \frac{2(x-6)+x}{3\sqrt[3]{x(x-6)^2}} = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}};$$

elle change de signe pour $x = 0$ et pour $x = 4$; elle est positive de $-\infty$ à 0, négative de 0 à 4, et positive de 4 à $+\infty$. Si on remarque en outre que pour $x = 0$ et $x = 6$ la dérivée est infinie, puis que pour $x = 4$, $y = -2\sqrt[3]{4}$, que pour $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$, on peut tracer de suite l'allure générale de la courbe qui représente les variations de la fonction.

On précise cette forme en cherchant l'asymptote. Pour obtenir celle-ci, il suffit de mettre y sous la forme



$$y = x\left(1 - \frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et de développer le second membre en série, pour les grandes valeurs de x. La formule du binome s'applique alors à $\left(1 - \frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ et donne

$$1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{40}{3}\frac{1}{x^3}\cdots;$$

on a donc de suite

$$y = x - 2 - \frac{4}{x} - \frac{40}{3}\frac{1}{x^2}\cdots.$$

L'asymptote est la droite $y = x - 2$; elle est au-dessous de la courbe à gauche et au-dessus à droite. Rien n'est plus aisé dès lors que de tracer la courbe, avec une approximation suffisante. Cette courbe est une

cubique unicursale, qui a un point de rebroussement à l'origine. Cette remarque va être utilisée de suite et guider notre marche dans la seconde partie.

2. — Pour calculer $\int y dx$, il nous suffit d'exprimer x et y rationnellement à l'aide d'un paramètre. A cet effet, posons $y = tx$; nous aurons de suite

$$t^3x = x - 6, \qquad x = \frac{6}{1-t^3}; \qquad \text{puis,} \qquad y = \frac{6t}{1-t^3}, \qquad dx = \frac{18t^2dt}{(1-t^3)^2}.$$

L'intégrale cherchée devient alors

$$F(x) = \int y dx = \int \frac{6.18t^3dt}{(1-t^3)^3}, \qquad \frac{F(x)}{6.18} = \int \frac{t^3dt}{(1-t^3)^3}.$$

Intégrons par parties, en prenant $u = t$, $dv = \dfrac{t^2dt}{(1-t^3)^3}$; nous aurons

$$\frac{F(x)}{6.18} = \frac{1}{6}\frac{t}{(1-t^3)^2} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{(1-t^3)^2}.$$

Or $$\int \frac{dt}{(1-t^3)^2} = \int \frac{(1-t^3+t^3)dt}{(1-t^3)^2}, \qquad \int \frac{dt}{(1-t^3)^2} = \int \frac{dt}{1-t^3} + \int \frac{t^3dt}{(1-t^3)^2}.$$

Appliquons le même procédé de réduction à l'intégrale $\displaystyle\int \frac{t^3dt}{(1-t^3)^2}$, nous obtiendrons de même

$$\int \frac{t.t^2dt}{(1-t^3)^2} = \frac{1}{3}\frac{t}{1-t^3} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^3};$$

par conséquent, en appelant J l'intégrale $\displaystyle\int \frac{dt}{1-t^3}$, la fonction $F(x)$ s'obtient par la formule

$$\frac{F(x)}{18} = \frac{t}{(1-t^3)^2} - \frac{1}{3}\frac{t}{1-t^3} - J + \frac{1}{3}J.$$

Reste à calculer J. Pour y parvenir, il n'y a qu'à décomposer $\dfrac{1}{1-t^3}$ en fractions élémentaires. Ce calcul se fait immédiatement et donne

$$\frac{1}{1-t^3} = \frac{1}{3(1-t)} + \frac{2+t}{3(1+t+t^2)};$$

et l'on a ensuite

$$J = \int \frac{dt}{3(1-t)} + \int \frac{(2+t)dt}{3(1+t+t^2)}.$$

La première de ces intégrales est immédiate ; la seconde s'obtient aisément en posant $t + \dfrac{1}{2} = z\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et finalement on trouve

$$J = -\frac{1}{3}L(1-t) + \frac{1}{6}L(1+z^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} z.$$

Comme $z = \dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$, ceci s'écrit

$$J = -\frac{1}{3}L(1-t) + \frac{1}{6}L(1+t+t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}},$$

toujours à une constante près.

Remplaçons enfin $-\dfrac{2}{3}J$ par sa valeur dans $\dfrac{F(x)}{18}$, nous aurons définitivement

$$\frac{F(x)}{18} = \frac{t}{(1-t^3)^2} - \frac{t}{3(1-t^3)} + \frac{2}{9}L(1-t) - \frac{1}{9}L(1+t+t^2) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Il serait facile de revenir à x en remplaçant dans cette expression t par $\sqrt[3]{\dfrac{x-6}{x}}$; mais il est

préférable de garder la forme précédente, qui est plus commode que celle que l'on obtiendrait ainsi.

3. — Nous avons vu dans la première partie que y se développe en série pour les valeurs de x telles que $|x| > 6$ et nous avons trouvé

$$y = x - 2 - \frac{4}{x} - \frac{40}{3}\frac{1}{x^2} - \dots;$$

par suite,

$$F(x) = C + \frac{x^2}{2} - 2x - 4L|x| + \frac{40}{3}\frac{1}{x} + \cdots;$$

donc la fonction $\Phi(x) = F(x) - \frac{x^2}{2} + 2x + 4L|x|$ reste finie quand x devient infini.

Il n'existe pas d'autre système de valeurs des constantes P, Q, R que les valeurs $\frac{1}{2}$, -2, -4; car, s'il y en avait un autre, la fonction correspondante $\Phi_1(x)$ serait donnée par

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) + (P - P_1)x^2 + (Q - Q_1)x + (R - R_1)L(x)$$

et deviendrait infinie avec x, puisque, si une seule des constantes $P - P_1$, $Q - Q_1$, $R - R_1$ n'est pas nulle, le trinome $(P - P_1)x^2 + (Q - Q_1)x + (R - R_1)L|x|$ devient infini avec x.

Pour apercevoir ce dernier point, il suffit de raisonner de la façon suivante : supposons d'abord $P - P_1 \neq 0$, le trinome peut s'écrire

$$x^2\left[P - P_1 + (Q - Q_1)\frac{1}{x} + (R - R_1)\frac{L|x|}{x^2}\right],$$

et comme $\frac{1}{x}$ et $\frac{L|x|}{x^2}$ tendent vers 0 avec $\frac{1}{x}$, il est visible que le trinome devient infini avec x et prend la forme $x^2(P - P_1 + \varepsilon)$, ε étant infiniment petit; supposons ensuite $P - P_1 = 0$ et $Q - Q_1 \neq 0$, alors nous avons de même la forme $x(Q - Q_1 + \varepsilon)$, qui montre que cette quantité devient infinie avec x; enfin, supposons que $P - P_1 = 0$, $Q - Q_1 = 0$ et que $R - R_1 \neq 0$, le trinome se réduit à $(R - R_1)L|x|$ qui devient aussi infini avec x.

Pour que $\Phi_1(x)$ reste fini, quand x devient infini, il est donc nécessaire que $P_1 = P$, $Q_1 = Q$, $R_1 = R$, et la troisième partie est entièrement démontrée.

4. — Pour trouver la quatrième partie en gardant la variable t, nous remarquons que, pour $x = 3$, $t = -1$, et que, pour $x = \infty$, $t = 1$. La fonction $F(x) = \int_3^x y\,dx$ est donc celle des fonctions $F(x)$ que nous avons calculées, et qui s'annule pour $t = -1$; elle a pour expression en fonction de t

$$\frac{F(x)}{18} = \frac{t}{(1-t^3)^2} - \frac{t}{3(1-t^3)} + \frac{1}{9}L\frac{(1-t)^3}{1-t^3} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} - \frac{2}{9}L2 - \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Nous aurons $\frac{\Phi(x)}{18}$ en ajoutant à cette fonction le trinome $-\frac{x^2}{36} + \frac{x}{9} + \frac{2}{9}L|x|$,

ou

$$-\frac{1}{(1-t^3)^2} + \frac{2}{3(1-t^3)} + \frac{2}{9}L\frac{6}{1-t^3}.$$

Ce calcul se fait aisément et nous donne

$$\frac{\Phi(x)}{18} = \frac{t-1}{(1-t^3)^2} + \frac{2-t}{3(1-t^3)} + \frac{1}{9}L\left(\frac{1-t}{1-t^3}\right)^3 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9}L3 - \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$$

La partie rationnelle se réduit sans peine, le facteur $(t-1)^2$ disparaît haut et bas, et cette partie devient

$$\frac{t^2-1}{3(1+t+t^2)^2};$$

par conséquent, pour x infini, c'est-à-dire pour $t = 1$, on a

$$\frac{\Phi(x)}{18} = \frac{1}{12} - \frac{1}{9}\,\mathrm{L}3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

La constante demandée est donc

$$18\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{9}\,\mathrm{L}3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{2} - 2\mathrm{L}3 - 2\pi\sqrt{3}.$$

Remarque. — On peut parvenir autrement au résultat trouvé antérieurement : on peut d'abord déterminer la partie algébrique de l'intégrale, puis la partie transcendante se calcule après sans difficulté.

A cet effet, remarquons que l'intégrale $F(x)$ ne renferme aucune partie entière en t, autre qu'une constante ; la partie entière cherchée est donc de la forme

$$\frac{at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f}{(1 - t^3)^2}$$

et nous déterminerons les constantes a, b, c, d, e, f en dérivant cette expression, la retranchant de $\frac{t^3}{(1 - t^3)^3}$ et exprimant que cette différence ne contient plus que $(1 - t^3)$ au dénominateur.

Le premier calcul nous donne

$$\frac{5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e}{(1 - t^3)^2} + \frac{6t^2(at^5 + bt^4 + \cdots)}{(1 - t^3)^3}.$$

nous avons donc à exprimer que le polynome

$$t^3 - 6t^2(at^5 + bt^4 + \cdots) - (1 - t^3)(5at^4 + 4bt^3 + \cdots)$$

est divisible par $(1 - t^3)^2$.

Faisons $t^3 = 1$; nous aurons

$1 - 6t^2(at^2 + bt + c + dt^2 + et + f)$, puis, $1 - 6at - 6b - 6ct^2 - 6dt - 6e - 6ft^2$;

ce polynome doit être identiquement nul, ce qui donne $f = -c$, $d = -a$, et $6b + 6e = 1$.

Remplaçons f et d par leurs valeurs et divisons le polynome indiqué par $1 - t^3$, il nous restera

$6at^4 + 6ct^2 + 6bt^3 - 5at^4 - 4bt^3 - 3ct^2 + 2at - e$, ou $at^4 + 2bt^3 + 3ct^2 + 2at - e$.

Ce polynome doit être divisible aussi par $1 - t^3$, c'est-à-dire que le polynome

$$at + 2b + 3ct^2 + 2at - e$$

doit être identiquement nul, ce qui donne $a = 0$, $c = 0$, $e = 2b$; comme d'autre part $6b + 6e = 1$, nous voyons que $b = \frac{1}{18}$ et $e = \frac{2}{18}$.

La partie rationnelle est donc, pour $\frac{F(x)}{6.18}$, $\frac{t^4 + 2t}{18(1 - t^3)^2}$, et pour $F(x)$, $\frac{6(t^4 + 2t)}{(1 - t^3)^2}$.

Ce résultat concorde bien avec celui qui a été trouvé dans la première solution.

Quant à la partie transcendante, nous en aurons la dérivée en simplifiant le polynome

$$at^4 + 2bt^3 + 3ct^2 + 2at - e$$

et le divisant par $1 - t^3$. Nous trouvons ainsi $-\frac{2}{18}$. La partie transcendante de $\frac{F(x)}{6.18}$ est donc fournie par l'intégrale $\frac{-2}{18}\int\frac{dt}{1 - t^3}$, résultat conforme aussi à celui déjà trouvé.

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Denain ; Sallerron, conducteur des ponts et chaussées à Albi ; G. Foucry, à Reims ; Amblard, à Ruines.

Assez bonnes solutions : MM. R. Manen, à Albi ; Rousseau, à Landrecies ; G. Deperrois ; J. Thomas, à Lyon ; A. Courtois, à Douai.

1788. — *On considère une hélice* (H) *tracée sur un cylindre de révolution ayant* Oz *pour axe. Soit* a *le rayon du cercle de base et* h *le pas réduit, c'est-à-dire que* $2\pi h$ *est la longueur interceptée par deux*

spires consécutives sur toute génératrice du cylindre. Sur l'hélice (H) *on prend deux points* L *et* N, *et l'on considère le centre de gravité* G *de l'arc* LN *supposé homogène.*

1. *On suppose que l'arc* LN *varie en conservant le même milieu* M.

Démontrer que, dans ces conditions, le point G *décrit une droite rencontrant normalement* Oz.

2. *On demande le lieu du point* G, *quand l'arc* LN *varie de telle manière que la corde* LN *reste parallèle à un plan fixe quelconque.*

3. *Appelons* (S) *la surface lieu du point* G *lorsque* L *et* N *varient arbitrairement sur l'hélice. Montrer que le plan tangent en* G *à la surface* (S) *n'est autre que le plan* π *mené par les extrémités* L, N *de l'arc et par son milieu* M.

Comment varie ce plan tangent lorsque l'arc varie en conservant le même milieu?

4. *On suppose que chaque élément de l'arc* LN *attire un point fixe,* P, *proportionnellement à la distance* r *de ce point à l'élément et proportionnellement à la longueur* ds *elle-même, en sorte que l'attraction exercée par l'élément* ds *sur le point* P *a pour expression* $\mu r ds$, *où* μ *désigne une constante positive.*

On demande de démontrer que les attractions exercées sur le point P *par l'ensemble des éléments* ds *ont pour résultante une force finie* F *dirigée vers le point* G.

Dire quelle est l'expression de cette résultante F.

5. *Avec quelle vitesse faudrait-il lancer le point* P, *à partir du point* L *pour qu'il décrive, sous l'influence de la force* F, *le cercle* Ω *qui a pour centre le point* G *et qui passe non seulement au point* L, *mais encore au point* N ?

Supposons que l'axe des x rencontre l'hélice en un point A et que le sens de rotation de Ox vers Oy corresponde au sens ascendant de l'hélice. Alors les équations paramétriques de l'hélice sont

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = h\theta.$$

L'hélice est une courbe identique à elle-même en toutes ses parties. Rien ne distingue le point A de tout autre point. Nous pouvons donc prendre pour milieu de l'arc LN le point A, c'est-à-dire placer le point M en A. Comme dans l'hélice, l'arc est proportionnel à θ, les θ des deux points L et N seront égaux et de signes contraires, $-\theta$ et $+\theta$.

La longueur de l'arc LN est alors égale à $\int_{-\theta}^{+\theta} ds = 2\sqrt{a^2+h^2}\,\theta$; les coordonnées du point G seront données par

$$x_1\int ds = \int x ds, \qquad y_1\int ds = \int y ds, \qquad z_1\int ds = \int z ds:$$

les limites d'intégration étant toujours égales à $-\theta$ et $+\theta$. Un calcul immédiat nous donne

$$x_1 = a\frac{\sin\theta}{\theta}, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 0.$$

Le point G est donc sur la normale au cylindre au point A, milieu de l'arc LN.

1° Quand L et N varient en gardant pour milieu le point A, le point G décrit le rayon OA. Il est facile de voir comment il varie sur ce rayon; au départ, $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$, le point G est en A, ceci arrive quand les deux points L et N sont en A; quand les points s'éloignent de A, θ augmente, $\frac{\sin\theta}{\theta}$ diminue, le point G se rapproche de O; pour $\theta = \pi$, le point G est en O, à ce moment, l'arc LN recouvre une spire tout entière ayant pour centre le point A (milieu). Ensuite le point G passe à gauche de O, x_1 devient négatif, grandit d'abord en valeur absolue, puis diminue de nouveau et le point G revient en O pour $\theta = 2\pi$, etc.

Pour préciser davantage, prenons la dérivée de x_1, $\frac{dx_1}{d\theta} = a\frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2}$;

elle s'annule pour les racines de l'équation très connue $\operatorname{tg}\theta = \theta$.

La première est 0; la seconde, $\pi + \alpha_1$, α_1 étant positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$; la troisième, $2\pi + \alpha_2$, α_2 étant aussi positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$, et ainsi de suite; la $(n+1)^e$ est $n\pi + \alpha_n$. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ augmentent sans cesse et tendent vers $\frac{\pi}{2}$, assez rapidement. Le point G part de A, marche dans le sens AO, jusqu'au point A_1 d'abscisse négative $a_1 = -a\frac{\sin\alpha_1}{\pi + \alpha_1}$, qu'il atteint pour $\theta = \pi + \alpha_1$. Puis quand θ croît de $\pi + \alpha_1$ à $2\pi + \alpha_2$, le point G marche dans le sens positif, il passe au point O pour $\theta = 2\pi$ et s'arrête au point d'abscisse positive $a_2 = a\frac{\sin\alpha_2}{2\pi + \alpha_2}$. Il retourne en arrière et repasse à gauche de O pour $\theta = 3\pi$ et s'arrête au point d'abscisse négative

$$a_3 = -a\frac{\sin\alpha_3}{3\pi + \alpha_3}.$$

Il oscille perpétuellement autour de O et les amplitudes des diverses oscillations sont de plus en plus petites; finalement il tend vers O.

Si on appelle L′ et N′ les projections des points L et N sur le cercle de section droite qui passe au point A, le centre de gravité de l'arc L′N′ coïncide avec la projection du centre de gravité de l'arc LN. Cela résulte de la formule trouvée pour x_1; cela résulte aussi de ce que tous les éléments de l'hélice, ds, font le même angle α avec le plan horizontal et que l'élément du cercle, ds_1, est égal à $ds_1 = ds\cos\alpha$. Cette remarque permet d'apercevoir en partie par des considérations géométriques pures les oscillations du point G.

2° Quand les points L et N varient d'une façon arbitraire sur l'hélice, le point G décrit la surface engendrée par la normale au cylindre au point M, c'est-à-dire un conoïde droit ayant pour axe Oz et pour directrice l'hélice; c'est l'hélicoïde droit, la surface de vis à filet carré.

Cette surface est engendrée par la droite $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, $z = h\theta$; elle a donc pour équation

$$y - x\operatorname{tg}\frac{z}{h} = 0.$$

Si on prend maintenant deux points L et N quelconques, de paramètres θ_1 et θ_2, les coordonnées du point G sont $x_G = a\frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$, $y_G = -a\frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}$, $z_G = h\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$; le calcul qui les fournit est le même que celui que nous avons indiqué au début.

Cela posé, considérons la corde LN; elle a pour paramètres

$$a(\cos\theta_2 - \cos\theta_1), \qquad a(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \qquad \text{et} \quad h(\theta_2 - \theta_1);$$

en exprimant qu'elle est parallèle à un plan fixe, $ux + vy + wz = 0$, nous avons la relation

$$au(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + av(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + hw(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

ou

$$-auy_G + avx_G + hw = 0.$$

Le lieu du point G est donc la courbe d'intersection de l'hélicoïde, $y - x\operatorname{tg}\frac{z}{h} = 0$, par le plan $vx - uy + \frac{h}{a}w = 0$; ce dernier plan est un plan vertical perpendiculaire au plan donné.

3° Le plan tangent en G à l'hélicoïde contient évidemment la normale au cylindre au point A et la tangente à l'hélice qui passe en G. Le pas de cette hélice est constant et égal à h; la tangente à cette hélice fait donc un angle de plus en plus petit avec Oz, à mesure que l'on se rapproche de O. Les variations du point G font prévoir celles du plan tangent.

Si on pose $f(x, y, z) \equiv y - x \operatorname{tg} \frac{z}{h}$, le plan tangent au point (x_1, y_1, z_1) a pour équation

$$(x - x_1)f'_{x_1} + (y - y_1)f'_{y_1} + (z - z_1)f'_{z_1} = 0.$$

Or $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $f'_{x_1} = -\operatorname{tg} \frac{z_1}{k} = 0$, $f'_{y_1} = 1$, $f'_{z_1} = -\frac{x_1}{h}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{z_1}{h}\right) = \frac{-x_1}{h}$.

Le plan tangent a donc pour équation $y - z\frac{x_1}{h} = 0$, ou $y = \frac{a}{h}\frac{\sin\theta}{\theta} z$.

Il est facile de vérifier qu'il passe aux points L et N de paramètres $-\theta$ et $+\theta$.

Son coefficient angulaire, dans le plan des yz, par rapport à oz est $\mu = \frac{a}{h}\frac{\sin\theta}{\theta}$; ses variations ont été étudiées antérieurement.

Elles se résument ainsi : quand θ croît de 0 à $\pi + \alpha_1$, l'angle du plan tangent avec Oz diminue depuis l'angle que fait la tangente à l'hélice avec Oz jusqu'à un minimum négatif, il passe par 0 pour $\theta = \pi$, quand le point G arrive en O; quand θ croît depuis $\pi + \alpha_1$ jusqu'à $2\pi + \alpha_2$, l'angle avec Oz diminue en valeur absolue, passe par 0 pour $\theta = 2\pi$ et atteint un maximum positif pour $2\pi + \alpha_2$. La trace du plan tangent sur le plan des yz oscille autour de Oz et a des oscillations de plus en plus petites : la tangente de l'angle qu'elle fait avec Oz admet les maxima et minima que voici :

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a}{h}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a}{h}\frac{\sin\alpha_2}{2\pi + \alpha_2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{a}{h}\frac{\sin\alpha_4}{4\pi + \alpha_4},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{a}{h}\frac{\sin\alpha_1}{\pi + \alpha_1}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{a}{h}\frac{\sin\alpha_3}{3\pi + \alpha_3}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_5 = -\frac{a}{h}\frac{\sin\alpha_5}{5\pi + \alpha_5}, \quad \ldots$$

4° On sait que quand un point matériel P est attiré par un groupe de points M_k proportionnellement à la distance, c'est-à-dire suivant la loi $\mu m m_k r_k = \mu m m_k PM_k$, tout se passe comme si le point P était attiré par le point G, centre de gravité du système, proportionnellement à la distance, la masse M du système étant concentrée en G. Dans le cas actuel, le point P sera attiré par le point G suivant la loi μSPG, S étant la longueur de l'arc LN.

Pour le vérifier, nous appellerons $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'arc LN ayant pour milieu le point A; l'attraction émanée de l'élément placé en ce point a pour expression μds. PM, et ses composantes sont $\mu(x - \alpha)ds$, $\mu(y - \beta)ds$, $\mu(z - \gamma)ds$,
α, β et γ étant les coordonnées du point P. En sommant ces expressions depuis $-\theta$ jusqu'à $+\theta$, nous aurons les composantes de la résultante suivant Ox, Oy, Oz. Nous obtenons ainsi

$$\mu\sqrt{a^2 + h^2}(2a\sin\theta - 2\alpha\theta), \qquad \mu\sqrt{a^2 + h^2}(0 - 2\beta\theta), \qquad \mu\sqrt{a^2 + h^2}(0 - 2\gamma\theta),$$

ou, en mettant $2\theta\sqrt{a^2 + h^2} = S$ en facteur,

$$\mu S(x_1 - \alpha), \qquad \mu S(y_1 - \beta), \qquad \mu S(z_1 - \gamma),$$

et ceci démontre entièrement ce que nous avons annoncé.

5° Si on lance le point P quelque part, avec une vitesse initiale v_0 donnée quelconque, ce point décrit une ellipse ayant pour centre le point G et située dans le plan GPv_0. Ce sera le cercle indiqué, si la vitesse au point L est dans le plan GLN, perpendiculaire à GL et telle que le centre de courbure en L soit au point O. On devra donc avoir

$$m\frac{v_0^2}{R} = \mu SLG, \qquad (LG = R) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad v_0^2 = \frac{\mu}{m} SR^2,$$

expression dans laquelle m désigne la masse du point P, S la longueur de l'arc LN et R le rayon du cercle ou la distance des deux points G et L.

Bonne solution : M. G. Foucry, à Reims.
Assez bonnes solutions : MM. A. Courtois, à Douai ; Grossetête, lycée Saint-Louis ; Hugon, lycée Louis-le-Grand.

1790. — *Une bulle est soufflée avec de l'air en prenant un liquide dont la tension superficielle est exprimée par le nombre* 29,4 *dans le système* C. G. S. *Le volume de cette bulle est* $33^{cm^3},510$; *la pression extérieure est* 75,5 *centimètres de mercure supposé à zéro ; la température est de* 15°.

On demande : 1° *le poids en grammes de l'air renfermé dans la bulle ;* 2° *la différence, en dynes par centimètre carré, des pressions supportées par les faces intérieure et extérieure de la bulle ;* 3° *l'énergie totale de la surface de la bulle en ergs et en kilogrammètres ;* 4° *ce qu'il arrivera si l'on vient à chauffer la bulle de* 15° *à* T° ? *Écrire, sans chercher à les résoudre, les relations entre le rayon* R′ *de la bulle et la pression de l'air intérieur dans ce nouvel état, en supposant (ce qui n'est pas exact) que la tension superficielle ne varie pas avec la température.*

N. B. — Données : poids du litre d'air normal, $1^g,29$; *coefficient de dilatation de l'air,* 0,00366 ; *on supposera que l'air est sec et que c'est un gaz parfait.*

1° Soit p la pression, exprimée en centimètres de mercure, de l'air renfermé dans la bulle. La masse de cet air sera

$$m = va\frac{p}{76}\frac{1}{1+15\alpha},$$

expression dans laquelle v désigne le volume de la bulle, a la masse spécifique de l'air et α le coefficient de dilatation de l'air.

Calculons p. Si p' est la pression extérieure, on a, en désignant par A la tension superficielle et par R le rayon de la bulle,

$$p = p' + \frac{4A}{R \times 13,6 \times 981}.$$

Or on a $\qquad \frac{4}{3}\pi R^3 = 33,510, \qquad$ d'où $\qquad R = 2 \qquad$ et $\qquad p = 75,504.$

L'excès de la pression intérieure n'affecte donc que le chiffre des millièmes de centimètre.

Enfin, le calcul de m donne $\quad m = 33,51 \times 0,00129 \times \frac{75,504}{76} \times \frac{1}{1+15\times 0,00366} = 0^g,040711.$

La pression capillaire n'affecte que le chiffre des millièmes de milligramme et on aurait pu la négliger.

2° La différence, en dynes par centimètre carré, des pressions supportées par les faces intérieure et extérieure de la bulle est $\qquad p - p' = \frac{4A}{R} = \frac{4\times 29,4}{2} = 58,8.$

3° L'énergie de la surface de la bulle est égale au produit de la tension superficielle par la surface totale, tant intérieure qu'extérieure : $\quad w = 8\pi R^2 A.$

On peut d'ailleurs retrouver cette expression par les considérations suivantes. La somme des forces capillaires appliquées aux parois de la bulle est $\quad 4\pi R^2 \times \frac{4A}{R} = 16\pi AR.$

Pour une variation dR du rayon, le travail de ces forces est $16\pi ARdR$.

Le travail dépensé pour amener la surface de la bulle à sa valeur actuelle et, par suite, l'énergie de cette surface est donc $\qquad w = \int_0^R 16\pi ARdR = 8\pi R^2 A.$

En unités C. G. S., $\qquad w = 8\pi \times 4 \times 29,4 = 2956;$

En kilogrammètres, $\qquad w = \frac{2956}{98100000} = 0,00003.$

4° Appliquons à l'air de la bulle la loi de Mariotte sous la forme $\frac{vp}{1+\alpha t} = C^{te}$:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\left(p' + \frac{4A}{R}\right)}{1+15\alpha} = \frac{\frac{4}{3}\pi R'^3\left(p' + \frac{4A}{R'}\right)}{1+\alpha T}.$$

Le premier membre est connu. On pourra résoudre par approximations successives en négligeant d'abord le terme en A.

André COURTOIS, lycée de Douai.

1791. — 1° *Un échantillon de permanganate de potassium en poudre fine est souillé d'autres sels de potassium dénués de propriétés oxydantes et sans action sur lui.* $1^g,264$ *de ce sel, placé dans un ballon, est additionné peu à peu, à l'aide d'un entonnoir à robinet, d'un excès d'acide chlorhydrique concentré et pur* (20^g). *On termine l'opération en portant le liquide à l'ébullition pendant quelques minutes. Le chlore qui se dégage dans la réaction* (1), *mêlé d'acide chlorhydrique, est dirigé dans* 150^{cm^3} *d'eau distillée refroidie extérieurement. L'opération terminée, on étend la solution chlorée à* 200^{cm^3}.

On dissout d'autre part $9^g,90$ *d'anhydride arsénieux dans* 100^{cm^3} *d'acide chlorhydrique concentré et pur, et l'on étend la solution à* 1 *litre. On prélève* 10^{cm^3} *de cette solution arsénieuse qu'on additionne de quelques gouttes d'une solution sulfurique d'indigo, et l'on y fait tomber peu à peu, à l'aide d'une burette graduée, la solution chlorée en agitant constamment. On constate que la coloration bleue disparaît dès qu'on a ajouté* $12^{cm^3},5$ *de solution chlorée.*

On demande le titre du permanganate.

2° *Une solution d'eau oxygénée est telle que* 5^{cm^3} *dégagent, au contact du bioxyde de manganèse en poudre,* $111^{cm^3},5$ *d'oxygène. On ne tiendra pas compte des corrections dues à la présence d'humidité, à la température et à la pression.*

On prend 5^{cm^3} *de cette eau oxygénée, on l'additionne d'un excès d'acide sulfurique à* 20 °/₀ (5^{cm^3}) *et l'on y fait tomber goutte à goutte, à l'aide d'une burette graduée, une solution de* $6^g,32$ *du même permanganate que ci-dessus dans* 1 *litre d'eau distillée* (2).

On demande quel est le volume de la solution manganique qui sera décoloré.

Nota. — *On donne : les poids atomiques* $O = 16$, $S = 32$, $H = 1$, $As = 75$, $K = 39$, $Cl = 35,5$, $Mn = 55$; *le poids du litre d'air* $1^g,293$, *la densité de l'hydrogène par rapport à l'air* 0,0695.

(1) $$2MnO^4K + 16HCl = 2MnCl^2 + 2KCl + 8H^2O + 5Cl^2,$$

(2) $$2MnO^4K + 4SO^4H^2 + 5H^2O^2 = 2SO^4Mn + 2SO^4KH + 8H^2O + 5O^2.$$

1° Soit x le nombre de molécules-grammes de permanganate pur contenues dans le produit employé. La réaction avec l'acide chlorhydrique donnera $5x$ atomes-grammes de chlore. Ce chlore est dissous dans 200^{cm^3} sur lesquels on emploie seulement $12^{cm^3},5$ pour oxyder l'acide arsénieux ; le chlore entrant en jeu dans cette oxydation représente donc $\frac{12,5}{200} \times 5x$ atomes-grammes.

Or la réaction du chlore sur l'anhydride arsénieux dissous s'écrit

$$As^2O^3 + 4Cl + 2H^2O = As^2O^5 + 4HCl.$$

Les $9^g,90$ d'anhydride arsénieux ayant été dissous dans 1 litre sur lequel on a prélevé 10^{cm^3}, le poids employé n'est que $\frac{9,9}{100}$ et représente, le poids moléculaire de l'anhydride arsénieux étant 198, une fraction de molécule égale à $\frac{9,9}{100} \times \frac{1}{198} = \frac{1}{2000}$.

Le nombre d'atomes de chlore entrant en jeu dans l'oxydation est 4 fois plus grand, soit $\frac{2}{1000}$; donc

$$\frac{12,5}{200} \times 5x = \frac{2}{1000}, \qquad \text{d'où} \qquad x = 0,0032.$$

Le poids moléculaire du permanganate étant 158, le titre cherché sera

$$t = \frac{0,0032 \times 158}{1,264} = 0,80.$$

2° L'eau oxygénée acidulée, traitée par le permanganate, dégage deux fois plus d'oxygène que par le bioxyde de manganèse. La quantité employée donnera donc 223^{cm3}. Or, d'après les données, le volume moléculaire est égal à $\frac{2}{1,293 \times 0,0695} = 22^{l},3$. L'oxygène dégagé au contact du permanganate représente donc $\frac{1}{100}$ de molécule-gramme.

Pour recueillir 5 molécules-grammes, il faut, d'après l'équation de la réaction, 2 molécules de permanganate ; pour $\frac{1}{100}$, il faut $\frac{2}{500}$ MnO^4K, c'est-à-dire $0^{g},632$.

Quel est le volume y de solution qui contient ce poids de permanganate ? Un centimètre cube de solution contient $\frac{6,32 \times 0,80}{1000}$: donc y est tel que

$$y \times \frac{6,32 \times 0,80}{1000} = 0,632, \qquad \text{d'où} \qquad y = 125.$$

JEAN BING, élève à l'Ecole nationale supérieure des mines.

Bonne solution de M. A. COURTOIS, du lycée de Douai. Assez bonnes solutions de MM. LACH, MANEN et SIMON qui ont oublié que l'eau oxygénée donnait deux fois plus d'oxygène par le permanganate que par le bioxyde de manganèse.

QUESTIONS PROPOSÉES

1853. — Soient deux cercles fixes C et C′, par deux points fixes A et B de C, on fait passer une conique S bitangente à C′ : démontrer qu'il existe deux familles de coniques S, et que pour les coniques de chaque famille la corde de contact avec C′ passe par un point fixe.

Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport aux coniques S.

S coupe C en deux autres points A′ et B′ : enveloppe de A′B′, lieu du point commun à A′B′ et à la corde de contact de S et C′.

J. LEMAIRE.

1854. — Etudier le complexe des droites D dont les conjuguées Δ et Δ′ par rapport à deux quadriques données Q et Q′ concourent : soit M le point commun à Δ et Δ′.

Lieu des droites D passant par un point donné.

Enveloppe des droites D situées dans un plan donné P.

Lieux correspondants pour le point M.

Examiner le cas où Q′ est une sphère de rayon nul ; et dans ce cas, celui où P est le plan de l'infini.

J. LEMAIRE.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1786. — 1° *On considère un point fixe* O *et un plan fixe* P *qui ne passe pas au point* O. *Etudier le complexe des droites* D *qui rencontrent le plan* P *en un point* A *tel que* OA *soit perpendiculaire à* D.

2° *On considère un système de forces* Σ *appliquées à un corps solide. Etudier le complexe formé par les droites pour lesquelles le moment du système est égal à une constante donnée* k.

3° *On considère une droite fixe* D. *Etudier le complexe des droites* Δ *qui ont un moment donné par rapport à* D.

Soit

$$\text{(D)} \qquad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

une droite quelconque de l'espace ; les projections de cette droite sur les plans de coordonnées ont pour équations

$$\begin{cases} \gamma y - \beta z - (\gamma y_0 - \beta z_0) = 0, \\ \alpha z - \gamma x - (\alpha z_0 - \gamma x_0) = 0, \\ \beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad (1) \begin{cases} \gamma y - \beta z - l = 0, \\ \alpha z - \gamma x - m = 0, \\ \beta x - \alpha y - n = 0, \end{cases}$$

en posant

$$l = \gamma y_0 - \beta z_0, \qquad m = \alpha z_0 - \gamma x_0, \qquad n = \beta x_0 - \alpha y_0.$$

Les nombres α, β, γ, l, m, n sont appelés les *coordonnées plückériennes* de la droite D ; ils sont définis à un facteur près et vérifient la relation

$$(2) \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Si la droite est déterminée par l'intersection de deux plans

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

les projections de cette droite sur les plans de coordonnées ont pour équations

$$\begin{aligned} (AB' - BA')y - (CA' - AC')z - (DA' - AD') &= 0, \\ (BC' - CB')z - (AB' - BA')x - (DB' - BD') &= 0, \\ (CA' - AC')x - (BC' - CB')y - (DC' - CD') &= 0 ; \end{aligned}$$

et, si l'on compare ces équations aux équations (1), on voit que les coordonnées plückériennes de la droite sont

$$(3) \begin{cases} \alpha = BC' - CB', & \beta = CA' - AC', & \gamma = AB' - BA', \\ l = DA' - AD', & m = DB' - BD', & n = DC' - CD'. \end{cases}$$

On définit généralement un complexe par la relation qui existe entre les coordonnées plückériennes α, β, γ l, m, n, de toute droite appartenant au complexe. Cette relation est toujours homogène par rapport à ces coordonnées. Elle est appelée l'équation du complexe et son degré est par définition le *degré* ou l'*ordre* du complexe.

Soit, par exemple,

$$(4) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma, l, m, n) = 0$$

l'équation d'un complexe.

Par un point quelconque $S(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace passent une infinité de droites du complexe qui sont situées sur un cône ayant pour sommet le point S, et qu'on appelle le *cône du complexe*. On a aisément l'équation de ce cône en remplaçant dans l'équation (4) α, β, γ par les quantités proportionnelles $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, l par $(z - z_0)y_0 - (y - y_0)z_0$, m par $(x - x_0)z_0 - (z - z_0)x_0$ et n par $(y - y_0)x_0 - (x - x_0)y_0$. Le degré de ce cône est égal au degré du complexe.

Dans un plan quelconque $(Ax + By + Cz + D = 0)$ il y a une infinité de droites du complexe qui enveloppent une courbe située dans ce plan et qu'on appelle la *courbe du complexe*. Pour définir cette courbe il suffit de remplacer dans l'équation (4) les coordonnées plückériennes par les valeurs (3) ; on obtient alors une équation en A', B', C', D' qui est l'équation tangentielle de la courbe. La classe de cette courbe est égale au degré du complexe. Si l'on veut la projection de la courbe sur le plan des xy par exemple, il suffit de faire $A' = u$, $B' = v$, $C' = 0$, $D' = w$, et on obtient l'équation tangentielle de la projection de la courbe sur le plan des xy.

Dans le cas particulier où l'équation (4) est du premier degré, on dit que le complexe est linéaire. Les droites passant par le point S sont dans un même plan, et les droites du plan P passent par un même point.

Tout ceci est bien connu ; nous avons cru néanmoins utile de le rappeler à nos jeunes lecteurs avant d'aborder l'étude des complexes proposés.

1. Prenons comme origine le point O et comme plan des xy un plan parallèle au plan P, les axes de coordonnées étant rectangulaires, et soit $z - h = 0$ l'équation du plan P.

Désignons par $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$ les équations de la droite D : un point quelconque de cette droite a pour coordonnées $x = x_0 + \alpha\rho$, $y = y_0 + \beta\rho$, $z = z_0 + \gamma\rho$.

Elle rencontre le plan en un point A dont le ρ est donné par l'équation $z_0 + \gamma\rho = h$, ou $\rho = \frac{h - z_0}{\gamma}$.

Pour que les droites D et OA soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$\alpha(x_0 + \alpha\rho) + \beta(y_0 + \beta\rho) + \gamma(z_0 + \gamma\rho) = 0,$$

ou, en y remplaçant ρ par la valeur $\frac{h - z_0}{\gamma}$,

$$\alpha[\gamma x_0 - \alpha z_0 + \alpha h] + \beta[\gamma y_0 - \beta z_0 + \beta h] + \gamma^2 h = 0,$$

ou encore

$$h(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha m + \beta l = 0.$$

Telle est l'équation du complexe. On voit ainsi que ce complexe est du second ordre.

L'équation du cône du complexe qui a pour sommet le point $S(x_0, y_0, z_0)$ est, d'après ce qui précède,

$$h[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] - (x - x_0)[(x - x_0)z_0 - (z - z_0)x_0]$$
$$+ (y - y_0)[(z - z_0)y_0 - (y - y_0)z_0] = 0.$$

Pour étudier ce cône, transportons l'origine en son sommet. Son équation devient

$$h(x^2 + y^2 + z^2) - x(xz_0 - zx_0) + y(zy_0 - yz_0) = 0,$$

ou

$$(z_0 - h)(x^2 + y^2 + z^2) - z(xx_0 + yy_0 + zz_0) = 0.$$

Cette équation représente un cône du deuxième degré, dont les plans de sections circulaires sont parallèles aux plans $z = 0$, $xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0$, c'est-à-dire au plan P et à un plan perpendiculaire à OS.

Si $z_0 - h = 0$, c'est-à-dire si le point S est dans le plan P, le cône se décompose en deux plans, le plan P et le plan mené par S perpendiculaire à OS.

Supposons $z_0 - h \neq 0$, et voyons si le cône peut se décomposer. Son équation s'écrit

$$x^2 + y^2 - \frac{h}{z_0 - h} z^2 - \frac{y_0}{z_0 - h} yz - \frac{x_0}{z_0 - h} xz = 0,$$

ou, en décomposant en carrés,

$$\left[x - \frac{x_0 z}{2(z_0 - h)}\right]^2 + \left[y - \frac{y_0 z}{2(z_0 - h)}\right]^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2 + 4h(z_0 - h)}{4(z_0 - h)^2} z^2 = 0.$$

On voit ainsi que le cône se réduit à deux plans imaginaires si le point S est situé sur le paraboloïde (Π) ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + 4h(z - h) = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - (z - 2h)^2 = 0.$$

Ce paraboloïde admet le point O pour foyer et le plan P comme plan tangent au sommet.

On peut ajouter que le cône est réel si le point S est à l'extérieur du paraboloïde, et imaginaire si le point S est à l'intérieur.

Tous ces résultats peuvent s'expliquer géométriquement, comme nous le verrons plus loin.

Etudions maintenant la conique du complexe située dans le plan Q qui a pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0. \ (^*)$$

(*) Nous exclurons le cas où le plan est parallèle au plan P ou confondu avec ce plan, car dans le calcul qui nous a donné l'équation du complexe nous avons supposé $\gamma \neq 0$.

D'ailleurs il ne peut y avoir aucune droite réelle du complexe parallèle au plan P et toute droite du plan P appartient au complexe, car la projection A du point O sur cette droite est située dans le plan P.

L'équation tangentielle de cette conique est

$$h[(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2] - (BC' - CB')(DB' - BD') + (CA' - AC')(DA' - AD') = 0,$$

A', B', C', D' désignant les coordonnées d'un plan tangent à la conique.

Cherchons la projection de cette conique sur le plan des xy ; pour cela nous remplacerons A' par u, B' par v, C' par zéro et D' par w. Nous avons ainsi

$$h[C^2v^2 + C^2u^2 + (Av - Bu)^2] + Cv(Dv - Bw) + Cu(Du - Aw) = 0,$$

$$u^2[h(C^2 + B^2) + CD] + v^2[h(C^2 + A^2) + CD] - 2ABhuv - ACuw - BCvw = 0.$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'une parabole, parce qu'il n'y a pas de termes en w^2 ; donc la conique du complexe est une parabole.

Cette parabole se décompose en deux points (dont l'un sera à l'infini) si la forme quadratique

$$u^2[h(C^2 + B^2) + CD] + v^2[h(C^2 + A^2) + CD] - 2ABhuv$$

est divisible par $Au + Bv$, c'est-à-dire si cette forme s'annule pour $u = B$ et $v = -A$. En écrivant cette condition, on trouve, après suppression du facteur $A^2 + B^2$,

$$h(A^2 + B^2 + C^2) + CD = 0.$$

Cette équation exprime que le plan Q est tangent au paraboloïde (II).

Ainsi quand le plan Q est tangent au paraboloïde (II), toutes les droites du complexe situées dans ce plan passent par un point.

Dans ce calcul nous avons supposé que le plan Q n'était pas perpendiculaire au plan des xy. Si le plan Q est perpendiculaire au plan des xy, on cherchera la projection de la conique du complexe sur le plan des xz ou des yz, et on verra que cette conique est encore une parabole.

Remarques géométriques. — Si une droite D du complexe passe par le point S, l'angle SAO est droit, et le lieu du point A est la sphère qui a pour diamètre OS. Par suite, le cône du complexe qui a pour sommet le point S a pour base le cercle section de cette sphère et du plan P. On voit facilement que la seconde direction de plan cyclique est perpendiculaire à OS.

Si le point S est sur le paraboloïde (II) qui a pour foyer le point O et pour plan tangent au sommet le plan P, la sphère de diamètre OS est tangente au plan P (car tout cercle qui a pour diamètre un rayon vecteur d'une parabole est tangent à la tangente au sommet). Dans ce cas le cône du complexe se réduit à deux plans imaginaires conjugués.

Le cône est réel si le point S est extérieur à (II), imaginaire dans le cas contraire.

Enfin si le point S est dans le plan P, les droites qui passent par ce point sont situées ou dans le plan P, ou dans le plan mené par le point S et perpendiculaire à OS.

Etudions maintenant les droites du complexe qui sont situées dans un plan Q (non parallèle au plan P) et coupant le plan P suivant une droite Δ. Soit D une de ces droites qui rencontre le plan P en un point A de Δ, et OA est perpendiculaire à D. Abaissons OF perpendiculaire sur le plan Q, FA est perpendiculaire à D ; par suite, l'enveloppe de la droite D est une parabole, qui admet le point F pour foyer et la droite Δ pour tangente au sommet.

Le raisonnement est en défaut si le point F est sur Δ, confondu avec le point A. Dans ce cas, le plan Q est perpendiculaire à OA au point A, ce plan est tangent au paraboloïde (II), et les droites du complexe situées dans ce plan passent par ce point A ou sont perpendiculaires à Δ.

2. Considérons un système de forces défini par les six nombres fondamentaux X, Y, Z (projections de la résultante générale sur les axes) et L, M, N (projections du moment résultant par rapport à l'origine O) ; et soit un axe D défini par le point $\omega(x_0, y_0, z_0)$ et par les *cosinus directeurs* a, b, c d'une demi-droite choisie arbitrairement sur cet axe, qui sera le sens positif de l'axe.

Le moment résultant du système par rapport au point ω est un vecteur $\omega G'$ qui a pour projections

$$L' = L - y_0Z + z_0Y, \qquad M' = M - z_0X + x_0Z, \qquad N' = N - x_0Y + y_0X ;$$

et le moment du système par rapport à l'axe est égal à la projection orthogonale du vecteur $\omega G'$ sur

l'axe, c'est-à-dire à

$$aL' + bM' + cN'$$

ou à

$$aL + bM + cN + (cy_0 - bz_0)X + (az_0 - cx_0)Y + (bx_0 - ay_0)Z.$$

On doit donc avoir $aL + bM + cN + (cy_0 - bz_0)X + (az_0 - cx_0)Y + (bx_0 - ay_0)Z = k$.

Désignons maintenant par α, β, γ les paramètres directeurs de la droite D, nous avons

$$a = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad b = \frac{\beta}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad c = \frac{\gamma}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

les signes étant les mêmes, et l'équation précédente devient

$$\alpha L + \beta M + \gamma N + lX + mY + nZ = \pm k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

ou, en élevant au carré,

$$(\alpha L + \beta M + \gamma N + lX + mY + nZ)^2 = k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

C'est l'équation du complexe, qui est du deuxième degré.

Dans le cas particulier où $k = 0$, on obtient le complexe linéaire bien connu des droites de moment nul.

Nous simplifierons cette équation en prenant pour axe des z l'axe central du système ; cela revient à supposer $X = Y = L = M = 0$, et l'équation se réduit à

$$k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\gamma N + nZ)^2 = 0.$$

Le cône du complexe qui a pour sommet le point $S(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$k^2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] - \{(z - z_0)N + [(y - y_0)x_0 - (x - x_0)y_0]Z\}^2 = 0,$$

ou, en transportant l'origine au point S,

$$k^2(x^2 + y^2 + z^2) - [zN + (yx_0 - xy_0)Z]^2 = 0.$$

On reconnait l'équation d'un cône de révolution ayant son axe perpendiculaire au plan $zN + (yx_0 - xy_0)Z = 0$, et dont le demi-angle au sommet θ est donné par la formule

$$\cos^2\theta = \frac{k^2}{(x_0^2 + y_0^2)Z^2 + N^2}.$$

Ce cône se réduit à deux plans imaginaires si $\theta = 0$, c'est-à-dire si le point S est sur le cylindre de révolution qui a pour équation $(x^2 + y^2)Z^2 + N^2 = k^2$.

Le cône n'est d'ailleurs réel que si le point S est extérieur à ce cylindre.

Ce résultat peut s'établir géométriquement. Pour cela, nous allons faire la réduction des forces pour le point S. Nous transportons d'abord l'axe ON du couple résultant parallèlement à lui-même en SN_1, en lui adjoignant l'axe du couple formé par la force OZ et la force égale et opposée passant par le point S. Cet axe SN′ est perpendiculaire au plan SOZ et égal à Zd, d désignant la distance du point S à Oz. Les axes SN_1 et SN′ sont rectangulaires ; ils peuvent se remplacer par un axe unique SN_2, diagonale du rectangle construit sur SN_1 et SN′, et le vecteur SN_2 est le moment résultant du système par rapport au point S.

Dès lors, toute droite du complexe passant par le point S doit être telle que la projection de SN_2 sur cette droite soit égale à k. On en conclut que toutes ces droites sont sur un cône de révolution ayant pour axe SN_2 et dont le demi-angle au sommet θ est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{k}{SN_2} = \frac{k}{\sqrt{N^2 + Z^2d^2}}.$$

Pour mieux étudier la conique du complexe située dans le plan Q, nous prendrons ce plan pour plan des xy et nous désignerons par X, Y, Z, L, M, N les nombres fondamentaux du système de forces

par rapport à l'origine O, qui est située dans le plan Q. L'équation du complexe est alors

$$(\alpha L + \beta M + \gamma N + lX + mY + nZ)^2 = k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

et pour avoir l'équation tangentielle de la conique du complexe située dans le plan $z = 0$, nous remplacerons α, β,.... par leurs valeurs (3), où nous ferons $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, $A' = u$, $B' = v$, $C' = 0$, $D' = w$. Nous obtenons ainsi

$$\alpha = -v, \quad \beta = u, \quad \gamma = 0, \quad l = 0, \quad m = 0, \quad n = -w,$$

et l'équation de la conique est

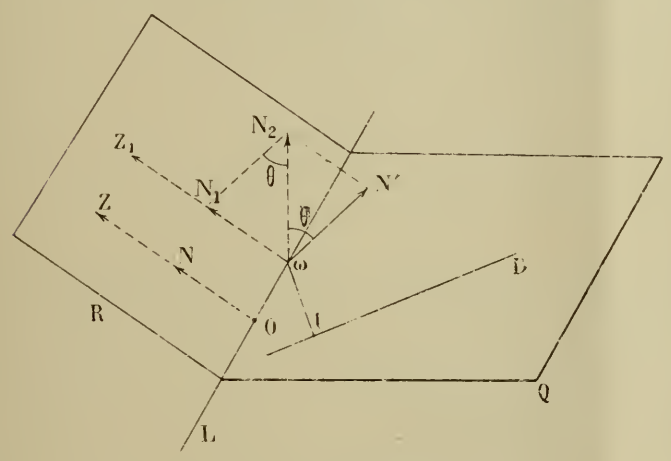
$$(Mu - Lv - Zw)^2 = k^2(u^2 + v^2).$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'un cercle, dont le centre a pour équation $Mu - Lv - Zw = 0$ et par suite pour coordonnées $-\frac{M}{Z}$ et $\frac{L}{Z}$, et dont le rayon est égal à $\left|\frac{k}{Z}\right|$.

Donc la conique du complexe est un cercle.

Ce résultat remarquable peut être établi géométriquement. Reprenons l'axe central Δ qui rencontre le plan Q au point O, et soient OZ et ON les éléments de la réduction pour le point O, ces deux vecteurs étant portés sur Δ.

Considérons le plan R passant par Δ et perpendiculaire au plan qui projette Δ sur le plan Q, et soit OL l'intersection des plans R et Q. Faisons la réduction des forces pour un point ω de OL. Le couple résultant ON se transporte parallèlement à lui-même suivant ωN_1; la résultante générale se transporte suivant ωZ_1, seulement il faut ajouter un couple $\omega N'$ perpendiculaire au plan R et tel que l'on ait $\omega N' = Z.O\omega$. Les couples ωN_1 et $\omega N'$ se composent en un couple unique ωN_2.



On peut déterminer le point ω de façon que N_2 soit perpendiculaire au plan Q. Si on désigne par θ l'angle aigu des plans R et Q, on doit avoir $N' = N_1 \operatorname{cotg}\theta = N \operatorname{cotg}\theta$, et comme $N' = Z.O\omega$, on en déduit $Z.O\omega = N \operatorname{cotg}\theta$, ou $O\omega = \frac{N}{Z \operatorname{tg}\theta}$.

Cela posé, soit D une droite quelconque du plan Q ; le moment du système par rapport à la droite D se réduit au moment de la force Z_1, puisque les moments des forces du couple N_2 sont nuls. Décomposons Z_1 en deux forces, l'une Z_2 perpendiculaire au plan Q, l'autre Z_3, située dans ce plan ; le moment de Z_3 est nul, et celui de Z_2 est égal à $Z_2.\omega I$, ωI étant la distance du point ω à la droite D.

On doit donc avoir $Z_2.\omega I = k$, ce qui montre que ωI est constant, et que la droite D enveloppe un cercle ayant pour centre le point ω et pour rayon $\frac{k}{Z_2}$.

3. Prenons la droite D pour axe des z et supposons que les vecteurs portés sur les droites Δ aient pour longueur l'unité. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point de la droite Δ et a, b, c les projections du vecteur sur les axes. On peut considérer a, b, c comme les cosinus directeurs d'une demi-droite portée sur Δ.

Le moment du vecteur par rapport à Oz est $bx_0 - ay_0$, on doit donc avoir $bx_0 - ay_0 = k$, ou, en remplaçant a et b respectivement par $\frac{\alpha}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$ et $\frac{\beta}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$,

$$(\beta x_0 - \alpha y_0)^2 = k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

ou

$$k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - n^2 = 0.$$

C'est l'équation du complexe. Elle se déduit de l'équation du complexe étudié dans la deuxième partie en y faisant $Z = 1$, $N = 0$, ce qui était d'ailleurs à prévoir.

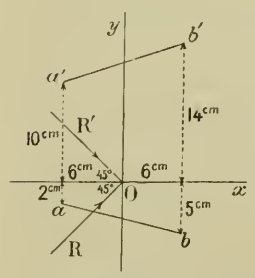
On établira facilement que le cône du complexe est de révolution et que la conique du complexe est un cercle.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1817. — *Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (qui n'auront pas à être passés à l'encre), les points (a, a') et (b, b') sont définis par le croquis ci-joint.*

On considère :

1° *le tétraèdre régulier dont (ab, a'b') est une arête, dont l'arête (ac, a'c') est horizontale, le point c étant en avant de ab, et dont le sommet (s, s') est au-dessous du plan (abc, a'b'c') ;*



2° *le cône de sommet (s, s') qui passe par la hauteur abaissée de (s, s') sur le plan (abc, a'b'c') et qui est coupé par ce plan suivant un cercle de centre (a, a').*

On demande de représenter la partie du tétraèdre extérieure au cône supposé enlevé en figurant, sur les parties vues, les ombres produites par des rayons lumineux parallèles à (R, R') du croquis ci-joint.

Les arêtes du solide seront dessinées en noir (trait plein pour celles qui sont vues, interrompu pour celles qui sont cachées), les lignes de construction en rouge.

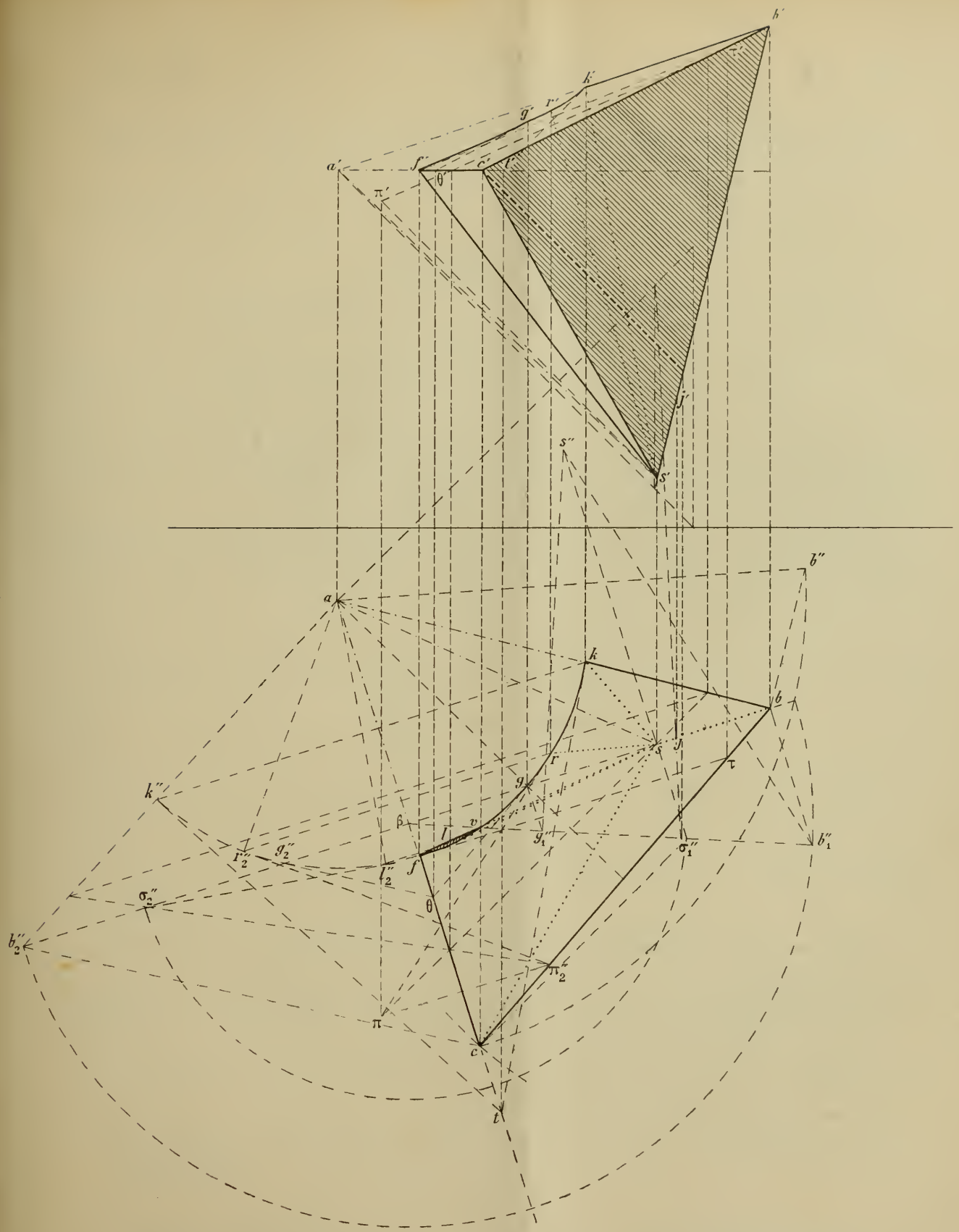
(Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1909.)

Construction du tétraèdre. — L'arête AC étant horizontale se projette horizontalement en vraie grandeur ; le sommet c est donc à une distance de a égale à la vraie grandeur ab'' de AB, et aussi à une distance de b égale à ba puisque le triangle ABC se projette suivant un triangle isocèle de base ac. Il suffit donc de décrire des arcs de cercle de centres a et b ayant respectivement pour rayons ab'' et ba pour obtenir le sommet c. Le sommet S se projette sur la hauteur issue de b dans le triangle abc ; d'ailleurs on sait que dans l'espace la hauteur du tétraèdre régulier perce la base du solide au centre de gravité de cette base. Si donc nous rabattons le plan vertical SB sur le plan horizontal de l'arête AC, nous construisons le triangle de l'espace $S\beta B$ en coupant la perpendiculaire en g''_1 à $\beta b''_1$ par l'arc de rayon égal à ac et de centre b''_1. Il faudra d'ailleurs prendre sur la perpendiculaire $g''s''$ la direction opposée à celle du rabattement g''_1 par rapport à $b\beta$ puisque le sommet S est au-dessous du plan horizontal AC. On a ainsi, en relevant s'', la projection s du sommet, et sa cote ss'' au-dessous du plan horizontal AC ; on en déduit sa projection verticale s'.

Cône. — La base du cône s'obtiendra en rabattant la base ABC autour de ac comme charnière en ab''_2c et en décrivant la circonférence de centre a et de rayon ag''_2, la partie utile de cette circonférence étant l'arc intérieur au triangle rabattu. Cette base se projettera donc suivant une ellipse dont on ne conservera que l'arc fk ; les tangentes en f et k sont les relèvements des tangentes en f et en k'' au cercle rabattu. On peut la construire par points sans qu'il soit nécessaire de chercher le petit axe, en relevant quelques points de la circonférence et leurs tangentes. Le demi petit axe s'obtient d'ailleurs très facilement en relevant le rayon du cercle qui est perpendiculaire à ac. On a les génératrices de contour apparent horizontal en menant du point s les tangentes à l'ellipse ; les points de contact s'obtiennent en rabattant le point où la verticale du sommet perce le plan de base et menant de ce point σ''_2 les tangentes au cercle rabattu ; une seule de ces tangentes se trouve dans la portion utile et ne donne sur l'épure qu'une génératrice de contour apparent horizontal sl.

La projection verticale de la base du cône est l'arc d'ellipse obtenu en projetant verticalement l'arc de cercle conservé ; nous avons construit les tangentes aux points où cet arc coupe les deux arêtes et au point g, g'.

Solide conservé. — Le cône coupe le tétraèdre suivant les deux génératrices SF et SK et suivant l'arc de cercle KF. Si on enlève le cône, il ne reste que les portions bk et cf des arêtes de la face abc dans laquelle



Échelle : $\frac{2}{3}$.

l'arc fk est vu ; la génératrice de contour apparent horizontal sl est cachée, ainsi que la génératrice SK d'intersection, mais sur la génératrice sf on découvre la portion intérieure à l'ellipse.

En projection verticale aucune génératrice de contour apparent n'est conservée et la surface conique est limitée par les deux génératrices d'intersection : $s'f'$ qui est vue et $s'k'$ qui est cachée.

Ombre propre du solide. — Nous voyons immédiatement que la face ABC est éclairée ; si maintenant nous menons par AC le plan parallèle aux rayons lumineux, nous voyons qu'il coupe SB au point J ; donc la face SAC est aussi éclairée ; les deux autres faces sont dans l'ombre, mais la face ombrée CSB est seule vue sur la projection verticale.

Quant à la surface conique creuse que limite le solide d'autre part, elle est entièrement cachée sur les deux plans de projection, sauf le petit segment compris entre l'arc vf et la portion de génératrice ; il s'agit donc seulement de savoir si cette portion est éclairée ou non, puisque l'énoncé ne demande que les ombres portées sur les parties vues du solide.

A cet effet supposons que le cône soit tout seul et déterminons les génératrices de contact des plans tangents à sa surface parallèlement aux rayons lumineux. — Nous avons en π, π' l'intersection de la parallèle à ces rayons menée par le sommet avec le plan de base ; par son rabattement π_2'' nous menons les tangentes à la base rabattue, et nous remarquons qu'une seule $\pi_2'' r_2''$ touche la partie conservée de cette base et fait connaître la génératrice sr, $s'r'$ qui séparerait la région éclairée de la région obscure si le cône était seul ; pour la surface conique convexe la partie éclairée correspondrait à l'arc fr. Par suite la surface creuse correspondante est dans l'ombre, et comme le segment vr en fait partie, ce segment doit être couvert de hachures. En projection verticale toute la surface conique est cachée et il n'y a d'ombre que sur la face CSB.

Il y a lieu de remarquer que toutes les génératrices du cône qui aboutissent à l'arc fv sont extérieures à la surface cylindrique qui a pour base la base du cône et dont les génératrices sont parallèles à $s\pi$, $s'\pi'$ en sorte que la surface conique creuse vue de v en f ne peut recevoir de lumière par l'ouverture faite dans la base supérieure du tétraèdre.

Bonne épure de M. Rousseau, école primaire supérieure de Landrecies.

QUESTIONS PROPOSÉES

1855. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x \mathrm{L} x dx}{(1+x^2)^2},$$

ainsi que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3} e^{-x} \sin x dx.$$

(*Examens de la Faculté des Sciences.*)

1856. — Un point M se déplaçant sur une parabole P de foyer F, trouver :

1° Le lieu du centre du cercle C circonscrit au triangle normal circonscrit qui correspond au point M. Ce lieu est une parabole P'.

2° Cette parabole P' est aussi le lieu du sommet d'un triangle isocèle normal circonscrit à la parabole P correspondant à un point M' de la normale en M à la parabole P.

3° Le lieu du point M' est une cubique. Cette cubique est aussi le lieu du point à égale distance de la parabole P et de F.

4° Soit C' le cercle circonscrit au triangle normal circonscrit à P et correspondant au point M' ; C et C' se coupent en F et en un second point dont on demande le lieu.

Note. — Le triangle normal circonscrit qui correspond au point M est le triangle formé par les tangentes aux pieds des normales abaissées de ce point.

Camille Massing.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Mai 1910. N° 8.

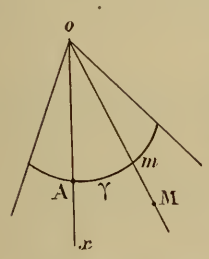
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT DES CONES ET CYLINDRES

par M. **Commissaire**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Cône. — Soit un cône de sommet o ; traçons une génératrice quelconque ox. La sphère de centre o et de rayon 1 coupe le cône suivant une courbe γ qui rencontre la génératrice ox en un point A que nous prendrons pour origine des arcs sur γ. Un point de cette courbe sera défini par la valeur algébrique θ de l'arc Am. Prenons pour origine des coordonnées le sommet o, les axes étant rectangulaires. Les coordonnées du point m peuvent s'exprimer en fonction de θ. Soit



$$X = f(\theta), \qquad Y = g(\theta), \qquad Z = h(\theta).$$

Les fonctions f, g, h sont liées par la relation

$$(1) \qquad f^2 + g^2 + h^2 \equiv 1.$$

De plus, si nous écrivons la formule qui donne la différentielle d'un arc de la courbe γ, nous obtenons

$$d\theta^2 = [f'^2(\theta) + g'^2(\theta) + h'^2(\theta)]d\theta^2,$$

d'où

$$(2) \qquad f'^2 + g'^2 + h'^2 \equiv 1.$$

Des relations (1) et (2), on déduit, en dérivant par rapport à θ,

$$(3) \qquad ff' + gg' + hh' \equiv 0,$$

$$(4) \qquad f'f'' + g'g'' + h'h'' \equiv 0.$$

Soit maintenant M un point quelconque du cône sur la génératrice om et $r = \overline{oM}$, les coordonnées de M sont

$$(5) \qquad X = rf(\theta), \qquad Y = rg(\theta), \qquad Z = rh(\theta).$$

Pour définir une courbe C sur le cône, il suffit d'établir une relation entre r et θ, soit

$$r = \varphi(\theta).$$

Traçons dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires et, à tout point M de la surface conique, faisons correspondre un point M_1 du plan défini par ses coordonnées polaires

$$(OX.OM_1) = \theta, \qquad \overline{OM_1} = r.$$

A la courbe C du cône correspond la courbe C_1 du plan qui a pour équation $r = \varphi(\theta)$, c'est la transformée de C. Je dis que :

1° *Cette transformation conserve les longueurs.*

Soit MM′ un arc de la courbe C, M et M′ correspondant aux valeurs θ et θ' de l'arc de la courbe γ.

La différentielle de cet arc est donnée par $dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$.

Les formules (5) permettent de calculer dX, dY, dZ :

$$dX = rf'(\theta)d\theta + f(\theta)dr, \qquad dY = rg'(\theta)d\theta + g(\theta)dr, \qquad dZ = rh'(\theta)d\theta + h(\theta)dr.$$

Elevons chacune de ces égalités au carré et ajoutons-les membre à membre, nous obtenons, en

tenant compte des identités (1), (2) et (3),

$$dS^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2.$$

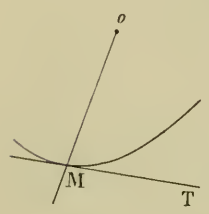
La longueur de l'arc MM′ sera par suite

$$S = \int_0^{\theta'} \sqrt{[\varphi(\theta)]^2 + [\varphi'(\theta)]^2}\, d\theta.$$

C'est la même formule qui donnerait la longueur de l'arc correspondant de la transformée.

2° *Elle conserve les angles.*

Soit V l'angle de la génératrice oM avec la tangente MT à la courbe C. Les cosinus directeurs de oM sont f, g, h ; ceux de MT sont $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$, donc



$$\cos V = f\frac{dX}{ds} + g\frac{dY}{ds} + h\frac{dZ}{ds}.$$

Multiplions les expressions de dX, dY, dZ respectivement par $\frac{f}{ds}$, $\frac{g}{ds}$, $\frac{h}{ds}$ et ajoutons, nous obtenons $\cos V = \frac{dr}{ds}$.

C'est la formule qui donne en coordonnées polaires le cosinus de l'angle du rayon vecteur et de la tangente.

Si on considère deux courbes C et C′, se coupant en M, ce qui précède montre que l'angle de ces deux courbes est conservé, puisque l'angle de oM avec chacune des deux tangentes est conservé.

Transformée d'une section plane. — Coupons le cône par un plan ne passant pas par le sommet, nous pouvons prendre son équation sous la forme $AX + BY + CZ = 1$.

Pour qu'un point de la surface conique soit dans le plan, il faut et suffit que

$$Arf(\theta) + Brg(\theta) + Crh(\theta) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r} = Af(\theta) + Bg(\theta) + Ch(\theta);$$

c'est l'équation de la courbe transformée.

Recherche des points d'inflexion. — Cherchons les valeurs de θ qui annulent la quantité $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''$, c'est-à-dire telles que $A[f + f''] + B[g + g''] + C[h + h''] = 0$.

Cette relation exprime que le plan sécant doit contenir la droite menée par le point considéré et qui a pour coefficients de direction : $f + f''$, $g + g''$, $h + h''$.

Je dis que c'est la normale au cône. En effet :

1°) Elle est perpendiculaire à la génératrice. Il suffit pour le voir de vérifier que

$$f(f + f'') + g(g + g'') + h(h + h'') = 0 \tag{5}$$

ou, puisque $f^2 + g^2 + h^2 = 1$, $1 + ff'' + gg'' + hh'' = 0$,

ce qu'on obtient en dérivant par rapport à θ la relation (3) ;

2°) Elle est perpendiculaire à la tangente à la courbe γ au point m.

Cette tangente a pour cosinus directeurs f', g', h', il suffit de vérifier que

$$f'(f + f'') + g'(g + g'') + h'(h + h'') = 0; \tag{7}$$

c'est une conséquence des relations (3) et (4). Donc :

Pour qu'un point M_1 *soit un point d'inflexion de la transformée, il faut et il suffit que le plan sécant contienne la normale au cône, au point correspondant* M *de la section.*

Remarque. — En général, pour la valeur θ qui correspond au point d'inflexion, la dérivée de $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''$ n'est pas nulle, de sorte qu'en ce point la tangente traverse la courbe ; il y a inflexion géométrique.

Montrons que la dérivée de $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''$ est nulle en particulier quand la génératrice du point M est perpendiculaire au plan sécant.

Dans ce cas en effet, nous avons les relations $\frac{A}{f(\theta)} = \frac{B}{g(\theta)} = \frac{C}{h(\theta)}$.

Il faut vérifier que $\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right] = 0$, c'est-à-dire que

$$A(f' + f''') + B(g' + g''') + C(h' + h''') = 0$$

ou, en remplaçant A, B, C par des quantités proportionnelles,

$$f(f' + f''') + g(g' + g''') + h(h' + h''') = 0. \tag{8}$$

On a vu que quel que soit θ on a la relation

$$f(f + f'') + g(g + g'') + h(h + h'') \equiv 0, \qquad \text{ou} \qquad 1 + ff'' + gg'' + hh'' \equiv 0.$$

En dérivant par rapport à θ, nous obtenons

$$ff''' + gg''' + hh''' + f'f'' + g'g'' + h'h'' \equiv 0$$

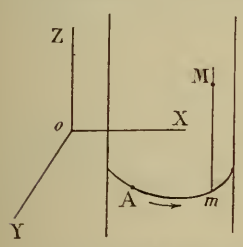
et, en tenant compte de la relation (4),

$$ff''' + gg''' + hh''' \equiv 0,$$

ce qui montre avec la relation (3) que (8) est vérifiée.

Donc en général, dans ce cas, la tangente ne traverse pas la courbe.

Cylindre.— Soit une section droite γ du cylindre sur laquelle nous marquons une origine A et un sens positif pour les arcs, et soit m un point de cette section droite défini par la valeur algébrique x de l'arc Am. Soit M un point du cylindre sur la génératrice passant par m. Supposons qu'on prenne pour axes de coordonnées deux droites rectangulaires oX et oY du plan de la section droite et pour axe des Z la perpendiculaire au plan au point o. Les coordonnées X et Y du point m sont des fonctions de l'arc x. Soient



$$X = f(x), \qquad Y = g(x).$$

Le point M aura pour cote $Z = \overline{mM} = y$.

Pour déterminer une courbe C sur le cylindre, il suffit de se donner une relation entre x et y, soit

$$y = \varphi(x);$$

x étant l'arc de la courbe γ, nous avons $dx^2 = f'^2 dx^2 + g'^2 dx^2$, d'où la relation

$$f'^2 + g'^2 \equiv 1. \tag{1}$$

A tout point M de la surface cylindrique faisons correspondre dans un plan le point M_1 qui a pour coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires ox et oy, les nombres x et y.

A la courbe C de la surface correspond la courbe C_1 qui a pour équation $y = \varphi(x)$, c'est la transformée de C.

1° *La transformation conserve les longueurs.* — Soit MM′ un arc de la courbe C dont les extrémités correspondent aux valeurs x et x' de l'arc de la courbe γ. La différentielle de cet arc est donnée par

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

mais $\qquad dX = f'(x)dx, \qquad dY = g'(x)dx, \qquad dZ = dy$

et par suite, puisque

$$f'^2 + g'^2 \equiv 1,$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2,$$

d'où

$$S = \int_x^{x'} \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\,dx.$$

La même formule donnerait la longueur de l'arc s correspondant de la courbe C_1.

2° *La transformation conserve les angles.* — En effet le cosinus de l'angle V que fait la tangente au

point M avec l'axe oz est $$\cos V = \frac{dZ}{dS} = \frac{dy}{ds};$$
c'est la même formule qui donne le cosinus de l'angle de oy avec la tangente à C_1 au point correspondant.

Le même raisonnement que dans le cas du cône montre alors que l'angle de deux courbes se conserve par la transformation.

Transformée d'une section plane. — Points d'inflexion. — Soit $AX + BY + CZ + D = 0$ l'équation d'un plan. Supposons que ce ne soit pas un plan de section droite, c'est-à-dire que $C \neq 0$ l'équation de la transformée sera
$$Af(x) + Bg(x) + Cy + D = 0,$$
d'où l'on déduit, puisque $C \neq 0$,
$$y = -\frac{A}{C} f(x) - \frac{B}{C} g(x) - \frac{D}{C}.$$

Les points d'inflexion de la transformée s'obtiennent en cherchant les valeurs de x qui annulent y'', c'est-à-dire telles que
$$Af'' + Bg'' = 0,$$
relation qui exprime que le plan sécant contient la droite menée par le point correspondant et qui a pour coefficients de direction f'', g'', 0.

Je dis que c'est la normale au cylindre. Elle est en effet normale à la génératrice, puisqu'elle est parallèle au plan des XY; elle est de plus perpendiculaire à la tangente en m à la section droite, car cette tangente a pour cosinus directeurs f', g', 0 et l'on vérifie que
$$f'f'' + g'g'' = 0,$$
en dérivant par rapport à x la relation (1).

Remarque I. — Il peut se faire que ces points d'inflexion algébrique ne soient pas des points d'inflexion géométrique, cela arrivera en particulier pour les points correspondant aux valeurs de x qui annulent y''' sans annuler y^{IV}.

Remarque II. — La méthode précédente se prête très bien à la recherche des points d'inflexion des transformées des courbes gauches tracées sur une surface conique ou cylindrique. Elle donne aussi simplement les relations entre la courbure d'une courbe tracée sur la surface et la courbure de sa transformée au point correspondant.

CORRESPONDANCE

Addition à la solution de la question 1779 (N° de Mars 1910)

par M. **E.-N. Barisien.**

La très élégante solution de cette jolie question offre une lacune qui ne satisfait pas la curiosité des lecteurs de la Revue.

A la dernière ligne de la page 455, l'auteur de la solution ne donne pas les calculs de l'élimination pour trouver l'enveloppe de la conique C, alléguant que les calculs sont longs et pénibles.

Voici un calcul assez simple :

On doit éliminer α et β entre les trois équations

(1) $$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = c^4, \qquad (c^2 = a^2 - b^2),$$

(2) $$\frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{u} = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{v} = \frac{c^4 - (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{w}.$$

Posons

(3) $$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = 0.$$

De (1) et (3), on déduit

$$\alpha^2 = \frac{a^2c^4 - b^2\theta}{a^4 - b^4}, \qquad \beta^2 = \frac{a^2\theta - b^2c^4}{a^4 - b^4}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{c^4 + \theta}{a^2 + b^2}.$$

Ces valeurs substituées dans (2), donnent, en élevant au carré,

$$\frac{(a^2c^4 - b^2\theta)(\theta - 2b^2c^2)^2}{u^2} = \frac{(a^2\theta - b^2c^4)(\theta + 2a^2c^2)^2}{v^2} = \frac{\theta^2c^2(a^2 + b^2)^3}{w^2}.$$

On est ramené à éliminer θ entre ces deux équations du troisième degré en θ :

$$(\theta - 2b^2c^2)^2(b^2\theta - a^2c^4) + \theta^2\frac{u^2}{w^2}c^2(a^2 + b^2)^3 = 0,$$

$$(\theta + 2a^2c^2)^2(a^2\theta - b^2c^4) - \theta^2\frac{v^2}{w^2}c^2(a^2 + b^2)^3 = 0,$$

qui s'écrivent

(4) $$b^2(\theta^3 - 4a^2b^2c^8) + c^2\theta^2\left[\frac{u^2}{w^2}(a^2 + b^2)^3 - 4b^4 - a^2c^2\right] + 4b^2c^4(b^4 + a^2c^2)\theta = 0,$$

(5) $$a^2(\theta^3 - 4a^2b^2c^8) - c^2\theta^2\left[\frac{v^2}{w^2}(a^2 + b^2)^3 - 4a^4 + b^2c^2\right] + 4a^2c^4(a^4 - b^2c^2)\theta = 0.$$

En multipliant la première de ces deux équations par a^2, la seconde par b^2 et en les retranchant ainsi multipliées, on a

$$c^2\theta^2\left[\left(\frac{a^2u^2 + b^2v^2}{w^2}\right)(a^2 + b^2)^3 - 4a^2b^2(a^2 + b^2) - c^2(a^4 - b^4)\right] + 4a^2b^2c^4\theta\,[b^4 - a^4 + c^2(a^2 + b^2)] = 0.$$

Le terme en θ est nul. L'équation n'a donc plus qu'un terme en θ^2, et alors

$$\left(\frac{a^2u^2 + b^2v^2}{w^2}\right)(a^2 + b^2)^3 = 4a^2b^2(a^2 + b^2) + c^2(a^4 - b^4) = (a^2 + b^2)(c^4 + 4a^2b^2) = (a^2 + b^2)^3,$$

c'est-à-dire

$$a^2u^2 + b^2v^2 = w^2.$$

C'est bien l'équation tangentielle de la conique C.

Remarques : 1° En général, l'élimination d'une variable entre deux équations du troisième degré est un calcul assez ardu, car il faut ramener les deux équations du troisième degré à un système de deux équations du second degré, et former le résultant de ces deux dernières équations. Ici, il y a une grande simplification, les deux équations du troisième degré en θ étant de la forme

$$\theta^3 + A\theta^2 + B\theta + C = 0, \qquad \theta^3 + A'\theta^2 + B'\theta + C = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(A - A')\theta^2 + (B - B')\theta = 0, \qquad \theta = \frac{B' - B}{A - A'}.$$

Et le résultat de l'élimination est

$$C(A - A')^3 - (B - B')^3 + (A - A')(B - B')(BA' - AB') = 0.$$

Il se trouve, en outre, que dans le cas actuel, on a $B - B' = 0$, ce qui réduit le résultat à

$$A - A' = 0.$$

2° On voit d'ailleurs que les équations (4) et (5) peuvent s'écrire

$$\theta^3 + \frac{c^2\theta^2}{b^2}\left[\frac{u^2}{w^2}(a^2 + b^2)^3 - 4b^4 - a^2c^2\right] + 4c^4(a^4 + b^4 - a^2b^2)\theta - 4a^2b^2c^8 = 0,$$

$$\theta^3 - \frac{c^2\theta^2}{a^2}\left[\frac{v^2}{w^2}(a^2 + b^2)^3 - 4a^4 + b^2c^2\right] + 4c^4(a^4 + b^4 - a^2b^2)\theta - 4a^2b^2c^8 = 0.$$

Les coefficients de ces deux équations sont égaux pour les termes θ^3, θ et le terme connu. Il faut

donc que les coefficients de θ^2 soient égaux, ce qui donne

$$\frac{a^2u^2}{w^2}(a^2+b^2)^3 - a^2(4b^4+a^2c^2) = \frac{-b^2v^2}{w^2}(a^2+b^2)^3 + b^2(4a^4-b^2c^2),$$

d'où, comme nous l'avons vu,

$$a^2u^2 + b^2v^2 = w^2.$$

3° Le procédé employé montre qu'il n'y a pas d'autre enveloppe que la conique C, tandis que la vérification faite, page 456, ne prouve pas que la conique C est la seule enveloppe.

4° Errata à la solution de la question 1779, p. 452-456.

Page 455. — Avant-dernière ligne :

Ecrire le rapport du milieu $\dfrac{\beta[2c^2\alpha^2 + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)]}{v}$ au lieu de $\dfrac{\beta[2c^2\alpha^2 - (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)]}{v}$.

Page 456. 4e ligne :

Mettre le terme $b^2\beta^2[2c^2\alpha^2 + (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)]^2$ au lieu de $b^2\beta^2[2c^2\alpha^2 - (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)]^2$.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1909.

Groupe I.

Mathématiques.

1799. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère l'hyperbole* (H) *ayant pour équation*

$$x^2 - y^2 = r^2$$

et les coniques (T) *représentées par l'équation*

$$x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2 = 0$$

où t est un paramètre variable.

1° *Montrer qu'en leurs quatre points d'intersection* A, B, C, D *une courbe* (T) *et la conique* (H) *sont orthogonales.*

2° *Etudier les cercles passant par* A, B, C, D. *Lieu des foyers des coniques* (T).

3° *Trouver l'enveloppe des droites* AB. *Exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coefficients de l'équation générale d'une de ces droites (non parallèle à ox).*

4° *Lieu du point de contact d'une conique* (T) *et d'une conique ayant mêmes foyers que* (H).

5° *Un champ de forces, dont les forces sont parallèles au plan xoy, est tel que les traces des surfaces de niveau sur ce plan soient les coniques* (T). *Trouver les lignes de forces situées dans le plan xoy. Indiquer la forme et la disposition de ces lignes, les unes par rapport aux autres.*

6° *On considère un point* E *de coordonnées* $x = 0$, $y = l$ *et celles des lignes de force qui coupent ox en trois points réels* M_1, M_2, M_3. *Calculer la somme*

$$\frac{1}{\overline{EM_1}^2} + \frac{1}{\overline{EM_2}^2} + \frac{1}{\overline{EM_3}^2}.$$

Peut-on trouver une valeur réelle l, telle que cette somme reste constante lorsque la ligne de force varie ?

1° Soit (x, y) un point commun à (H) et à (T), c'est-à-dire vérifiant les deux équations

$$x^2 - y^2 - r^2 = 0, \qquad x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2 = 0\ ;$$

la condition pour que les deux courbes soient orthogonales en ce point est

$$x^2 - y(3y + 3rt) = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^2 - 3y^2 - 3rty = 0.$$

C'est visiblement une conséquence des deux premières : il suffit, en effet, pour l'obtenir de multiplier la première par 3 et d'en retrancher la seconde ; ceci donne

$$2(x^2 - 3y^2 - 3rty) = 0.$$

2° Les deux coniques (H) et (T) ont leurs axes parallèles ; donc les quatre points de rencontre sont sur un même cercle. Ce cercle fait partie du faisceau

$$x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2 + \lambda(x^2 - y^2 - r^2) = 0,$$

et s'obtient pour $\lambda = 1$. Son équation est donc

(1) $$x^2 + y^2 + 3rty - 2r^2 = 0.$$

Quand t varie, ce cercle engendre un faisceau linéaire dont les points fixes sont sur Ox :

$$x = \pm r\sqrt{2}, \qquad y = 0.$$

Ces deux points sont les foyers de l'hyperbole (H).

Pour $t = 0$, on a le cercle

$$x^2 + y^2 - 2r^2 = 0,$$

et, pour $t = \infty$, la droite $y = 0$, l'axe des x.

Pour avoir le lieu des foyers, il suffit de former le faisceau des tangentes issues d'un point et d'écrire que ces deux droites sont les droites isotropes. En appelant (α, β) le point et, en ne gardant que les termes du second degré, on trouve ainsi

$$(\alpha^2 + 3\beta^2 + 6rt\beta - 3r^2)(x^2 + 3y^2) - [\alpha x + (3\beta + 3rt)y]^2 = 0.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer que ceci est de la forme

$$h(x^2 + y^2),$$

ce qui donne

$$2(\alpha^2 + 3\beta^2 + 6rt\beta - 3r^2) - (3\beta + 3rt)^2 + \alpha^2 = 0,$$
$$\alpha(\beta + rt) = 0.$$

Un premier lieu est $\alpha = 0$; c'est le lieu des foyers situés sur l'axe fixe, Oy. Le second lieu s'obtient en éliminant t entre la première équation et l'équation

$$\beta + rt = 0.$$

Nous avons d'abord $t = -\dfrac{\beta}{r}$, puis

$$2(\alpha^2 + 3\beta^2 - 6\beta^2 - 3r^2) + \alpha^2 = 0,$$

ou, toutes réductions faites,

(2) $$\alpha^2 - 2\beta^2 - 2r^2 = 0.$$

C'est une hyperbole rapportée à ses axes, et qui passe aux foyers de (H). c'est-à-dire aux points fixes du faisceau de cercles.

On peut trouver ce lieu très facilement, en suivant une autre méthode qui va nous donner des renseignements utiles. La conique T du faisceau donné peut s'écrire

$$x^2 + 3(y + rt)^2 - 3r^2(1 + t^2) = 0.$$

Les axes sont donc $x = 0$, $y + rt = 0$, et si on appelle a la longueur du demi-axe parallèle à Ox et b celle de l'axe situé sur Oy, on a de suite

$$a^2 = 3r^2(1 + t^2), \qquad b^2 = r^2(1 + t^2).$$

Le petit axe est donc sur Oy et le grand axe sur une parallèle à Ox. Les foyers imaginaires de l'ellipse T se meuvent sur Oy et les foyers réels ont pour coordonnées

$$x = r\sqrt{2}\sqrt{(1 + t^2)} = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad y + rt = 0\,;$$

par suite, leur lieu est

$$x^2 = 2(y^2 + r^2).$$

C'est bien l'hyperbole que nous avons trouvée.

Pour $t = 0$, on obtient les deux points $x = \pm r\sqrt{2}$, $y = 0$. Ce sont les foyers de l'hyper-

bole (H). Il y a donc une ellipse du faisceau, l'ellipse $t = 0$, ou

$$x^2 + 3y^2 - 3r^2 = 0,$$

qui est homofocale à l'hyperbole (H).

Il est facile de remarquer en outre que les foyers réels de cette ellipse variable, T, sont situés sur le cercle qui lui correspond,

$$x^2 + y^2 + 3rty - 2r^2 = 0.$$

Ce cercle est donc déterminé à chaque instant par les foyers de (H) et ceux de l'ellipse du faisceau.

3. Les quatre points de rencontre A, B, C, D de la conique (H) et de la conique T sont deux à deux symétriques par rapport à Oy, et parmi les sécantes communes, il y en a deux parallèles à Ox; les autres sont deux à deux symétriques par rapport à Ox et l'une d'elles peut se représenter par $x = my + p$, puisqu'elle n'est pas parallèle à Ox. Nous aurons l'équation tangentielle de l'enveloppe, c'est-à-dire la relation entre m et p, en exprimant que cette droite coupe les deux coniques aux mêmes points. Or les y des quatre points s'obtiennent en retranchant (H) de (T) et sont fournis par l'équation

$$2y^2 + 3rty - r^2 = 0;$$

d'autre part, la droite $x = my + p$ coupe la conique (H) aux points dont les y sont donnés par

$$(my + p)^2 - y^2 - r^2 = 0$$

et il suffit d'identifier ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{m^2 - 1}{2} = \frac{2mp}{3rt} = \frac{p^2 - r^2}{-r^2}.$$

L'équation tangentielle est immédiate ; elle s'obtient en égalant les deux rapports extrêmes :

$$2p^2 + m^2r^2 - 3r^2 = 0.$$

Si on pose $m = -\frac{v}{u}$, $p = -\frac{w}{u}$, elle devient

$$3r^2u^2 - r^2v^2 - 2w^2 = 0,$$

et, sous cette forme, on reconnaît l'équation tangentielle de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{3r^2} - \frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{2} = 0. \tag{3}$$

Telle est l'enveloppe des droites AB, non parallèles à Ox. La relation $2p^2 + m^2r^2 - 3r^2 = 0$ donne de suite

$$p = r\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\varphi, \qquad m = \sqrt{3}\sin\varphi,$$

et l'équation de la droite AB s'écrit

$$x = \sqrt{3}\sin\varphi y + r\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\varphi.$$

En posant $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \lambda$, elle devient rationnelle en fonction du paramètre λ.

4° Soit (C) une conique ayant mêmes foyers que (H),

$$\frac{x^2}{r^2 + \lambda} - \frac{y^2}{r^2 - \lambda} - 1 = 0. \tag{C}$$

Si on écrit qu'elle est tangente à (T), c'est-à-dire si on identifie les deux tangentes, on a

$$\frac{\dfrac{x}{r^2 + \lambda}}{x} = \frac{\dfrac{-y}{r^2 - \lambda}}{3(y + rt)} = \frac{-1}{3rty - 3r^2},$$

x et y étant les coordonnées du point de contact.

On peut former un rapport indépendant de t, en multipliant le second, haut et bas, par y, le troi-

sième, haut et bas, par -1, et ajoutant : on obtient ainsi

$$\frac{1-\dfrac{y^2}{r^2-\lambda}}{3(y^2+r^2)}=\frac{\dfrac{x}{r^2+\lambda}}{x}.$$

En supprimant le facteur x, qui correspond évidemment à un lieu étranger, il reste

$$1-\frac{y^2}{r^2-\lambda}=\frac{3(y^2+r^2)}{r^2+\lambda}.$$

Or le point de contact vérifie en outre l'équation

$$\frac{x^2}{r^2+\lambda}-\frac{y^2}{r^2-\lambda}-1=0;$$

l'équation précédente devient donc

$$2-\frac{x^2}{r^2+\lambda}=\frac{3(y^2+r^2)}{r^2+\lambda};$$

elle donne $r^2+\lambda$, $\qquad r^2+\lambda=\dfrac{x^2+3y^2+3r^2}{2}$;

d'autre part,

$$\frac{y^2}{r^2-\lambda}=\frac{x^2}{r^2+\lambda}-1=\frac{2x^2}{x^2+3y^2+3r^2}-1=\frac{x^2-3y^2-3r^2}{x^2+3y^2+3r^2},$$

donc $\qquad r^2-\lambda=\dfrac{y^2(x^2+3y^2+3r^2)}{x^2-3y^2-3r^2}$,

et le lieu total a pour équation l'équation du quatrième degré

$$2r^2=\frac{x^2+3y^2+3r^2}{2}+\frac{(x^2+3y^2+3r^2)y^2}{x^2-3y^2-3r^2}.$$

Mais ce lieu est connu d'avance : il se compose certainement de l'hyperbole (H) et de la conique (T) qui est homofocale à (H) ; il se décompose donc en

$$x^2+3y^2-3r^2=0 \qquad \text{et} \qquad x^2-y^2-r^2=0.$$

Il n'y a plus qu'à vérifier ce point. Ceci se fait sans peine en écrivant l'équation précédente ainsi

$$4r^2(x^2-3y^2-3r^2)=(x^2+3y^2+3r^2)(x^2-y^2-3r^2),$$

puis

$$(x^2-y^2)(x^2+3y^2)-12r^2y^2-9r^4=4r^2(x^2-3y^2)-12r^4,$$

et enfin

$$(x^2-y^2)(x^2+3y^2)-3r^2(x^2-y^2)-r^2(x^2+3y^2)+3r^4=0.$$

La décomposition est visible sous cette dernière forme.

5° Dans le champ de forces indiqué, les surfaces de niveau sont des cylindres ayant pour bases les coniques (T) et dont les génératrices sont parallèles à Oz, les lignes de force sont donc des lignes du plan des xy ou parallèles à ce plan et orthogonales à ces cylindres. Cherchons d'abord l'équation différentielle des coniques (T), et nous y changerons y' en $-\dfrac{1}{y'}$; nous aurons l'équation différentielle des lignes de force. Nous savons d'ailleurs que l'une d'elles est l'hyperbole (H).

Si nous dérivons l'équation (T) par rapport à x, nous avons

$$x+3yy'+3rty'=0, \qquad \text{et, par suite,} \qquad t=-\frac{x+3yy'}{3ry'}.$$

En portant cette valeur de t dans l'équation (T), elle devient

$$x^2+3y^2-3r^2-\frac{2y}{y'}(x+3yy')=0, \qquad \text{ou} \qquad x^2-3y^2-3r^2-\frac{2xy}{y'}=0.$$

Le changement de y' en $-\dfrac{1}{y'}$ donne $2xyy'-3y^2+x^2-3r^2=0$.

C'est une équation linéaire du premier ordre en $y^2 = z$, $xz' - 3z + x^2 - 3r^2 = 0$.

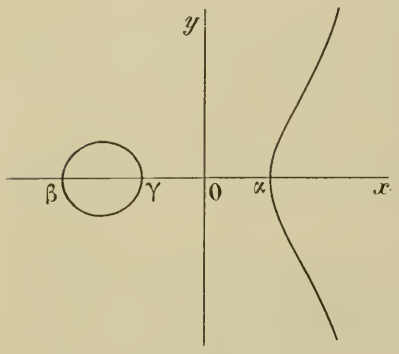
Il est visible que cette équation admet la solution $z = x^2 - r^2$.

D'autre part, la solution de l'équation sans second membre est $z = Cx^3$, donc la solution générale de l'équation complète est

$$z = Cx^3 + x^2 - r^2,$$

C étant une constante arbitraire.

Si on change C en $-C$, cela revient à changer x en $-x$ et, par conséquent, la ligne de force se change en une autre ligne de force, symétrique de celle-ci par rapport à Oy. Avec cette symétrie, il suffira d'étudier les valeurs positives de C.



Proposons-nous alors de construire la courbe

$$y = \sqrt{z} = \sqrt{Cx^3 + x^2 - r^2}.$$

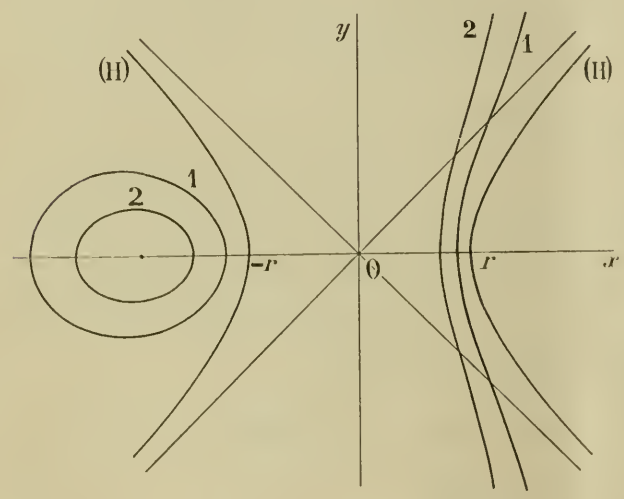
Il faut commencer d'abord par étudier les variations de z ; or

$$z' = 3Cx^2 + 2x.$$

z' s'annule pour $x = 0$ et pour une valeur négative de x,

$$x = -\frac{2}{3C};$$

donc z croît depuis $-\infty$ jusqu'à un certain maximum, quand x croît depuis $-\infty$ jusqu'à $-\frac{2}{3C}$; puis, z décroît depuis ce maximum jusqu'à $-r^2$, quand x croît de $-\frac{2}{3C}$ à 0 ; enfin z croît depuis $-r^2$ jusqu'à $+\infty$, quand x croît de 0 à $+\infty$. Nous voyons donc que si le maximum, $\frac{4}{27C^2} - r^2$, est négatif, z n'aura qu'une racine, une racine positive α et ne sera positif qu'à partir de cette racine ; par conséquent y n'existera qu'après $x = \alpha$ et grandira de 0 à $+\infty$. Si le maximum est positif, c'est-à-dire si $C < \frac{2}{3\sqrt{3}r}$, z admet en outre deux racines négatives, β et γ, et est positif entre elles ; la courbe admet encore une boucle à gauche de Oy.



Quand C tend vers 0, le point α et le point γ tendent vers les points $x = \pm r$, la boucle de gauche s'allonge jusqu'à l'infini et vient coïncider avec la branche de gauche de l'hyperbole ; la branche de droite coïncide avec celle de l'hyperbole (H) aussi. Quand C augmente à partir de 0, on a

$$\alpha = \sqrt{r^2 - Cx^3},$$

α diminue, le point α se rapproche de Oy ; au contraire, le point γ s'éloigne, le point β se rapproche, et la boucle diminue. Quand

$$C = \frac{2}{3\sqrt{3}r}, \quad \beta = \gamma = -\frac{2}{3C} = -r\sqrt{3},$$

et la boucle est nulle. Puis C augmentant toujours la boucle devient imaginaire et la branche de droite se rapproche de plus en plus de Oy.

6° On a évidemment

$$\frac{1}{\overline{EM_1}^2} + \frac{1}{\overline{EM_2}^2} + \frac{1}{\overline{EM_3}^2} = \frac{1}{\alpha^2 + l^2} + \frac{1}{\beta^2 + l^2} + \frac{1}{\gamma^2 + l^2};$$

on aura donc cette somme en posant $y = \frac{1}{x^2 + l^2}$ et calculant la somme des racines de l'équation en y, on trouve d'abord $x^2 = \frac{1}{y} - l^2$;

puis $$Cx\left(\frac{1}{y} - l^2\right) + \frac{1}{y} - l^2 - r^2 = 0, \qquad x = \frac{(l^2 + r^2)y - 1}{C(1 - l^2 y)}.$$

L'équation en y est donc

$$\frac{1 - l^2 y}{y} = \frac{[(l^2 + r^2)y - 1]^2}{C^2(1 - l^2 y)^2}, \qquad \text{ou} \qquad C^2(1 - l^2 y)^3 = y[(l^2 + r^2)y - 1]^2.$$

Les premiers termes sont

$$y^3[(l^2 + r^2)^2 + C^2 l^6] - y^2[2(l^2 + r^2) + 3C^2 l^4] + \cdots$$

et la somme des racines est

$$\frac{2(l^2 + r^2) + 3C^2 l^4}{(l^2 + r^2)^2 + C^2 l^6};$$

elle n'est indépendante de C que si

$$\frac{2(l^2 + r^2)}{(l^2 + r^2)^2} = \frac{3l^4}{l^6},$$

ce qui a lieu pour $l = 0$, $l = \pm ri$ et $2l^2 = 3l^2 + 3r^2$.

Il n'y a donc pas d'autre solution réelle que $l = 0$, et l'on voit que

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = C^{te} = \frac{2}{r^2},$$

ce qui est évident sur l'équation

$$Cx^3 + x^2 - r^2 = 0.$$

Bonnes solutions : MM. M. Bonnetête, à Dinan ; G. Foucry, à Reims ; Amblard, à Ruines ; A. Courtois, à Douai ; Hugon, lycée Louis-le-Grand ; A. Rousseau, à Landrecies ; Névejans, 27e d'artillerie.

Groupes I et II.

Mathématiques.

1803. — *On laisse tomber, sans vitesse initiale, un point matériel pesant dont la masse est 1 gramme dans un milieu qui oppose à son mouvement une résistance proportionnelle à la vitesse ; soit k le coefficient de proportionnalité ; on compte le temps à partir du moment où le mouvement commence.*

1. *Quels sont, au bout du temps t, la vitesse de ce mobile et le chemin z qu'il a parcouru ? Vérifier, sur les formules trouvées, que lorsque k est très petit, le mouvement est, pendant quelque temps, à peu près le même que si le mobile tombait dans le vide.*

2. *On laisse tomber au même instant plusieurs points matériels pesants, ayant chacun une masse égale à 1 gramme, dans des milieux divers qui opposent tous une résistance proportionnelle à la vitesse, mais avec des coefficients k différents ; on compare les mouvements de ces points au bout du temps t. Il est aisé de prévoir, d'après la nature même de la question, dans quel sens varient la vitesse et le chemin parcouru lorsque k augmente. Vérifier analytiquement ces prévisions.*

3. *Calculer le coefficient k par la condition suivante : Le point matériel, pour tomber sans vitesse initiale d'une hauteur égale à $2g$, met un dixième de seconde de plus que s'il tombait dans le vide.*

On prendra $g = 981$ centimètres et on se bornera à calculer le premier chiffre significatif de k.

1° Nous prendrons pour axe des z la verticale du point mobile, pour origine la position initiale de ce point et pour sens positif le sens de la verticale descendante ; l'origine des temps sera l'instant du départ.

A ce moment, le point est sollicité par une force d'intensité g.

Lorsque le point est en mouvement, il est sollicité par deux forces, une force ayant pour valeur algébrique g et une autre, $-kv$, qui provient de la résistance de l'air ou du milieu. L'équation différentielle du mouvement est donc $\frac{d^2z}{dt^2} = g - k\frac{dz}{dt}$, $\left(v = \frac{dz}{dt}\right)$,

ou
$$\frac{d^2z}{dt^2} + k\frac{dz}{dt} = g.$$

Cette équation admet comme solution particulière $\frac{dz}{dt} = \frac{g}{k}$; l'équation sans second membre s'écrit $\frac{z''}{z'} = -k$, et donne, en appelant λ une constante arbitraire, $L\frac{z'}{\lambda} = -kt$, $z' = \lambda e^{-kt}$.

La solution générale de l'équation complète est alors $\frac{dz}{dt} = \lambda e^{-kt} + \frac{g}{k}$; or, pour $t = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$; donc $\lambda = \frac{-g}{k}$ et $\frac{dz}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$.

En intégrant, nous aurons $z = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + \mu$.

Pour $t = 0$, z est nul; par conséquent $\mu = -\frac{g}{k^2}$; donc finalement
$$z = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(e^{-kt} - 1).$$

La formule de la vitesse nous montre que $v = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$ part de 0 et augmente : à mesure que t croît, e^{-kt} diminue, et, pour $t = \infty$, e^{-kt} est nul, la vitesse tend vers $\frac{g}{k}$. Quand t est grand, e^{-kt} est très petit, la vitesse est sensiblement égale à $\frac{g}{k}$ et croît avec une extrême lenteur; le mouvement est sensiblement uniforme.

La formule des espaces montre la même chose : la partie $\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}$ est la plus importante, dès que t est un peu grand ; l'autre partie, $\frac{g}{k^2}e^{-kt}$, devient vite négligeable, et le mouvement tend à devenir uniforme. La formule de l'accélération est
$$\gamma = \frac{d^2z}{dt^2} = ge^{-kt};$$
elle met aussi en relief l'allure que nous avons constatée déjà. Il serait intéressant en outre de construire les diagrammes divers de ce mouvement ; ceci est très facile et montre bien encore le fait que nous avons signalé.

Quand t est très petit, il suffit de garder le premier terme du développement en série dans chaque formule. Nous avons ainsi
$$\gamma = g, \qquad v = gt, \qquad z = \frac{gt^2}{2};$$
ce sont les formules du mouvement de chute libre dans le vide.

2° Si on considère un deuxième point mobile de masse 1, qui tombe de même dans un autre milieu résistant où le coefficient de résistance est égal à k_1, il est aisé de prévoir que, lorsque k_1 est plus grand que k, ce point tombera moins vite que le premier et que l'espace qu'il parcourra pendant le temps t sera moindre que l'espace parcouru par le premier mobile. Nous avons donc à vérifier que, t étant donné, la fonction $v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$ est une fonction décroissante de k et qu'il en est de même de la fonction $z = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(e^{-kt} - 1)$.

Or, nous avons de suite

$$\frac{dv}{dk} = \frac{g}{k^2}\left[e^{-kt}(kt+1)-1\right], \quad \frac{dz}{dk} = \frac{-gt}{k^2} - \frac{2g}{k^3}(e^{-kt}-1) - \frac{gt}{k^2}e^{-kt}, \quad \frac{dz}{dk} = \frac{g}{k^3}\left[2-kt-(2+kt)e^{-kt}\right];$$

il nous faut donc vérifier que les deux fonctions

$$u = (kt+1)e^{-kt} - 1, \qquad \text{et} \qquad w = 2 - kt - (2+kt)e^{-kt}$$

sont négatives à une époque quelconque t lorsque k est positif et quelconque autrement.

Pour u cela résulte de ce que $u = 0$ pour $t = 0$, $u = -1$ pour $t = +\infty$ et que $\frac{du}{dt}$ est toujours négatif; en effet $\frac{du}{dt} = -k^2te^{-kt}$, et cette quantité est toujours négative, quand t varie de 0 à $+\infty$.

Pour w, nous avons $w = 0$ pour $t = 0$, et $w = -\infty$ pour $t = +\infty$; d'autre part

$$\frac{dw}{dt} = -k + k(2+kt)e^{-kt} - ke^{-kt}, \qquad \frac{dw}{dt} = k\left[e^{-kt}(1+kt)-1\right] = ku,$$

quantité toujours négative, d'après ce qui précède.

La construction un peu soignée des divers diagrammes mettrait encore en relief tous ces résultats.

3° Supposons maintenant que le point matériel tombe d'une hauteur égale à $2g$; dans le vide, nous aurons t par la formule

$$2g = \frac{gt^2}{2},$$

qui nous donne $t = 2$; le mobile met donc 2 secondes à tomber.

Dans le milieu envisagé, dont le coefficient de résistance est k, il met 2 secondes 1, ou $\frac{21}{10}$ de seconde. L'équation qui donne k est ainsi

$$2g = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(e^{-kt}-1),$$

pour

$$t = 2^{\text{sec}},1.$$

Cette équation s'écrit

$$2k^2 = kt + e^{-kt} - 1,$$

ou $\quad z - \frac{2z^2}{t^2} + e^{-z} - 1 = 0, \quad$ en posant $\quad z = kt, \quad t = 2,1 = \frac{21}{10}.$

Pour $z = 0$, ou plutôt $z = +\varepsilon$, quantité infiniment petite et positive, cette fonction est positive; elle est négative pour $z = 1$, comme on le voit immédiatement. Il y a donc une racine comprise entre 0 et 1. Cherchons cette racine, et, pour cela, développons en série. Le premier membre de l'équation deviendra

$$z^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t^2}\right) - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!}\cdots = 0.$$

Pour $z < 1$, c'est une série alternée dont les termes, à partir du second, vont en diminuant. Si donc on calcule z en annulant les deux premiers termes, cette valeur de z rendra le premier membre positif, et sera, par suite, inférieure à la racine. Si on calcule z en annulant les trois premiers termes, cette nouvelle valeur de z rendra le premier membre négatif et sera, par suite, plus grande que la racine.

Nous trouvons ainsi

$$z_1 = 3\,\frac{t^2-4}{t^2}, \qquad z_2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{3(t^2-4)}{t^2}} = 2(1-\sqrt{1-z_1});$$

en calculant z_1 par défaut et z_2 par excès, on obtient facilement

$$z_1 = 0{,}278 \qquad \text{et} \qquad z_2 = 0{,}32.$$

Les valeurs correspondantes de k sont

$$k_1 = \frac{z_1}{2,1}, \qquad k_2 = \frac{z_2}{2,1};$$
$$k_1 = 0,13, \qquad k_2 = 0.15.$$

La valeur de k à un dixième près est donc $k = 0,1$ et on a sensiblement $k = 0,14$, à un centième près, par défaut ou par excès.

Bonnes solutions : MM. Névejans, 27e d'artillerie ; Salleron, à Albi ; Marescalchi ; G. Lach, à Denain ; A. Rousseau, à Landrecies.

Assez bonnes solutions : MM. Bonnetête, à Dinan ; A. Courtois, à Douai ; G. Foucry, à Reims ; Amblard, à Ruines.

1804. — *On considère l'équation différentielle*

(1) $$y' + Py + Q = 0,$$

où y est la fonction inconnue et où P, Q *sont des fonctions de la variable x.*

1. *Montrer que toute solution de cette équation vérifie l'équation différentielle*

(2) $$y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0$$

(y' et y'' désignent les dérivées première et seconde de y, P' et Q' les dérivées de P *et de* Q*).*

2. *Déterminer* P *et* Q *de façon que l'on ait, en désignant par α et β des constantes données,*

$$P' - P^2 = \alpha^2, \qquad Q' - PQ = \beta$$

3. *En adoptant pour* P, Q *les fonctions ainsi trouvées, on intégrera les deux équations* (1) *et* (2) *et l'on calculera ce que devient le premier membre de l'équation* (1) *quand on y remplacera y par la solution générale de l'équation* (2).

1° Si on différentie l'équation proposée

(1) $$y' + Py + Q = 0,$$

elle devient

$$y'' + Py' + P'y + Q' = 0,$$

et comme $y' = -Py - Q$, nous voyons que toutes les solutions de l'équation (1) vérifient l'équation

(2) $$y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0.$$

Nous intégrerons donc l'équation (2) dans le cas proposé et nous chercherons celles de ses solutions qui vérifient l'équation (1).

2° Posons $P' - P^2 = \alpha^2$, nous aurons

$$\frac{dP}{\alpha^2 + P^2} = dx,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{P}{\alpha} = x + c;$$

donc

$$P = \alpha \operatorname{tg} \alpha(x + c).$$

La deuxième équation, $Q' - PQ = \beta$, devient alors

$$Q' - Q\alpha \operatorname{tg} \alpha(x + c) = \beta,$$

et l'équation sans second membre donne

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\alpha \sin \alpha(x + c)}{\cos \alpha(x + c)} dx.$$

Il en résulte $\log \frac{Q}{c'} = -\log \cos \alpha(x + c)$; par suite $Q = \frac{c'}{\cos \alpha(x + c)}$.

Posons alors $Q = \frac{z}{\cos \alpha(x + c)}$, z étant une fonction inconnue de x, et portons cette valeur de

Q dans l'équation complète ; nous aurons d'abord

$$Q' = \frac{z'}{\cos\alpha(x+c)} + \frac{\alpha z \sin\alpha(x+c)}{\cos^2\alpha(x+c)}, \qquad \text{puis} \qquad Q\alpha \operatorname{tg}\alpha(x+c) = \frac{\alpha z \sin\alpha(x+c)}{\cos^2\alpha(x+c)}.$$

L'équation qui donne z se réduit donc à

$$z' = \beta\cos\alpha(x+c), \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\beta}{\alpha}\sin\alpha(x+c) + c',$$

c' étant une nouvelle constante arbitraire. Q a donc pour expression générale

$$Q = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha(x+c) + \frac{c'}{\cos\alpha(x+c)}.$$

3° Cela posé, intégrons l'équation

$$y'' + \alpha^2 y + \beta = 0.$$

Elle admet d'abord la solution $y = -\frac{\beta}{\alpha^2}$; puis, l'équation sans second membre admet la solution générale

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x,$$

ou

$$y = \lambda\cos\alpha(x+c) + \mu\sin\alpha(x+c),$$

en introduisant, au lieu de αx, l'arc $\alpha(x+c)$ qui figure dans les calculs antérieurs.

La solution générale est donc

$$y = \lambda\cos\alpha(x+c) + \mu\sin\alpha(x+c) - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Portons maintenant cette valeur dans l'équation (1), où P et Q ont les valeurs trouvées antérieurement ; nous aurons

$$-\lambda\alpha\sin\alpha(x+c) + \mu\alpha\cos\alpha(x+c) + \alpha\operatorname{tg}\alpha(x+c)\left[\lambda\cos\alpha(x+c) + \mu\sin\alpha(x+c - \frac{\beta}{\alpha^2}\right] +$$
$$\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha(x+c) + \frac{c'}{\cos\alpha(x+c)} = 0.$$

Cette somme se réduit immédiatement à $\frac{\mu\alpha + c'}{\cos\alpha(x+c)}$, et l'équation (1) sera satisfaite si nous prenons $\mu = -\frac{c'}{\alpha}$.

La solution générale de l'équation (1) est donc

$$y = \lambda\cos\alpha(x+c) - \frac{c'}{\alpha}\sin\alpha(x+c) - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Le problème est entièrement résolu ainsi.

Mais on peut intégrer directement aussi la première équation.

Cette équation est $y' + \alpha\operatorname{tg}\alpha(x+c).\, y + \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha(x+c) + \frac{c'}{\cos\alpha(x+c)} = 0.$

L'équation sans second membre donne

$$\frac{y'}{y} = -\alpha\operatorname{tg}\alpha(x+c),$$

et, par suite, $\quad \mathrm{L}\,\frac{y}{k} = \mathrm{L}\cos\alpha(x+c), \qquad y = k\cos\alpha(x+c).$

Posons alors $\quad y = z\cos\alpha(x+c),\quad$ et remplaçons dans l'équation complète, nous aurons

$$z'\cos\alpha(x+c) + \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg}\alpha(x+c) + \frac{c'}{\cos\alpha(x+c)} = 0,$$

$$z' = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin\alpha(x+c)}{\cos^2\alpha(x+c)} - \frac{c'}{\cos^2\alpha(x+c)}.$$

L'intégration est immédiate et donne $z = \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{-1}{\cos \alpha(x+c)} - \frac{c'}{\alpha} \operatorname{tg}\alpha(x+c) + k$; donc

$$y = k \cos \alpha(x+c) - \frac{c'}{\alpha} \sin \alpha(x+c) - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

C'est bien ce que nous avions trouvé.

Pour expliquer ce que devient le premier membre de la première équation quand on y porte la solution générale de la seconde, désignons cette équation par $u = 0$; la seconde s'écrit alors

$u' - Pu = 0$, ou $\frac{u'}{u} = P = \alpha \operatorname{tg} \alpha(x+c)$.

Elle donne

$$L \frac{u}{h} = L \frac{1}{\cos \alpha(x+c)}, \qquad u = \frac{h}{\cos \alpha(x+c)}.$$

Ce qui est bien le résultat trouvé.

NÉVEJANS, 17e régiment d'artillerie.

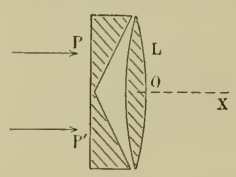
Bonnes solutions : MM. Salleron, conducteur des Ponts et Chaussées à Albi ; E. Leroux, à Douai ; G. Lach, à Denain ; A. Rousseau, à Landrecies ; Bonnetête, à Dinan ; G. Foucry, à Reims ; Amblard, à Ruines.

Assez bonnes solutions : MM. Montaut, à Alger ; P. Martin, à Grenoble ; A. Courtois, à Douai.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Concours de 1909

1821. — *Un faisceau de rayons lumineux parallèles tombe sur un système optique formé de deux prismes identiques,* P *et* P′, *et d'une lentille mince convergente* L. *La lumière arrive normalement sur les deux prismes qui sont opposés par leurs arêtes, puis, après réfraction dans ces prismes, traverse la lentille dont l'axe principal est* OX *parallèle au faisceau incident. On demande de :*



1° *Calculer la distance des deux points lumineux que l'on observe dans le plan focal de la lentille lorsque la lumière incidente est monochromatique.*

Angle au sommet des prismes . . . 15°. *Indice du verre des prismes* . . . $\frac{3}{2}$.

Distance focale de la lentille . . . 10cm.

2° *Décrire les phénomènes observés lorsque la lumière incidente est blanche. La lentille n'est pas achromatisée.*

Les rayons, arrivant normalement sur le prisme P, ne subissent pas de réfraction dans la première face. Ils tombent sur la seconde face en formant avec la normale un angle égal à l'angle A du prisme et ils émergent en faisant avec cette même normale un angle i tel que

$$\sin i = n \sin A,$$

n étant l'indice du verre.

Nous avons donc, à la sortie du prisme P, un faisceau de rayons parallèles faisant l'angle i avec la normale à la seconde face du prisme et l'angle $i - A$ avec l'axe OX. Tous ces rayons, réfractés par la lentille, vont converger en un même point du plan focal, à l'intersection de ce plan avec l'axe secondaire passant par le centre optique de la lentille. La distance $\frac{x}{2}$ de ce point à l'axe principal est donnée par la relation

$$\frac{x}{2} = f \operatorname{tg}(i - A).$$

Comme le prisme P′ est symétrique du prisme P par rapport à OX, il donne un point symétrique du premier et la distance de ces deux points sera

$$x = 2f \operatorname{tg}(i - A).$$

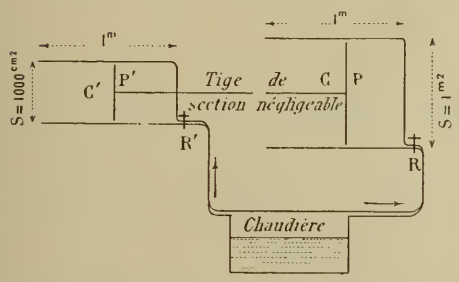
Effectuons les calculs :

$$\sin i = \frac{3}{2} \sin 15^\circ, \qquad i = 22^\circ\, 50'\, 40'', \qquad i - A = 7^\circ\, 50'\, 40'', \qquad x = 2^{cm},756.$$

Si la lumière incidente est blanche, elle est dispersée par les prismes et chaque point lumineux est remplacé par un spectre linéaire. D'autre part, la distance focale de la lentille diminue du rouge au violet, donc les extrémités violettes de ces spectres sont plus rapprochées de la lentille que les extrémités rouges.

André COURTOIS, lycée de Douai.

1822. — *On se propose de faire le vide dans un cylindre* C *derrière un piston* P. *On dispose pour cela de deux moyens différents.*



a) On peut, par un robinet R, *mettre le fond du cylindre en communication avec une chaudière et envoyer derrière le piston* P *de la vapeur d'eau. Celle-ci est à une pression juste suffisante pour déplacer* P, *qui est supposé glisser sans frottement. Quand le piston a été ainsi poussé à fond de course, on l'immobilise dans cette position par un dispositif mécanique quelconque, on ferme le robinet* R *et on laisse la vapeur se condenser sous l'action du refroidissement par les parois du cylindre, la température finale étant assez basse pour que la tension de la vapeur puisse être alors négligée.*

b) On peut aussi réaliser le vide derrière le piston P *en laissant le robinet* R *fermé et en fixant à* P *la tige d'un second piston* P′ *qui se meut dans un cylindre* C′, *ainsi que le représente la figure. La traction sur* P *s'effectue alors en envoyant par le robinet* R′ *de la vapeur dans le cylindre* C′ *à une pression juste suffisante pour déplacer le piston* P′, *qui glisse sans frottement. On demande :*

1° *Le travail en kilogrammètres qu'effectue la vapeur en poussant soit le piston* P *dans le procédé a, soit le piston* P′ *dans le procédé b.*

2° *Le nombre de grandes calories qu'il faut fournir à la chaudière pour chauffer et vaporiser l'eau nécessaire à une opération, soit dans le procédé a, soit dans le procédé b et, par suite, quel est celui de ces deux procédés qui est le plus avantageux en ce qui concerne la dépense en combustible. On ne tiendra pas compte dans ces calculs de la condensation de la vapeur au contact des pistons et des parois des cylindres pendant la durée de l'admission de la vapeur.*

3° *L'avantage de l'un des procédés sur l'autre subsiste-t-il si on tient compte de cette condensation, en admettant que pistons et parois des cylindres ont même épaisseur dans les deux appareils, sont constitués par le même métal et que ces pièces sont chauffées par la condensation de la température ambiante de* 16° *à la température de la vapeur, sans se refroidir appréciablement par conductibilité ou rayonnement pendant ce temps.*

Section du cylindre C : 1 *mètre carré ; du cylindre* C′ : 1000 *cm², de la tige de* P′, *négligeable.*

Course des deux pistons, 1 *mètre. Température de l'eau d'alimentation de la chaudière,* 16°.

Pression atmosphérique, 1 *kg par cm². Poids de* 1^{m3} *d'air à* 0° *et sous la pression de* 1 *kg par cm²,* $1^{kg},3$. — *Coefficient de dilatation de l'air,* $\frac{1}{270}$. *Densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air,* $\frac{5}{8}$. *Nombre q de grandes calories nécessaires pour chauffer* 1 *kg. d'eau de* 0° *à t° et le vaporiser à cette température sous la tension maximum de la vapeur,* $q = 606 + 0{,}3t$. *Relation entre la tension maximum p de la vapeur d'eau, en kilogrammes par cm², et la température t,* $p = \left(\frac{t}{100}\right)^4$.

Nota. — La précision demandée est celle que donne la règle à calcul ordinaire de 26^{cm} *de longueur.*

1° Dans le procédé a, la vapeur n'a à vaincre que la pression atmosphérique, qui équivaut à $10\,000^{kg}$ par mètre carré ; le travail est donc de 10 000 kilogrammètres.

Dans le procédé b, l'action de la vapeur sur le piston P′ est sp', p' désignant la nouvelle pression. D'autre part, la condition d'équilibre du système des deux pistons donne $sp' = (S + s)p$, p désignant la pression atmosphérique. Or Sp, action de l'atmosphère sur le grand piston, vaut toujours $10\,000^{kg}$; sp, action sur un piston 10 fois plus petit, vaut $1\,000^{kg}$. Donc $sp' = 11\,000$. La course étant toujours de 1^{m}, le travail sera de 11 000 kilogrammètres.

2° Dans le procédé a, l'eau, prise à 16°, est vaporisée à 100° ; la chaleur nécessaire par kilogramme est $606 + 30 - 16 = 620$. La masse de vapeur doit occuper un mètre cube à 100° ; elle est donc égale à

$$1 \times \frac{5}{8} \times 1{,}3 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1 + \frac{100}{270}} = 0{,}592.$$

Le nombre de calories à fournir, produit des deux nombres précédents, est

$$367.$$

Dans le procédé b, l'eau est vaporisée à une température t' qu'il nous faut d'abord calculer. L'égalité $sp' = (S + s)p$ donne $\frac{p'}{p} = 11$; donc $\left(\frac{t'}{100}\right)^4 = 11$, d'où $t = 182°$.

La chaleur nécessaire par kilogramme est $606 + 54{,}6 - 16 = 644{,}6$. La masse de vapeur doit occuper $0^{m3},1$ à 182° sous la pression de 11 atmosphères ; elle est donc égale à

$$0{,}1 \times \frac{5}{8} \times 1{,}3 \times \frac{11}{1} \times \frac{1}{1 + \frac{182}{270}} = 0{,}534.$$

Le nombre de calories à fournir est $644{,}6 \times 0{,}534$, ou

$$344.$$

Le second procédé est donc le plus avantageux.

3° Dans le procédé a, les surfaces du fond du cylindre, de sa paroi latérale et du piston sont respectivement

$$1, \qquad 2\sqrt{\pi} = 3{,}54, \qquad 1.$$

Pour les échauffer de 16° à 100°, c'est-à-dire de 84°, il faut des quantités de chaleur proportionnelles à

$$84, \qquad 297, \qquad 84.$$

Dans le procédé b, les surfaces analogues ont respectivement pour valeurs

$$0{,}1 \qquad 1{,}12, \qquad 0{,}1.$$

Elles doivent être échauffées de 16° à 182°, soit de 166° et exigent des quantités de chaleur proportionnelles à

$$16{,}6 \qquad 186, \qquad 16{,}6.$$

Dans le second cas, ces quantités de chaleur sont toutes plus petites que dans le premier ; le second procédé reste donc le plus avantageux.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (1909).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Mathématiques (M. Clairin).

734. — Construire $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

Équation de la tangente et de la normale en un point. La tangente en un point M coupe la courbe en deux autres points P et P′ ; montrer que les tangentes en P et en P′ sont rectangulaires, que la distance PP′ est constante et égale à $4a$, et que

le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires est le cercle inscrit dans la courbe. Rectifier cette courbe.

735.— Construire la courbe $y = a \text{ L} \cos \frac{x}{a}$ et rectifier cette courbe. Trouver les trajectoires orthogonales des familles obtenues par des translations parallèles à oy ou à ox. Généraliser le deuxième problème en trouvant une courbe qui rencontre toutes celles de la deuxième famille sous un angle constant.

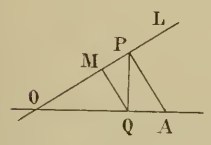
736. — Mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical avec frottement.

737. — On donne une droite variable (D),

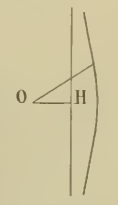
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 ;$$

par le point P où elle rencontre ox, on mène (D') perpendiculaire à (D). Déterminer la fonction $p(\alpha)$ de sorte que la distance des points de contact M et M' de (D) et de (D') avec leurs enveloppes soit constante.

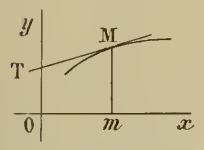
738. — D'un point fixe A on abaisse une perpendiculaire AP sur une droite OL qui tourne autour de O, de P une perpendiculaire PQ sur OA et de Q une perpendiculaire QM sur OP. Lieu du point M. Aire de la courbe. Trajectoires orthogonales quand A se déplace sur OA.



739. — Equation générale des paraboles osculatrices en un point donné à une courbe. Lieu des foyers. Enveloppe des axes et des directrices.



740. — On considère une conchoïde de droite et le pied H de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la droite fixe. Normales issues de H. Aire comprise entre la courbe et l'asymptote.



741. — Trouver une courbe telle que

$$\text{aire OTM}m = \text{C}^{\text{te}}.$$

742. — Construire la courbe $(x^2 + y^2)(y - mx) = a(x^2 - y^2)$.

Trouver le lieu du point de rencontre de cette courbe avec son asymptote, quand m varie. C'est une strophoïde. Equation différentielle de ces strophoïdes quand a varie. Trajectoires orthogonales de ces courbes.

743. — Etude de la strophoïde.

744. — Génératrices rectilignes de la surface

$$x = v \cos u, \qquad y = v \sin u, \qquad z = \varphi(u) + kv.$$

Trajectoires orthogonales des génératrices.

745. — Deux cercles horizontaux dont les centres sont sur une même verticale sont décrits par des points matériels de même masse qui s'attirent proportionnellement à la distance. Etudier le mouvement.

746. — On donne une ellipse ; par un point P de son plan, il passe quatre paraboles surosculatrices à l'ellipse. Les points de contact sont sur des droites parallèles. Former l'équation de la parabole qui passe par ces points.

747. — Trouver sur un cône de révolution une courbe telle que les tangentes rencontrent un cercle horizontal dont le centre est sur l'axe du cône.

748. — On donne un paraboloïde elliptique. Enveloppe des plans passant par le sommet et tels que la somme des carrés des axes des ellipses de section soit constante.

749. — Mouvement d'un point attiré par un point fixe suivant la loi

$$F = -\frac{m\mu}{r^3}.$$

750. — Génératrices rectilignes de la surface

$$2y^3 - 3xyz + z^2 = 0.$$

Chercher une courbe telle que le plan osculateur soit tangent à la surface.

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1908.

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES

(2e section.)

Mathématiques.

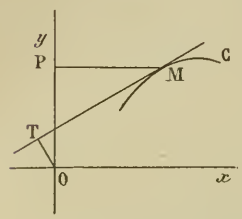
I. — **1857.** Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$xy'' - (x + a)y' + y = 0,$$

sachant qu'elle admet pour intégrale particulière un polynome entier en x. Montrer que l'intégrale générale s'exprime sans aucun signe de quadrature lorsque la constante a est un nombre entier positif.

(*) Le prochain concours aura lieu le 4 juillet 1910.

II. — **1858**. Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires, M un point d'une courbe plane C du plan xOy, MP la distance du point M à l'axe Oy, OT la distance de l'origine à la tangente en M à la courbe C.



On demande de déterminer les courbes C telles que le rapport $\frac{OT}{PM}$ soit égal à une constante donnée k, et d'exprimer les coordonnées d'un point M de l'une de ces courbes en fonction de l'angle φ que fait la tangente avec l'axe Ox.

Construire les courbes C dans les deux cas particuliers suivants :

$$k = 1, \qquad k = \frac{1}{2}.$$

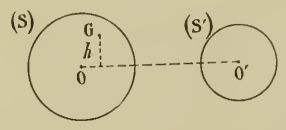
Evaluer dans ce dernier cas la longueur de l'arc compté à partir de l'origine.

Mécanique.

I. — **1859**. Un point matériel pesant est mobile sur une circonférence horizontale qui tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical ne passant pas par son centre. On donne ω en fonction du temps et l'on demande :

1° De former l'équation différentielle du mouvement du point, en supposant que ce point éprouve, par le fait du frottement, une résistance proportionnelle à sa pression sur la circonférence;

2° D'étudier en particulier le mouvement du point dans le cas où le frottement est négligeable et où la quantité ω est constante ; de dire quelles sont, dans ce cas, les conditions pour que le point effectue des oscillations infiniment petites et de calculer la durée d'une oscillation.



II. — On donne deux sphères S, S′ parfaitement polies. La première est lestée de telle façon que son centre de gravité G diffère de son centre de figure O et que l'ellipsoïde d'inertie relatif à G soit de révolution autour de OG. La seconde est homogène. A l'instant initial, ces deux sphères sont animées de translations parallèles à la ligne des centres OO′ ; le point G est à une distance h de cette ligne et la vitesse de S surpasse celle de S′.

Déterminer l'état du système aussitôt après le choc :

1° en supposant que les sphères sont parfaitement molles ;

2° en supposant qu'elles sont parfaitement élastiques.

Chimie.

I. — Comment obtient-on les principaux dépôts métalliques usuels par voie galvanique ?

II. — Si l'on jette un gramme d'argent dans un excès d'acide azotique étendu et froid, quel sera le volume du gaz dégagé après la dissolution totale ; que deviendrait le volume gazeux s'il se dégageait dans un excès d'oxygène, en présence de l'eau d'une cuve à eau ? Données :

$$Ag = 108 ; \qquad H = 1 ; \qquad O = 16 ; \qquad Az = 14.$$

Physique.

I. — Polarisation rotatoire :

On décrira les expériences d'Arago (lumière blanche) et de Biot (lumière homogène) et on exposera la théorie que Fresnel a donnée de ce phénomène.

II. — Solénoïdes ; intensité du champ en un point de l'axe.

III. — Un solénoïde de longueur l^{cm} comportant $n' = 300$ spires d'une surface moyenne $S' = 1509$ mm² est parcouru par un courant $i' = 0^{amp},1$, et est disposé à l'intérieur d'une bobine cylindrique de grande longueur, de façon que son axe fasse un angle de $\theta° = 45°$ avec celui de la bobine ; celle-ci présente $n_1 = 400$ spires par mètre de longueur et est parcourue par un courant de $i = 12$ amp.

On demande d'évaluer en joules le moment du couple qui sollicite le solénoïde.

On négligera l'influence du champ magnétique terrestre et on établira les formules définitives avant tout calcul numérique.

Dessin.

Parleur (grandeur d'exécution).

1° Faire sur une première feuille un croquis à main levée au crayon du parleur. On ne fera qu'une projection verticale.

L'appareil sera placé de telle sorte que le grand côté du socle soit parallèle à la ligne de terre, le bouton de réglage du ressort à boudin se trouvant à droite.

Les cotes seront portées sur le croquis en nombre suffisant et avec assez de clarté pour permettre au besoin l'exécution du dessin sans le secours de l'appareil.

2° Reproduire sur une seconde feuille, au moyen des instruments de dessin et à l'encre, l'appareil donné. Il sera inutile de porter les cotes sur le dessin. On mettra en titre le mot « Parleur ».

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1909.

1792. — *Donner sans démonstration : 1° la condition d'équilibre d'un solide invariable assujetti à tourner librement autour d'un axe fixe, mais sans glisser le long de cet axe). On fixe l'axe en fixant deux de ses points) ; 2° le calcul des réactions de l'axe en ses deux points fixes.*

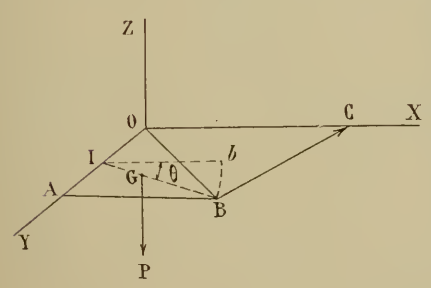
Application. — On considère trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, *dont l'un* OZ, *est vertical. Un triangle* OAB *rectangle et isocèle, de dimensions invariables, homogène et de poids* P, *peut tourner librement autour de son hypoténuse* OA *qui coïncide avec* OY, *mais sans glisser le long de* OY. *Les deux points* O *et* A *de l'axe sont fixes. Au sommet* B *est attaché un fil élastique dont l'autre extrémité est fixe en un point* C *de* OX. *On néglige le poids de ce fil qui reste rectiligne, et on suppose que sa tension est exprimée en grammes par le même nombre que celui qui exprime la longueur* BC *en centimètres.*

On donne OA = 20 *centimètres,* OC = 100 *centimètres et* P = 225 *grammes ; on demande :*

1° Dans la position d'équilibre du triangle où le sommet B *est au-dessous du plan horizontal* XOY, *de calculer la tangente de l'angle que fait le plan* AOB *avec le plan* XOY ;

2° Dans cet état d'équilibre, de calculer les composantes suivant les axes des réactions en O *et en* A *de l'axe* OY, *en supposant qu'en* A *la réaction est normale à cet axe.*

Soient OY l'axe fixe (fixé par les deux points O et A, $OA = 2a$), OX, OZ deux axes formant avec OY un trièdre trirectangle ; X, Y, Z, L, M, N les composantes par rapport à ces axes de la somme géométrique des forces appliquées au corps solide et de leur moment résultant par rapport au point O. Désignons par X′, Y′, Z′ les composantes de la réaction du point O, par X″, Y″, Z″ les composantes de la réaction du point A ; nous aurons en appliquant les équations universelles d'équilibre



$$X + X' + X'' = 0, \quad Y + Y' + Y'' = 0, \quad Z + Z' + Z'' = 0,$$
$$L + 2aZ'' = 0, \quad M = 0, \quad N - 2aX'' = 0.$$

L'équation $M = 0$, qui ne dépend pas de réactions donne la condition d'équilibre. Elle exprime que la somme des moments par rapport à l'axe des forces appliquées au corps solide est nulle.

Il reste cinq équations seulement pour calculer les six inconnues X′, Y′, Z′ ; X″, Y″, Z″. Pour déterminer le problème, supposons qu'au point A la réaction est normale à l'axe OY, ($Y'' = 0$). Nous aurons cinq équations pour déterminer les cinq inconnues X′, Y′, Z′, X″, Z″, savoir

$$X + X' + X'' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' + Z'' = 0,$$
$$L + aZ'' = 0, \quad N - aX'' = 0.$$

Application. — Posons $OA = 2a$; soit I le milieu de OA, on a

$$IB = \frac{1}{2} OA = a, \qquad OC = 5OA = 10a.$$

Les coordonnées du point B sont $x = a\cos\theta$, $y = a$, $z = -a\sin\theta$; celles du point G, $x = \frac{a}{3}\cos\theta$, $y = a$, $z = -\frac{a}{3}\sin\theta$.

Les composantes du poids P, appliquées en G, sont 0, 0, $-P$, et les composantes de son moment par rapport au point O, $-aP$, $\frac{a}{3}P\cos\theta$, 0.

Les composantes de la tension BC sont $10a - a\cos\theta$, $-a$, $+a\sin\theta$, et les composantes de son moment par rapport au point O 0, $-10a^2\sin\theta$, $-10a^2$.

Ecrivons les six équations d'équilibre (en tenant compte de $Y'' = 0$) :

(1) $$X' + X'' + 10a - a\cos\theta = 0,$$

(2) $$Y' - a = 0,$$

(3) $$Z' + Z'' - P + a\sin\theta = 0,$$

(4) $$2aZ'' - aP = 0,$$

(5) $$\frac{a}{3}P\cos\theta - 10a^2\sin\theta = 0,$$

(6) $$-2aX'' - 10a^2 = 0.$$

L'équation d'équilibre (5) nous donne

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P}{30a} = \frac{225}{300} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4},$$

d'où $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$. Les équations (6) et (4) nous donnent ensuite

$$X'' = -5a = -50, \qquad Z'' = \frac{P}{2} = 112{,}50.$$

Portant dans les équations (1), (2) et (3), il vient

$$X' = -42, \qquad Y' = 10 \qquad \text{et} \qquad Z' = 106{,}50.$$

En résumé, on trouve

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4}.$$

Réaction du point O : $X' = -42^g$, $Y' = 10^g$, $Z' = 106^g{,}50$.

Réaction du point A : $X'' = -50^g$, $Y'' = 0$, $Z'' = 112^g{,}50$.

P. L.

Solutions exactes : MM. A. Courtois, lycée de Douai ; G. Foucry, à Reims ; R. Manen, à Albi ; P. Salleron, conducteur des Ponts et Chaussées, à Albi.

1793. — *On considère un point* M *mobile dans un plan et dont les coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires fixes dans ce plan sont liées au temps* t *par les formules*

$$x = a\sqrt{3}\cos^3 t, \qquad y = -2a\sqrt{2}\sin^3 t,$$

où a *est une longueur positive donnée :*

1° *On demande de tracer la trajectoire de ce point et d'indiquer le sens du mouvement sur cette trajectoire ;*

2° *On demande de distinguer sur cette trajectoire les portions qui sont décrites d'un mouvement accéléré de celles qui sont décrites d'un mouvement retardé. — Construire les points de séparation :*

3° *La tangente en* M *à la trajectoire coupe* OX *en* P *et* OY *en* Q ; *on prend sur cette tangente le point*

S *tel que*

$$\frac{\text{segment SP}}{\text{segment SQ}} = \frac{3}{8}.$$

Loi du mouvement de S; *construire sa trajectoire. Construire le vecteur accélération pour une position de* S;

4° *Démontrer que le vecteur vitesse de* S *est perpendiculaire à* SM, *et qu'il est moyen proportionnel entre* SM *et la projection orthogonale de* SO *sur* SM.

1° L'équation de la trajectoire est

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2a\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une développée d'ellipse, dont la forme est connue; désignons par a' et b' les demi-longueurs d'axes de l'ellipse, par c' la demi-distance focale et identifions les expressions de x et y avec les équations paramétriques

$$x = \frac{c'^2}{a'}\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{c'^2}{b'}\sin^3\varphi;$$

nous aurons, en posant $\varphi = t$,

$$\frac{c'^2}{a'} = a\sqrt{3}, \qquad \frac{c'^2}{b'} = 2a\sqrt{2}, \qquad \text{d'où} \qquad a' = \frac{8a\sqrt{3}}{5}, \qquad b' = \frac{6a\sqrt{2}}{5}.$$

Le sens du mouvement de M sur sa trajectoire, t variant de 0 à 2π, est indiqué par les flèches.

2° Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = -3a\sqrt{3}\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = -6a\sqrt{2}\sin^2 t\cos t,$$

d'où $\quad V^2 = 27a^2\cos^4 t\sin^2 t + 72a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t(3\cos^2 t + 8\sin^2 t).$

Prenant la dérivée par rapport à t, il vient

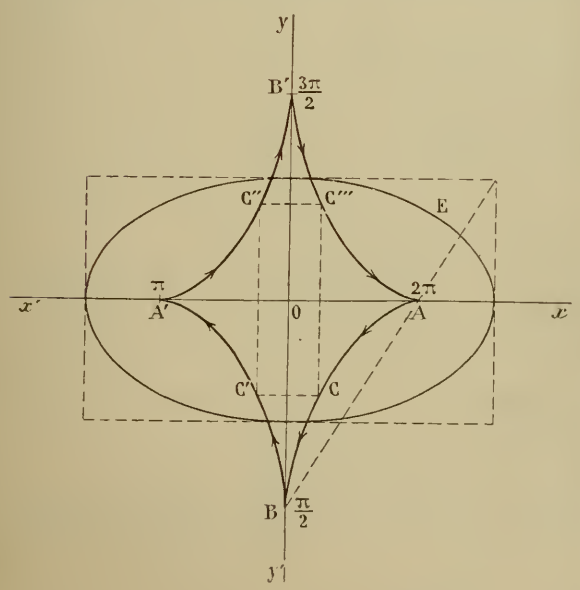
$$2VV' = 18a^2\sin t\cos t[3\cos^4 t + 10\sin^2 t\cos^2 t - 8\sin^4 t].$$

$2VV'$ change de signe en même temps que $\sin t$ ou $\cos t$ (points de rebroussement de la développée) et pour les valeurs de t qui correspondent aux racines réelles de l'équation

$$8\,\mathrm{tg}^4 t - 10\,\mathrm{tg}^2 t - 3 = 0,$$

d'où $\quad \mathrm{tg}^2 t = \dfrac{5 + \sqrt{25 + 24}}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2},$

$$\mathrm{tg}\, t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$



A ces valeurs de t correspondent les points C, C′, C″, C‴ sur la trajectoire, deux à deux symétriques par rapport aux axes de coordonnées.

Le mouvement est accéléré de A en C, retardé de C en B, accéléré de B en C′, ... etc.

Prenons la valeur de t entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, qui donne le point C; soit $t = \alpha$. On a

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$x = \frac{2a\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}, \qquad y = -\frac{6a\sqrt{6}}{5\sqrt{5}},$$

d'où $$\frac{y}{x} = -3 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{4a\sqrt{3}}{5}.$$

On pourra donc construire les quatre points C, C′, C″, C‴ en prenant l'intersection d'un cercle décrit de l'origine comme centre avec $\frac{4a\sqrt{3}}{5}$ pour rayon avec les droites de coefficients angulaires ∓ 3, menées de l'origine.

Les composantes de la vitesse du mobile en C seront

$$\frac{dx}{dt} = -3a\sqrt{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} = -\frac{6a}{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{dy}{dt} = -6a\sqrt{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} = -\frac{6a}{5}\times\frac{6}{\sqrt{5}},$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad \text{et} \qquad V = \frac{18a}{5}.$$

On peut vérifier ce dernier résultat en calculant directement la vitesse au point C :

$$V^2 = 9a^2\cdot\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\left(3\cdot\frac{2}{5}+8\cdot\frac{3}{5}\right) = 9a^2\times\frac{36}{25} = \left(\frac{18a}{5}\right)^2.$$

3° Ecrivons l'équation de la tangente en M à la trajectoire :

$$\frac{X - a\sqrt{3}\cos^3 t}{-3a\sqrt{3}\cos^2 t\sin t} = \frac{Y + 2a\sqrt{2}\sin^3 t}{-6a\sqrt{2}\sin^2 t\cos t}$$

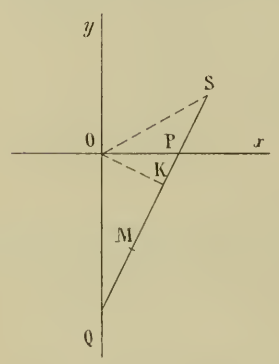
ou, simplifications faites,

$$\frac{X}{a\sqrt{3}\cos t} - \frac{Y}{2a\sqrt{2}\sin t} - 1 = 0$$

(nous pouvons constater qu'elle ne diffère pas de la normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{8a\sqrt{3}}{5}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{6a\sqrt{2}}{5}\right)^2} - 1 = 0$$

au point qui correspond à la valeur t de l'angle φ). Elle rencontre les axes aux points P, de coordonnées $X_1 = a\sqrt{3}\cos t$, $Y_1 = 0$ et Q de coordonnées $X_2 = 0$, $Y_2 = -2a\sqrt{2}\sin t$.



Le point S est défini par la relation $\frac{PS}{SQ} = -\frac{3}{8}$.

Ses coordonnées sont donc de la forme

$$x = \frac{X_1 + \lambda X_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{Y_1 + \lambda Y_2}{1+\lambda} \qquad \text{avec} \quad \lambda = -\frac{3}{8};$$

par suite

$$x = \frac{a\sqrt{3}\cos t}{1-\frac{3}{8}} = \frac{8a\sqrt{3}\cos t}{5}, \qquad y = \frac{\frac{3}{8}\,2a\sqrt{2}\sin t}{1-\frac{3}{8}} = \frac{6a\sqrt{2}\sin t}{5}.$$

Ce sont précisément les coordonnées du point qui correspond à la valeur t de l'angle φ sur l'ellipse E dont les demi-longueurs d'axes sont $$a' = \frac{8a\sqrt{3}}{5}, \qquad b' = \frac{6a\sqrt{2}}{5}.$$

En ce point S, la droite PQ est normale à l'ellipse E et le centre de courbure n'est autre que le point de contact M de PQ avec la développée. Donc SM est le rayon de courbure de l'ellipse E au point S.

4° Les équations du mouvement du point S sont

$$x = \frac{8a\sqrt{3}}{5}\cos t, \qquad y = \frac{6a\sqrt{2}}{5}\sin t.$$

La trajectoire est l'ellipse E décrite dans le sens direct ; la vitesse du point S, étant tangente à l'ellipse E, est perpendiculaire à la droite PQ.

Les composantes de cette vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{8a\sqrt{3}}{5}\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{6a\sqrt{2}}{5}\cos t$$

et celles de l'accélération

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8a\sqrt{3}}{5}\cos t = -x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{6a\sqrt{2}}{5}\sin t = -y.$$

Le vecteur accélération n'est autre que SO. Sa projection orthogonale sur SM, savoir SK, est l'accélération normale du point S, égale à $\frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{SM}$. Par suite $V^2 = \overline{SM} \times \overline{SK}$.

On peut d'ailleurs retrouver ces derniers résultats par le calcul :

1° Vérifier que le vecteur vitesse de S est perpendiculaire à SM, c'est-à-dire à PQ.

PQ a pour coefficients directeurs $a\sqrt{3}\cos t$, $2a\sqrt{2}\sin t$.

La vitesse de S a pour composantes $-\frac{8a\sqrt{3}}{5}\sin t$, $\frac{6a\sqrt{2}}{5}\cos t$ et on vérifie que

$$-a\sqrt{3}\cos t.\frac{8a\sqrt{3}}{5}\sin t + 2a\sqrt{2}\sin t.\frac{6a\sqrt{2}}{5}\cos t = 0.$$

2° Vérifier que le vecteur vitesse de S est moyen proportionnel entre SM et SK :

$$V^2 = \frac{3\times 64a^2}{25}\sin^2 t + \frac{2\times 36a^2}{25}\cos^2 t = \frac{24a^2}{25}(8\sin^2 t + 3\cos^2 t),$$

$$\overline{SM}^2 = \left(a\sqrt{3}\cos^3 t - \frac{8a\sqrt{3}}{5}\cos t\right)^2 + \left(-2a\sqrt{2}\sin^3 t - \frac{6a\sqrt{2}}{5}\sin t\right)^2$$

$$= 3a^2\cos^2 t\left(\cos^2 t - \frac{8}{5}\right)^2 + 8a^2\sin^2 t\left(\sin^2 t + \frac{3}{5}\right)^2.$$

Mais $\cos^2 t - \frac{8}{5} = 1 - \sin^2 t - \frac{8}{5} = -\left(\sin^2 t + \frac{3}{5}\right) = -\frac{8\sin^2 t + 3\cos^2 t}{5}$,

donc

$$\overline{SM}^2 = (3a^2\cos^2 t + 8a^2\sin^2 t)\frac{(8\sin^2 t + 3\cos^2 t)^2}{25},$$

$$SM = \frac{a}{5}(8\sin^2 t + 3\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}.$$

Enfin $\overline{SK}^2 = \overline{SO}^2 - \overline{OK}^2$. Or

$$\overline{SO}^2 = \frac{64\times 3a^2\cos^2 t}{25} + \frac{36\times 2a^2\sin^2 t}{25} = \frac{24}{25}a^2(8\cos^2 t + 3\sin^2 t),$$

OK est la distance du point O à la droite PQ, d'équation

$$2\sqrt{2}\sin t\,X - \sqrt{3}\cos t\,Y - 2a\sqrt{6}\sin t\cos t = 0.$$

$$\overline{OK}^2 = \frac{24a^2\sin^2 t\cos^2 t}{8\sin^2 t + 3\cos^2 t},$$

$$\overline{SK}^2 = 24a^2\left[\frac{8\cos^2 t + 3\sin^2 t}{25} - \frac{\sin^2 t\cos^2 t}{8\sin^2 t + 3\cos^2 t}\right] = \frac{\overline{24}^2 a^2}{25(8\sin^2 t + 3\cos^2 t)},$$

d'où

$$SK = \frac{24a}{5(8\sin^2 t + 3\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$SK.SM = \frac{24a}{5(8\sin^2 t + 3\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a}{5}(8\sin^2 t + 3\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} = \frac{24a^2}{25}(8\sin^2 t + 3\cos^2 t = v^2.$$

P. L.

Bonnes solutions de MM. André Courtois, lycée de Douai ; G. Foucry, à Reims ; G. Lach, à Denain ; Ed. Leroux, lycée de Douai ; R. Manen, à Albi ; L. Montaut, à Alger ; A. Rousseau, à Landrecies ; L. Simon, à Châlons-sur-Marne.

1794. — *Deux sphères éloignées, de rayons* R_1 *et* R_2, *sont chargées de quantités d'électricité* Q_1 *et* Q_2. *Que deviennent leur potentiel* U, *la charge et la densité superficielle de chaque sphère, quand on les a réunies par un fil long et fin ?*

$$R_1 = 2^{cm}, \qquad Q_1 = \frac{14}{3\times 10^9} \text{ coulomb},$$

$$R_2 = 5^{cm}, \qquad Q_2 = \frac{50}{3\times 10^9} \text{ coulomb}.$$

Exprimer U *dans le système électrostatique et dans le système pratique.*

Etablir les formules définitives avant tout calcul numérique.

Lorsque les deux sphères ont été réunies par un fil long et fin, elles forment un conducteur dont la capacité est égale à $R_1 + R_2$. Nous aurons donc

$$Q_1 + Q_2 = (R_1 + R_2)U \qquad \text{ou} \qquad U = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1 + R_2}$$

en unités électrostatiques.

La charge Q'_1 de la sphère de rayon R_1 et la charge Q'_2 de la sphère de rayon R_2 sont respectivement

$$Q'_1 = UR_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1 + R_2} R_1 \qquad \text{et} \qquad Q'_2 = UR_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{R_1 + R_2} R_2.$$

Leurs densités superficielles μ_1 et μ_2 sont

$$\mu_1 = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi R_1(R_1 + R_2)} \qquad \text{et} \qquad \mu_2 = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi R_2(R_1 + R_2)}.$$

Application numérique : En unités électrostatiques C. G. S.,

$$Q_1 = 14 \qquad \text{et} \qquad Q_2 = 50.$$

Donc

$$U = \frac{64}{7}.$$

Or une unité électrostatique C. G. S. de potentiel vaut 300 volts, donc

$$U = \frac{19200}{7} \text{ volts}.$$

Nous aurons ensuite, en unités électrostatiques,

$$Q'_1 = \frac{128}{7}, \qquad Q'_2 = \frac{320}{7},$$

$$\mu_1 = \frac{8}{7\pi}, \qquad \mu_2 = \frac{16}{35\pi}.$$

André COURTOIS, lycée de Douai.

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Denain ; P. Salleron, à Albi.

1795. — *On brûle dans l'oxygène* 8^g *d'un hydrocarbure saturé appartenant à la série forménique, dont la formule générale est* C^nH^{2n+2}. *On obtient une molécule d'eau. Quelle est la formule de cet hydrocarbure ?*

2° *Quel volume d'oxygène faudra-t-il employer pour brûler complètement l'hydrocarbure ? Quel poids de bichromate de potassium* ($Cr^2O^7K^2$) *devra-t-on traiter par l'acide sulfurique concentré, employé en excès, pour l'obtenir ?*

3° *Quel volume de chlore serait nécessaire pour la décomposition complète de l'hydrocarbure ? Quel poids de permanganate de potassium* (MnO^4K) *faudrait-il faire réagir sur l'acide chlorhydrique employé en excès, pour préparer ce chlore ?*

On supposera que les réactions sont complètes et qu'il n'y a pas de pertes. On ne fera pas les corrections de température, pression, etc.

Poids atomiques : $K = 39$, $Cr = 52$, $Mn = 55$.

1° En brûlant dans l'oxygène une molécule-gramme de l'hydrocarbure C^nH^{2n+2}, c'est-à-dire un poids de $12n + 2n + 2$ grammes, on produit $n + 1$ molécules d'eau. Pour produire une molécule seulement, il faut en brûler $n + 1$ fois moins, donc

$$\frac{12n + 2n + 2}{n + 1} = 8, \qquad \text{d'où} \qquad n = 1.$$

L'hydrocarbure a pour formule CH^4, c'est le méthane.

2° La combustion du méthane est représentée par l'équation

$$CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O.$$

Pour brûler une molécule-gramme, soit $12 + 4$ ou 16 grammes, il faut deux molécules d'oxygène. Pour brûler 8 grammes, il faut une molécule d'oxygène, c'est-à-dire $22^l,3$.

L'action de l'acide sulfurique sur le bichromate de potassium a pour formule

$$4SO^4H^2 + Cr^2O^7K^2 = (SO^4)^3Cr^2 + SO^4K^2 + 4H^2O + \frac{3}{2}O^2.$$

Pour avoir trois molécules d'oxygène, il faut traiter deux molécules de bichromate ; pour en avoir une, il faut traiter $\frac{2}{3}$ de molécule de sel, soit un poids égal à

$$\frac{2}{3} \times 294 = 196^g.$$

3° La destruction du méthane par le chlore est représentée par l'équation

$$CH^4 + 2Cl^2 = C + 4HCl.$$

Pour décomposer une demi-molécule de méthane, il faut donc une molécule de chlore, ou $22^l,3$.

L'action de l'acide chlorhydrique sur le permanganate a pour formule

$$MnO^4K + 8HCl = 4H^2O + KCl + MnCl^2 + \frac{5}{2}Cl^2,$$

et l'on voit que pour obtenir une molécule de chlore il faut employer un poids de permanganate égal à

$$\frac{2}{5} \times 158 = 63^g,2.$$

Ed. LEROUX, lycée de Douai.

Assez bonnes solutions de MM. J. Bing, A. Courtois et L. Simon.

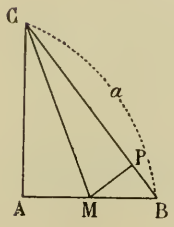
1797. — *Soit* ABC *un triangle rectangle en* A, *dans lequel on désigne par* a *l'hypoténuse* BC, *par* B *l'angle* ABC, *par* M *le milieu du côté* AB *et par* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de* M *sur l'hypoténuse* BC.

1° *Evaluer les longueurs* MP *et* CP *en fonction de l'hypoténuse* a *et de l'angle* B, *puis étudier la variation de la différence* CP — MP *de ces deux longueurs quand l'angle* B *varie,* a *restant constant.*

2° *Déterminer l'angle* B *de façon que le rapport* $\frac{MP + CP}{BC}$ *soit égal à un nombre donné* k. *Indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.*

3° *Trouver la valeur du rapport* $\frac{CM}{BC}$ *dans le cas où l'angle* BMC *est triple de l'angle* B.

1° On a immédiatement $AB = a\cos B, \qquad AC = a\sin B,$



$$MP = MB\sin B = \frac{a}{2}\cos B\sin B, \qquad BP = MB\cos B = \frac{a}{2}\cos^2 B,$$

d'où

$$CP = a - \frac{a}{2}\cos^2 B,$$

$$CP - MP = a - \frac{a}{2}\cos^2 B - \frac{a}{2}\cos B\sin B = a - \frac{a}{4}(1 + \cos 2B) - \frac{a}{4}\sin 2B$$

$$= \frac{3a}{4} - \frac{a}{4}(\cos 2B + \sin 2B) = \frac{3a}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{4}\sin\left(2B + \frac{\pi}{4}\right).$$

L'angle B peut varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$; l'angle $2B + \frac{\pi}{4}$ variera donc de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$. La différence CP — MP sera minimum pour la valeur $B = \frac{\pi}{8}$ pour laquelle $\sin\left(2B + \frac{\pi}{4}\right)$ atteint son maximum

B	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$2B + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$
CP — MP	$\frac{a}{2}$	décroît	$\frac{a(3-\sqrt{2})}{4}$ *min.*	croît	a.

2° Nous aurons de même

$$MP + CP = \frac{a}{2}\cos B\sin B + a - \frac{a}{2}\cos^2 B.$$

Il faut déterminer l'angle B de façon que

$$\frac{1}{2}\cos B\sin B + 1 - \frac{1}{2}\cos^2 B = k.$$

Pour faciliter la discussion nous prendrons tg B comme inconnue.

L'équation du problème est

$$2(1-k)\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg} B + (1 - 2k) = 0.$$

Une valeur de tg B, pour convenir au problème, doit être réelle et positive.

Condition de réalité :

$$1 - 8(1-k)(1-2k) \geqslant 0, \qquad 16k^2 - 24k + 7 \leqslant 0,$$

$$\frac{3-\sqrt{2}}{4} < k < \frac{3+\sqrt{2}}{4}.$$

Pour étudier le signe, prenons la somme $S = \frac{1}{2(k-1)}$ et le produit $P = \frac{2k-1}{2(k-1)}$ des racines.

Nous aurons le tableau suivant :

k	P	S	
$\frac{3-\sqrt{2}}{4}$			
	$+$	$-$	2 racines négatives.
$\frac{1}{2}$	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	$-$	$-$	une racine positive, la plus petite en valeur absolue.
1	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	$+$	$+$	2 racines positives.
$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$			

Donc pour :

$k < \frac{1}{2}$, le problème n'est pas possible ;

$\frac{1}{2} < k < 1$, le problème est possible ; il admet une solution.

$1 < k < \frac{3+\sqrt{2}}{4}$, le problème est possible ; il admet deux solutions.

$\frac{3+\sqrt{2}}{4} < k$, le problème n'est plus possible.

3° On a $\frac{CM}{\sin B} = \frac{BC}{\sin M}$; si on suppose l'angle $BMC = 3B$, on aura donc

$$\frac{CM}{BC} = \frac{\sin B}{\sin 3B} = \frac{\sin B}{3 \sin B \cos^2 B - \sin^3 B} = \frac{1}{3 \cos^2 B - \sin^2 B},$$

mais la relation $\widehat{BMC} = 3B$ détermine l'angle B. Désignons par C l'angle ACM,

$$\widehat{BMC} = \frac{\pi}{2} + C_1, \qquad \text{d'autre part} \qquad \operatorname{tg} C_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} C = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} B.$$

On doit donc avoir $$\frac{1}{2} \operatorname{cotg} B = \operatorname{tg}\left(3B - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg} 3B$$

ou $$\operatorname{tg} 3B + 2 \operatorname{tg} B = 0, \qquad \frac{3 \operatorname{tg} B - \operatorname{tg}^3 B}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 B} + 2 \operatorname{tg} B = 0.$$

Supprimant la solution $\operatorname{tg} B = 0$, il vient $3 - \operatorname{tg}^2 B + 2(1 - 3 \operatorname{tg}^2 B) = 0$,

$$7 \operatorname{tg}^2 B - 5 = 0, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{5}{7}}, \qquad \left(0 < B < \frac{\pi}{2}\right).$$

Cette condition est une condition nécessaire pour que $\widehat{BMC} = \frac{\pi}{2} + C_1 = 3B$.

Est-elle suffisante ? Elle permet d'affirmer que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + C_1\right) = \operatorname{tg} 3B$, mais pour pouvoir en déduire que $\frac{\pi}{2} + C_1 = 3B$, il faut s'assurer que l'angle 3B est compris $\left(\text{comme } \frac{\pi}{2} + C_1\right)$ entre 0 et π, en d'autres termes que $0 < B < \frac{\pi}{3}$ ou encore que

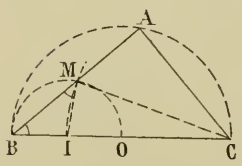
$$\operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{5}{7}} < \sqrt{3},$$

ce qui est évident. Donc la condition nécessaire et suffisante pour que $\widehat{BMC} = 3B$, c'est que $\operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{5}{7}}$. On en déduit $\frac{\sin^2 B}{5} = \frac{\cos^2 B}{7} = \frac{1}{12}$,

d'où $\sin^2 B = \frac{5}{12}$, $\cos^2 B = \frac{7}{12}$ et $3\cos^2 B - \sin^2 B = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ et par conséquent

$$\frac{CM}{BC} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Géométriquement, proposons-nous de construire sur $BC = a$ comme hypoténuse le triangle rectangle ABC, tel que $\widehat{BMC} = 3B$.



Un lieu du sommet A est la demi-circonférence décrite sur BC comme diamètre ; pareillement un lieu de M sera la demi-circonférence décrite sur BO comme diamètre. Soit I le milieu de BO, le triangle BIM est isocèle, donc $\widehat{BMI} = \widehat{B}$; il faudra donc que

$$\widehat{IMC} = 2B = \widehat{CIM},$$

donc que le triangle CIM soit isocèle. M est à l'intersection de la demi-circonférence BO avec la circonférence décrite de C comme centre avec $CI = \frac{3}{4}a$ comme rayon. Il en résulte bien

$$CM = \frac{3}{4}BC.$$

P. L.

Solutions exactes : MM. A. Courtois, lycée de Douai ; G. Foucry, à Reims ; G. Lach, à Denain ; Ed. Leroux, lycée de Douai : R. Manen, à Albi ; A. Rousseau, à Landrecies ; P. Salleron, conducteur des Ponts et Chaussées, à Albi ; L. Simon, section normale de Châlons-sur-Marne.

Calcul

1798. — *Calculer soit en grades, soit en degrés, trois angles aigus positifs, x, y, z, vérifiant les équations*

$$\sin x = \sqrt{\frac{42538}{86864}}, \qquad \cos y = \frac{45286}{63435}, \qquad \operatorname{tg} 2z = \frac{\sin 3x}{\sin 3y}.$$

Calcul en degrés (tables à 7 décimales).

Calcul de x.

$\log 86864 = 4{,}9388398$
$\log 42538 = 4{,}6287771$
$\operatorname{colog} 86864 = \bar{5}{,}0611602$

$2 \log \sin x = \bar{1}{,}6899373$
$\log \sin x = \bar{1}{,}8449686$

44°24′30″	536	$\Delta = 215$
7″	150	

$x = 44°24'37''$

$3x = 133°13'51''$
$\sin 3x = \sin 46°46'9''$

46°46′	$\bar{1}{,}8624714$	$\Delta = 198$
9″	178,2	

$\log \sin 3x = \bar{1}{,}8624892$

Calcul de y.

$\log 63435 = 4{,}8023289$
$\log 45286 = 4{,}6559640$
$\operatorname{colog} 63435 = \bar{5}{,}1976711$

$\log \cos y = \bar{1}{,}8536351$

44°26′50″	48	$\Delta = 207$
	3	
− 0″,1	2,07	
− 0″,05	0,93	

$y = 44°26'49'',85$

$3y = 133°20'29'',15$
$\sin 3y = \sin 46°39'30'',45$

46°39′30″	$\bar{1}{,}8616980$	$\Delta = 198$
0″,4	7,92	
0″,05	0,99	

$\log \sin 3y = \bar{1}{,}8616989$

Calcul de z.

$$\log \sin 3x = \bar{1},8624892$$
$$\text{colog} \sin 3y = 0,1383011$$
$$\log \operatorname{tg} 2z = 0,0007903$$

45°3′	580	$\Delta = 421$
	323	
7″	294,7	
	28,3	
0″,6	25,26	
0″,07	3,04	

$$2z = 45^\circ\ 3'\ 7'',67$$
$$z = 22^\circ 31' 33'',835.$$

Résultats (en secondes).

$$x = 44^\circ 24' 37''$$
$$y = 44^\circ 26' 50''$$
$$z = 22^\circ 31' 34''.$$

Calcul en grades (Tables à 5 décimales).

$$\log 86864 = 4,93884$$
$$\log 42538 = 4,62878$$
$$\text{colog } 86864 = \bar{5},06116$$
$$2 \log \sin x = \bar{1},68994$$
$$\log \sin x = \bar{1},84497$$

49ᵞ34	4	$\Delta = 7$
	3	
4	2,8	
3	0,2	

$$x = 49^{\gamma}3443$$

$$3x = 148^{\gamma}0329$$
$$\sin 3x = \sin 51^{\gamma}9671$$

51ᵞ96	$\bar{1},86245$	$\Delta = 7$
7	4,9	
1	0,07	

$$\log \sin 3x = \bar{1},86250$$
$$\text{colog} \sin 3y = 0,138285$$
$$\log \operatorname{tg} 2z = 0,000785$$

50ᵞ05	68	$\Delta = 14$
	10,5	
7	9,8	
5	0,7	

$$2z = 50^{\gamma}0575$$

$$\log 63435 = 4,802325$$
$$\log 45286 = 4,655964$$
$$\text{colog } 63435 = \bar{5},197675$$
$$\log \cos y = \bar{1},853639$$

49ᵞ38	7	$\Delta = 6$
5	3,1	

$$y = 49^{\gamma}3850$$

$$3y = 148^{\gamma}1550$$
$$\sin 3y = \sin 51^{\gamma}8450$$

51ᵞ84	$\bar{1},86168$	$\Delta = 7$
5	3,5	

$$\log \sin 3y = \bar{1},86171,5$$

$$z = 25^{\gamma}0288$$

Conversion des grades en degrés

49^g	$44^\circ\ 6'$
34	$18'21'',6$
4	$12'',96$
3	$0'',972$
$x =$	$44^\circ 24' 36''$
49^g	$44^\circ\ 6'$
38	$20'31'',2$
5	$16'',2$
$y =$	$44^\circ 26' 47'',4$
25^g	$22^\circ 30'$
02	$1'\ 4'',8$
8	$25'',92$
8	$2'',59$
$z =$	$22^\circ 31' 33'',3$

P. L.

Ont envoyé des calculs exacts : MM. André Courtois, lycée de Douai ; G. Lach, à Denain ; M. Mazet, à Sétif : A. Rousseau, à Landrecies ; P. Salleron, conducteur des Ponts et Chaussées, à Albi.

QUESTIONS PROPOSÉES

1860. — Par un des foyers F d'une ellipse on mène une corde AB variable ; par le second foyer F' on mène la corde CD perpendiculaire à AB. Soient P et Q les pôles de AB et CD par rapport à l'ellipse. 1° La droite PQ enveloppe une ellipse ; 2° Le lieu du point de rencontre de PQ et AB est une cubique dont l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est finie : calculer cette aire.

E.-N. Barisien.

1861. — Enveloppe des coniques ayant un foyer fixe, la longueur du grand axe constante et dont le deuxième foyer décrit une droite ou un cercle. Cas particuliers.

Piglowski

Erratum. — La question 1856, proposée par erreur, est la même que la question 1838.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Juin 1910. N° 9.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

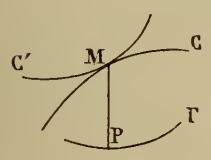
QUESTION DE CINÉMATIQUE

par M. **G. Valiron**, professeur de mathématiques spéciales préparatoires au lycée de Besançon.

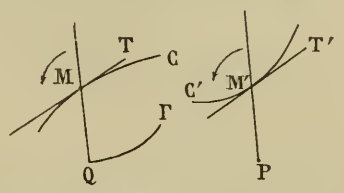
Dans la *Revue* de janvier 1909, M. Durand se propose de déterminer la courbe qu'il faut faire rouler sans glissement sur une droite pour qu'un point qui lui est invariablement lié décrive une courbe donnée. C'est un cas particulier de la question suivante :

Déterminer la courbe qu'il faut faire rouler sur une courbe donnée pour qu'un point qui lui est invariablement lié décrive une courbe également donnée.

On sait que lorsqu'une courbe C′ roule sans glisser sur une courbe C, le point de contact M des deux courbes est le centre instantané de rotation ; donc, si P est un point lié à C′, la droite MP est normale en P à la trajectoire Γ de ce point.



Considérons alors séparément dans deux plans : 1° l'ensemble des courbes C et Γ ; 2° la courbe C′ et le point P. Pour trouver le point de C′ qui dans le mouvement vient en contact avec le point M pris sur C, il suffit d'après ce qui précède de mener de M les normales à Γ ; soit MQ l'une d'elles, M′ correspondant à M sur C′ on aura PM′ = QM. Ceci déterminera un certain nombre de points sur C′. Tous ne répondent pas à la question, car si MT et MT′ sont les tangentes en M et M′ à C et C′ on doit avoir



$$\widehat{QMT} = \widehat{PM'T}.$$

Ces remarques simples permettent de trouver l'un des éléments C, Γ, C′, P connaissant les trois autres. Prenons d'abord le cas où on connaît C, Γ et P. Je suppose que l'on sache calculer en fonction d'un paramètre : 1° le carré de MQ, $\overline{MQ}^2 = \rho^2$; 2° la tangente de l'angle dont il faut faire tourner la droite QM dans le sens positif pour l'appliquer sur la tangente MT. Soit tgV.

Dans la courbe C′ on devra avoir

$$\overline{PM'}^2 = \rho^2, \qquad \operatorname{tg}(PM', M'T') = \operatorname{tg}V.$$

Ces deux relations donnent les équations de C′ dans un système de coordonnées polaires de pôle P. Si r et θ désignent ces coordonnées, on sait que

$$\operatorname{tg}(PM', M'T') = \frac{rd\theta}{dr}.$$

On a donc
$$r^2 = \rho^2, \qquad \frac{rd\theta}{dr} = \operatorname{tg}V.$$

Comme en changeant r en $-r$ on obtient la courbe symétrique par rapport à P, c'est-à-dire la même solution, on peut prendre

$$r = \rho, \qquad d\theta = \frac{\operatorname{tg}V\, d\rho}{\rho}.$$

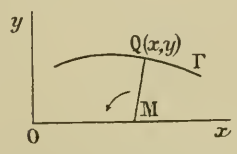
D'où

$$\text{(I)} \qquad r = \rho, \qquad \theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\operatorname{tg} V\, d\rho}{\rho},$$

ρ_0 est arbitraire, l'axe polaire étant choisi arbitrairement.

Les formules I qui résolvent le problème montrent notamment que pour tous les ensembles de courbes C et Γ tels que tg V soit une même fonction de ρ, la courbe C′ est la même.

Cas particuliers. — I. C est une droite. — Prenons cette doite pour axe Ox et soient x et y les coordonnées de Q, point de Γ.



On a $\qquad \operatorname{tg} V = \dfrac{dx}{dy}, \qquad \rho = \dfrac{y}{\sin V}.$

D'où

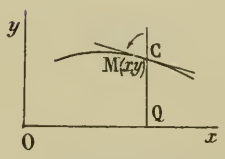
$$d\rho = \frac{dy}{\sin V} - \frac{y \cos V}{\sin^2 V}\, dV, \qquad \theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\operatorname{tg} V\, d\rho}{\rho} = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sin V} \frac{\sin V}{y} \frac{dx}{dy} - \int_{V_0}^{V} dV,$$

$$\theta = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y} + V_0 - V.$$

Les équations sont donc

$$\text{(1)} \qquad r = \frac{y}{\sin V}, \qquad \theta = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y} + V_0 - V. \qquad \left(\operatorname{tg} V = \frac{dx}{dy}\right).$$

II. — Γ est une droite. — Prenons cette droite pour axe Ox et soient x et y les coordonnées d'un point de C. On a ici



$$\rho = y, \qquad \operatorname{tg} V = -\frac{dx}{dy}.$$

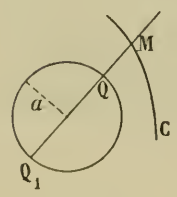
D'où

$$\theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\operatorname{tg} V\, d\rho}{\rho} = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}.$$

Les équations sont

$$\text{(2)} \qquad r = y, \qquad \theta = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y}.$$

III. — Si Γ est un cercle nous déterminerons C par ses coordonnées polaires, le centre du cercle étant le pôle.



R et ω étant les coordonnées de M, a le rayon du cercle, on a

$$\rho = R \mp a, \qquad d\rho = dR, \qquad \operatorname{tg} V = \frac{R\, d\omega}{dR}.$$

D'où

$$\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{R}{R \mp a}\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{R \mp a \pm a}{R \mp a}\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega + a \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{R \mp a}.$$

Donc

$$\text{(3)} \qquad r = R \mp a, \qquad \theta = \omega - \omega_0 + \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{a\, d\omega}{R \mp a}.$$

IV. — Soit $\operatorname{tg} V = m$, m étant constant. Ceci signifie que C est une trajectoire sous un angle constant des normales à la courbe Γ. On a alors

$$r = \rho, \qquad \theta = m \mathrm{L} \frac{\rho}{\rho_0} = m \mathrm{L} \frac{r}{r_0}.$$

D'où

$$\text{(4)} \qquad r = r_0 e^{\frac{\theta}{m}},$$

on a une spirale logarithmique.

On peut énoncer le résultat sous la forme suivante :

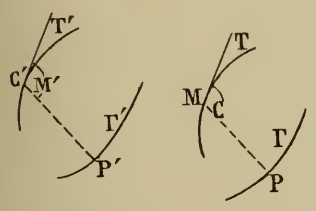
La courbe qu'il faut faire rouler sur une courbe donnée pour que la trajectoire d'un point qui lui est invariablement lié soit la trajectoire orthogonale des droites coupant C *sous un angle constant* V *est une spirale logarithmique qui ne dépend que de* V.

Remarques. — On verra facilement que les formules (2) sont un cas limite des formules (3).

Sur les formules (I) on voit que si ρ s'annule, tgV restant différent de 0, θ croît indéfiniment, donc si les courbes C et Γ se coupent sous un angle différent de $\frac{\pi}{2}$, C′ admet P pour point asymptote.

Problème inverse. — Le problème inverse consiste à trouver C connaissant Γ, C′ et P. Je considère le problème plus général :

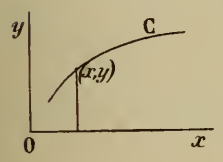
Etant données deux courbes C′ *et* Γ' *dans un plan et dans un second plan une courbe* Γ, *trouver la courbe* C *qu'il faut associer à* Γ *pour que dans le roulement sans glissement de* C *sur* C′, Γ *ait la courbe* Γ' *pour enveloppe.*



Supposons que l'on connaisse C ; pour trouver le point M de C qui vient au contact avec M′ de C′, il suffit de remarquer que les normales abaissées de M′ et M respectivement sur Γ' et Γ sont égales et les angles de ces normales avec les tangentes en C et C′ les mêmes. On voit alors que si on connaissait le point P de Γ qui vient au contact avec P′ de Γ' il suffirait de porter sur la normale en P une longueur égale à P′M′. Tout revient à établir une correspondance entre les points de Γ et ceux de Γ'.

Cette correspondance est déterminée par la condition que les différentielles des arcs de C et C′ soient les mêmes (ou que les angles P′M′T′, PMT soient égaux). On arrive à une équation différentielle du premier ordre qui ne s'intègre pas dans le cas général.

Cas particuliers. — I′. Γ est une droite. Prenant cette droite pour axe Ox, cherchons les coordonnées d'un point de C. Supposons que dans le plan C′Γ' on sache calculer



$\mathrm{tgV} = \mathrm{tg}(\mathrm{P'M'.M'T'})$ et $\rho^2 = \overline{\mathrm{P'M'}}^2$ en fonction d'un paramètre. On aura pour C

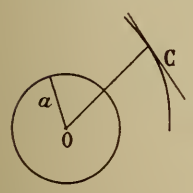
$$y = \rho, \qquad \frac{dx}{dy} = -\,\mathrm{tg\,V}. \qquad \text{(Cas II du problème direct)}$$

D'où

$$\text{(I')} \qquad y = \rho, \qquad x = -\int_{\rho_0}^{\rho} \mathrm{tg\,V}\,d\rho.$$

Ces formules donnent lieu à des cas particuliers analogues aux cas déduits des formules (I) (sauf le cas II qui donne C elle-même et ne correspond à aucun mouvement). On y adjoindra le cas où Γ' se réduit à un point P.

II′. — Γ est un cercle. Nous chercherons les coordonnées polaires d'un point de C par rapport au centre. Si r et θ sont ces coordonnées, on a



$$r \mp a = \rho, \qquad \frac{r\,d\theta}{dr} = \mathrm{tg\,V}.$$

D'où

$$\text{(II')} \qquad r = \rho \pm a, \qquad \theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mathrm{tg\,V}\,d\rho}{\rho \pm a}.$$

Le signe $\pm$ correspond à ce que Γ a une enveloppe formée de deux courbes parallèles et que Γ' peut être l'une ou l'autre de ces deux branches.

On trouvera encore dans les cas particuliers I, II, III, IV les expressions de ρ et tg V par des calculs simples. On adjoindra le cas où Γ' se réduit à un point ρ.

Cas où l'on donne C, C′ *et* Γ. — C'est le cas où l'on connaît les roulettes, le problème revient à chercher l'enveloppe d'une famille de cercles dont les centres sont sur C′.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1909.

Mathématiques spéciales.

1808. — *On donne une parabole* (P) *et une droite* (D) *dont les équations, relatives à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, sont*

$$(\mathrm{P})\ \begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ z = 0, \end{cases} \qquad (\mathrm{D})\ \begin{cases} y = 0, \\ z = a, \end{cases}$$

et l'on considère la surface (S) *engendrée par une droite variable* (Δ) *assujettie à rencontrer* (P) *en un point* A *et* (D) *en un point* B, *de façon que la distance* AB *soit une constante* l.

1° *Construire la projection sur le plan* xOy *d'une section de la surface par un plan parallèle au plan* xOy ; *construire la tangente en un point de cette projection et montrer que la courbe obtenue peut être regardée comme le lieu des milieux de cordes parallèles à* Ox *et limitées, d'une part à une parabole de sommet* O *et d'axe* Ox, *d'autre part à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* Ox *et* Oy.

2° *On peut distinguer deux sortes de droites* Δ *suivant que l'abscisse de* A *est supérieure ou inférieure à celle de* B ; *séparer sur les sections précédentes les arcs qui correspondent aux génératrices de l'un ou de l'autre système et trouver le lieu des points qui limitent ces arcs.*

3° *On considère le solide limité par la surface* (S) *et par les plans* $z + a = 0$, $z - 2a = 0$; *trouver son volume et construire son contour apparent sur le plan* zOx.

4° *Déterminer les trajectoires orthogonales des droites* (Δ). *Par un point* A, *on peut mener deux droites* (Δ), *qui rencontrent une trajectoire orthogonale en deux points* C *et* C' ; *montrer que l'on peut choisir cette trajectoire de façon que la somme* $\overline{AC} + \overline{AC'}$ *soit proportionnelle à l'abscisse de* A.

Peut-on choisir les constantes données de façon qu'une seule trajectoire orthogonale rencontre toutes les droites (Δ) *entre leurs points situés sur la parabole* (P) *et sur la droite* (D) ?

Désignons par $\frac{t^2}{2p}$, t, 0 les coordonnées du point A et par u, 0, a celles du point B. En écrivant que la distance AB est égale à l, nous avons

$$\left(u - \frac{t^2}{2p}\right)^2 + t^2 + a^2 = l^2 ;$$

nous voyons ainsi que l doit être supérieur à a, et si nous posons $l^2 - a^2 = k^2$, nous obtenons la condition $\left(u - \frac{t^2}{2p}\right)^2 + t^2 = k^2$, ce qui nous conduit à poser

$$u - \frac{t^2}{2p} = k\cos\varphi, \qquad t = k\sin\varphi,$$

l'angle φ recevant toutes les valeurs de 0 à 2π.

D'autre part les équations de la droite (Δ) qui joint les points A et B peuvent s'écrire

$$\frac{x - \frac{t^2}{2p}}{u - \frac{t^2}{2p}} = \frac{y - t}{-t} = \frac{z}{a}.$$

ou, en remplaçant t et u par leurs valeurs en fonction de φ,

$$\frac{x - \frac{k^2\sin^2\varphi}{2p}}{k\cos\varphi} = \frac{y - k\sin\varphi}{-k\sin\varphi} = \frac{z}{a},$$

ou, enfin

$$x = \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{2p} + k \cos \varphi \, \frac{z}{a}, \qquad y = k \sin \varphi \left(1 - \frac{z}{a}\right).$$

On aurait aisément l'équation de la surface (S) en éliminant φ entre ces deux équations.

1. La section de la surface (S) par le plan $z = h$ se projette sur le plan xOy suivant une courbe dont les équations paramétriques sont

$$x = \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{2p} + \frac{kh}{a} \cos \varphi, \qquad y = k\left(1 - \frac{h}{a}\right) \sin \varphi.$$

Pour obtenir toute la courbe, il suffit de faire varier φ dans un intervalle quelconque dont l'étendue soit égale à 2π. Si on change φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change de signe ; donc la courbe est symétrique par rapport à Ox. Si l'on prend comme intervalle de variation l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, on voit qu'il suffira de faire varier φ dans l'intervalle $(0, \pi)$, et d'achever par symétrie par rapport à Ox.

Dans cet intervalle x et y sont des fonctions continues de φ admettant des dérivées

$$\frac{dx}{d\varphi} = k \sin \varphi \left(\frac{k}{p} \cos \varphi - \frac{h}{a}\right), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = k\left(1 - \frac{h}{a}\right) \cos \varphi.$$

Nous pouvons toujours supposer p, a et k positifs.

La dérivée $\frac{dx}{d\varphi}$ s'annule pour $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ et pour les racines de l'équation $\cos \varphi = \frac{hp}{ak}$.

Or, cette équation n'admet des racines que si $\frac{hp}{ak}$ est compris entre -1 et $+1$, ou si h est compris entre $-\frac{ak}{p}$ et $+\frac{ak}{p}$.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer différents cas.

Premier cas : $-\infty < h \leqslant -\frac{ak}{p}$. Dans ce cas $\frac{dx}{d\varphi}$ reste toujours positif, nous avons le tableau de variation suivant :

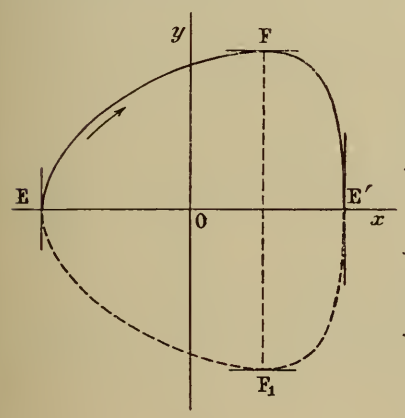


Fig. 1.

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dx}{d\varphi}$	0	$+$	$-\frac{hk}{2}$	$+$	0
x	$\frac{kh}{a}$	croît	$\frac{k^2}{2p}$	croît	$-\frac{kh}{a}$
$\frac{dy}{d\varphi}$	$k\left(1-\frac{h}{a}\right)$	$+$	0	$-$	$-k\left(1-\frac{h}{a}\right)$
y	0	croît	$k\left(1-\frac{h}{a}\right)$	décroît	0

et nous en déduisons la forme de la courbe (*fig.* 1).

Nous représentons en trait plein la portion de courbe qui correspond à la variation de φ dans l'intervalle $(0, \pi)$ et en trait pointillé la partie symétrique par rapport à Ox, et nous indiquons par une flèche le sens dans lequel est décrite la courbe quand φ varie de 0 à π. Aux points E et E′ correspondant aux valeurs $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$ la tangente est perpendiculaire à Ox ; au point $F\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ la tangente est parallèle à Ox.

Deuxième cas : $-\frac{ak}{p} < h < 0$. L'équation $\cos\varphi = \frac{hp}{ak}$ admet une racine α comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		α		π
$\frac{dx}{d\varphi}$	0	$+$	$-\frac{hk}{a}$	$+$	0	$-$	0
x	$\frac{kh}{a}$	croît	$\frac{k^2}{2p}$	croît	$\frac{k^2}{2p}+\frac{h^2p}{2a^2}$ *max.*	décroît	$-\frac{kh}{a}$
$\frac{dy}{d\varphi}$	$k\left(1-\frac{h}{a}\right)$	$+$	0		$-$		$-k\left(1-\frac{h}{a}\right)$
y	0	croît	$k\left(1-\frac{h}{a}\right)$ *max.*		décroît		0

Nous en déduisons la courbe représentée par la figure 2 ; nous désignons par H le point correspondant à la valeur $\varphi = \alpha$. En ce point la tangente est perpendiculaire à Ox. La courbe présente deux points d'inflexion l'un entre H et E′, l'autre symétrique du premier par rapport à Ox.

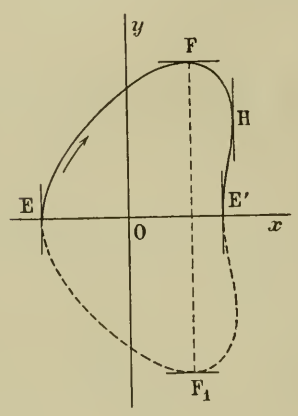


Fig. 2.

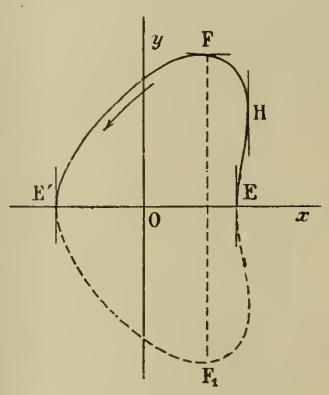


Fig. 3.

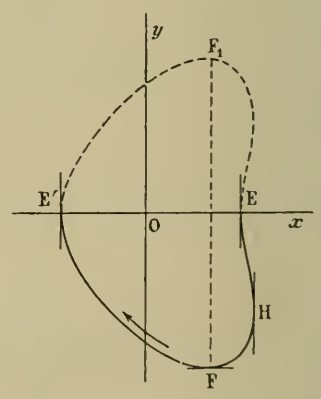


Fig. 4.

Troisième cas : $h = 0$. La section se réduit à la portion de la parabole (P) comprise entre l'axe des y et la droite $x = \frac{k^2}{2p}$.

Quatrième cas : $0 < h < \frac{ak}{p}$. $\frac{dx}{d\varphi}$ s'annule pour la valeur β comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et dont le cosinus est égal à $\frac{hp}{ak}$.

Ce cas peut se subdiviser en deux autres suivant que h est inférieur ou supérieur à a.

Si $h < a$, nous avons le tableau suivant de variation :

φ	0		β		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dx}{d\varphi}$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{kh}{a}$	$-$	0
x	$\frac{kh}{a}$	croît	$\frac{k^2}{2p}+\frac{h^2p}{2a^2}$ *max.*	décroît	$\frac{k^2}{2p}$	décroît	$-\frac{kh}{a}$
$\frac{dy}{d\varphi}$	$k\left(1-\frac{h}{a}\right)$		$+$		0	$-$	$-k\left(1-\frac{h}{a}\right)$
y	0		croît		$k\left(1-\frac{h}{a}\right)$ *max.*	décroît	0

et la figure 3, analogue à la figure 2, mais qui est décrite en sens contraire.

Si $h > a$, y est constamment négatif quand φ croît de 0 à π, on obtient la figure 4.

Cinquième cas : $\frac{ak}{p} \leqslant h < +\infty$. Les points d'inflexion disparaissent ; on obtient la figure 5 pour $h < a$, et la figure 6 pour $h > a$.

Sixième cas : $h = a$. La courbe se réduit à la portion de l'axe des x limitée aux points qui ont

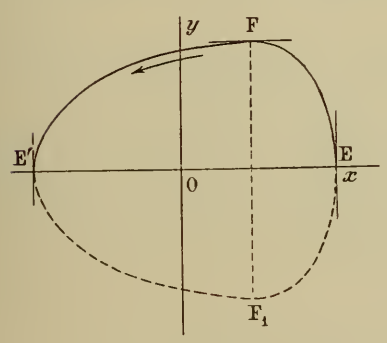


Fig. 5.

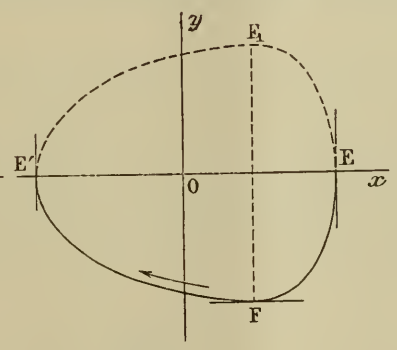


Fig. 6.

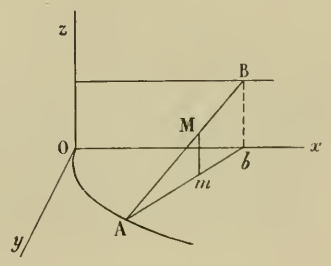


Fig. 7.

pour abscisses $-k$ et $+k$ si $p \geqslant k$, ou aux points qui ont pour abscisses $-k$ et $\frac{k^2}{2p}+\frac{p}{2}$ si $p < k$.

Abaissons Bb perpendiculaire sur Ox (*fig.* 7). Comme $AB = l$, $Bb = a$, nous avons $Ab = k$, ce qui montre que la longueur Ab est constante.

Prenons sur AB le point M qui a pour cote h, et projetons ce point en m sur Ab. Nous avons

$$\frac{\overline{Am}}{\overline{Ab}} = \frac{\overline{mM}}{\overline{bB}}, \qquad \text{ou} \qquad \overline{Am} = \frac{hk}{a}.$$

Si h est constant, le segment $\overline{Am}$ a une valeur algébrique constante, et le point m est lié invariablement à la droite de longueur constante Ab dont les extrémités A et b se déplacent la première sur la parabole (P) et la seconde sur Ox.

D'après une propriété bien connue du centre instantané de rotation, la normale en m au lieu de ce point passe par l'intersection de la normale en A à la parabole (P) et de la perpendiculaire à Ox menée par le point b. On en déduit aisément la construction de la tangente au point m.

Reprenons les coordonnées du point m,

$$x = \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{2p} + \frac{kh}{a} \cos \varphi, \qquad y = k\left(1 - \frac{h}{a}\right) \sin \varphi.$$

On peut les écrire $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \qquad$ en posant

$$x_1 = \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{p}, \qquad x_2 = \frac{2kh}{a} \cos \varphi, \qquad y_1 = y_2 = k\left(1 - \frac{h}{a}\right) \sin \varphi.$$

On voit immédiatement que le point (x_1, y_1) décrit la parabole $y^2 - p\left(1 - \dfrac{h}{a}\right)^2 x = 0$, et que le point (x_2, y_2) décrit l'ellipse

$$\frac{x^2}{\dfrac{4k^2h^2}{a^2}} + \frac{y^2}{k^2\left(1 - \dfrac{h}{a}\right)^2} = 1.$$

2. Nous avons posé $u - \dfrac{t^2}{2p} = k \cos \varphi$, u désignant l'abscisse de B et $\dfrac{t^2}{2p}$ celle de A. Donc l'abscisse de A sera supérieure à celle de B si φ est compris entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π; ce sera le contraire si φ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Si l'on se reporte aux courbes construites précédemment, on voit que les arcs $FE'F_1$ correspondent aux génératrices pour lesquelles l'abscisse de A est supérieure à celle de B, et les arcs FEF_1 aux génératrices pour lesquelles le contraire a lieu.

Les points de séparation sont les points F et F_1 dont le lieu quand h varie est la droite $x = \dfrac{k^2}{2p}$.

3. Pour évaluer le volume du solide considéré nous calculerons d'abord l'aire limitée par la courbe, section de la surface par le plan $z = h$.

Nous avons construit ces courbes; nous désignerons par Σ l'aire limitée par Ox et l'arc EFE' de chacune d'elles. L'aire limitée par la courbe tout entière sera alors égale à 2Σ.

Pour la courbe de la figure 1 nous avons

$$\Sigma = \int_0^\pi y dx,$$

puisque x varie dans le même sens que φ et que y est positif. Si nous remplaçons y et dx par leurs valeurs en fonction de φ, nous avons

$$\Sigma = k^2\left(1 - \frac{h}{a}\right) \int_0^\pi \sin^2 \varphi \left(\frac{k}{p} \cos \varphi - \frac{h}{a}\right) d\varphi.$$

Or

$$\int \sin^2 \varphi \left(\frac{k}{p} \cos \varphi - \frac{h}{a}\right) d\varphi = \frac{k}{p} \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi - \frac{h}{a} \int \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{k}{p} \int \sin^2 \varphi \, d \sin \varphi - \frac{h}{2a} \int (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{k}{p} \cdot \frac{\sin^3 \varphi}{3} - \frac{h}{2a}\left(\varphi - \frac{\sin^2 \varphi}{2}\right).$$

On en déduit immédiatement

$$\int_0^\pi \sin^2 \varphi \left(\frac{k}{p} \cos \varphi - \frac{h}{a}\right) d\varphi = -\frac{\pi h}{2a},$$

et

$$\Sigma = \frac{\pi k^2 h(h - a)}{2a^2}.$$

On trouve le même résultat pour l'aire limitée par la deuxième courbe (*fig.* 2). On a en effet

$$\Sigma = \int_E^H y\,dx - \int_{E'}^H y\,dx = \int_E^H y\,dx + \int_H^{E'} y\,dx = \int_E^{E'} y\,dx = \int_0^\pi y\,dx.$$

Pour la troisième courbe (*fig.* 3) y est positif mais x varie en sens contraire de φ ; on a alors

$$\Sigma = -\int_0^\pi y\,dx = -\frac{\pi k^2 h(h-a)}{2a^2},$$

et pour la quatrième (*fig.* 4), y est négatif, et x varie en sens contraire de φ, donc

$$\Sigma = +\int_0^\pi y\,dx = \frac{\pi k^2 h(h-a)}{2a^2}, \quad \ldots \quad \text{etc.}$$

On a dans tous les cas $$\Sigma = \frac{\pi k^2}{2a^2}\left|h(h-a)\right|.$$

L'aire limitée par la courbe entière est alors $\frac{\pi k^2}{a^2}\left|h(h-a)\right|$, et le volume demandé est

$$V = \frac{\pi k^2}{a^2}\int_{-a}^{2a} |h(h-a)|\,dh,$$

ce qu'on peut écrire

$$V = \frac{\pi k^2}{a^2}\int_{-a}^{0} h(h-a)\,dh - \frac{\pi k^2}{a^2}\int_0^a h(h-a)\,dh + \frac{\pi k^2}{a^2}\int_a^{2a} h(h-a)\,dh,$$

ou, en posant $$\varphi(h) = \frac{h^3}{3} - \frac{ah^2}{2},$$

$$V = \frac{\pi k^2}{a^2}\left[\varphi(0) - \varphi(-a) - \varphi(a) + \varphi(0) + \varphi(2a) - \varphi(a)\right], \quad \text{ou} \quad V = \frac{\pi k^2}{a^2}\left[\varphi(2a) - 2\varphi(a) + 2\varphi(0) - \varphi(-a)\right].$$

On trouve aisément $$V = \frac{11\pi a k^2}{6}.$$

Le contour apparent de la surface (S) sur le plan des zx est le lieu des points de rencontre de ce plan et des tangentes à la surface parallèles à Oy. Ces tangentes sont précisément les tangentes (parallèles à Oy) aux sections de la surface par les plans parallèles au plan des xy, ce sont les tangentes aux points E, E′ et H aux courbes que nous avons construites plus haut.

Les tangentes aux points E et E′ rencontrent le plan xOz aux points

$$x = \pm\frac{kh}{a}, \qquad y = 0, \qquad z = h.$$

Le lieu de ces points quand h varie se compose des deux droites Δ_1 et Δ_2 qui ont pour équations

$$x = \pm\frac{kz}{a}, \qquad y = 0.$$

Ce sont les droites (Δ) qui passent par le sommet de la parabole (P) ; elles font partie tout entières du contour apparent.

Les tangentes aux divers points H rencontrent le plan zOx aux points qui sont définis par les équations

$$\cos\varphi = \frac{pz}{ak}, \qquad x = \frac{k^2\sin^2\varphi}{2p} + \frac{k}{a}z\cos\varphi, \qquad y = 0.$$

Si on élimine φ entre ces équations, on obtient la parabole

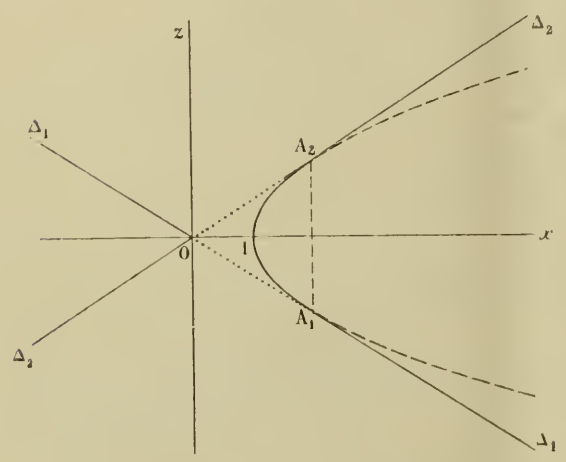
$$x = \frac{k^2}{2p} + \frac{p}{2a^2}z^2, \qquad y = 0,$$

qui n'est autre que l'enveloppe des projections des droites (Δ) sur le plan zOx.

Mais comme $\cos\varphi$ ou $\frac{pz}{ak}$ est compris entre -1 et $+1$, on doit avoir $|z| < \frac{ak}{p}$, ce qui montre que la parabole ne fait pas partie tout entière du contour apparent.

Il faut prendre seulement les points de cette parabole dont les cotes sont comprises entre $-\frac{ak}{p}$ et $+\frac{ak}{p}$.

Les points limites A_1 et A_2 sont précisément les points de contact de cette parabole et des droites Δ_1 et Δ_2.



En résumé, le contour apparent de la surface sur le plan des zx se compose des droites Δ_1 et Δ_2 et de l'arc de parabole A_1IA_2 (*fig.* 8). Les segments de droite OA_1 et OA_2 sont représentés en trait pointillé, parce que cette portion de contour apparent est cachée.

Il n'y a plus qu'à couper ce contour apparent par les droites $z = -a$ et $z = 2a$ pour obtenir celui du solide envisagé dans l'énoncé. On aura différents cas de figure suivant les valeurs relatives des nombres $-a$, $2a$, $\frac{-ak}{p}$ et $\frac{+ak}{p}$.

4. Considérons une droite (Δ) quelconque

$$x = \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{2p} + k \cos \varphi \frac{z}{a}, \qquad y = k \sin \varphi \left(1 - \frac{z}{a}\right);$$

prenons sur cette droite un point M dont la cote z est une fonction inconnue de φ, et cherchons à déterminer cette fonction de façon que la courbe (γ), lieu du point M, rencontre à angle droit la droite Δ pour toutes les valeurs de φ.

Les paramètres directeurs de la tangente en M à la courbe (γ) sont

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{p} - k \sin \varphi \frac{z}{a} + \frac{k \cos \varphi}{a} \cdot \frac{dz}{d\varphi}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = k \cos \varphi \left(1 - \frac{z}{a}\right) - \frac{k \sin \varphi}{a} \cdot \frac{dz}{d\varphi},$$

$$\text{et} \qquad \frac{dz}{d\varphi}.$$

Les paramètres directeurs de la droite (Δ) sont $\alpha = \frac{k \cos \varphi}{a}$, $\beta = -\frac{k \sin \varphi}{a}$, $\gamma = 1$.

Pour que la tangente soit perpendiculaire à (Δ) il faut qu'on ait $\alpha \frac{dx}{d\varphi} + \beta \frac{dy}{d\varphi} + \gamma \frac{dz}{d\varphi} = 0$,

ou

$$\frac{dz}{d\varphi}\left(\frac{k^2}{a^2} + 1\right) + \frac{k^3}{ap} \sin \varphi \cos^2 \varphi - \frac{k^2}{a} \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Cette équation différentielle définit la fonction z.

On en tire

$$dz = \frac{ak^2}{p(a^2 + k^2)} [k \cos^2 \varphi \, d \cos \varphi - p \cos \varphi \, d \cos \varphi],$$

et, en intégrant,

$$z = \frac{ak^2}{p(a^2 + k^2)} \left[k \frac{\cos^3 \varphi}{3} - p \frac{\cos^2 \varphi}{2} + \lambda \right],$$

λ désignant une constante arbitraire.

En joignant cette relation aux équations de (Δ) on obtient les équations paramétriques des trajectoires orthogonales des droites (Δ).

Par le point A dont les coordonnées sont $\frac{k^2 \sin^2\varphi}{2p}$, $k \sin\varphi$, 0 passent deux droites (Δ) correspondant aux valeurs φ et $\pi - \varphi$ du paramètre. Les cosinus de ces angles étant égaux et de signes contraires, les cotes des points de rencontre des deux droites (Δ) considérées et d'une trajectoire orthogonale quelconque sont

$$z_1 = \frac{ak^2}{p(a^2+k^2)}\left[k\,\frac{\cos^3\varphi}{3} - p\,\frac{\cos^2\varphi}{2} + \lambda\right], \qquad z_2 = \frac{ak^2}{p(a^2+k^2)}\left[-k\,\frac{\cos^3\varphi}{3} - p\,\frac{\cos^2\varphi}{2} + \lambda\right];$$

on en déduit

$$z_1 + z_2 = \frac{ak^2}{p(a^2+k^2)}\left[-p\cos^2\varphi + 2\lambda\right] = \frac{ak^2}{p(a^2+k^2)}\left[2\lambda - p + p\sin^2\varphi\right].$$

Si l'on prend $\lambda = \frac{p}{2}$, $z_1 + z_2$ est proportionnel à $\sin^2\varphi$, c'est-à-dire à l'abscisse du point A. Il en est de même de $\overline{AC} + \overline{AC'}$, car si un point C se déplace sur une droite (Δ) le segment $\overline{AC}$ varie proportionnellement à la cote du point C.

Le point de rencontre de (Δ) avec la trajectoire orthogonale correspondant à la valeur λ du paramètre est bien défini par sa cote

$$z = \frac{ak^2}{p(a^2+k^2)}\left[k\,\frac{\cos^3\varphi}{3} - p\,\frac{\cos^2\varphi}{2} + \lambda\right];$$

pour que ce point soit compris entre les points A et B, il faut que la valeur de z soit comprise entre 0 et a, ce qui donne les inégalités

$$(1) \qquad 0 < k\,\frac{\cos^3\varphi}{3} - p\,\frac{\cos^2\varphi}{2} + \lambda < \frac{p(a^2+k^2)}{k^2}.$$

Il s'agit de chercher si l'on peut choisir les constantes données a, p, k de façon qu'il existe une *seule* valeur de λ telle que les inégalités (1) aient lieu *quel que soit* φ.

Nous étudierons les variations de la fonction

$$u = k\,\frac{\cos^3\varphi}{3} - p\,\frac{\cos^2\varphi}{2} + \lambda,$$

quand φ varie de 0 à π.

Nous avons
$$\frac{du}{d\varphi} = \sin\varphi\cos\varphi(p - k\cos\varphi).$$

1° $p > k$. $p - k\cos\varphi$ est toujours positif et $\frac{du}{d\varphi}$ a le signe de $\cos\varphi$.

φ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
u	$\lambda + \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$	croît	λ	décroît	$\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$

Pour que u soit compris entre 0 et $\frac{p(a^2+k^2)}{k^2}$, il faut que son minimum $\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$ soit plus grand que zéro et que son maximum λ soit plus petit que $\frac{p(a^2+k^2)}{k^2}$. On doit donc avoir

$$\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2} > 0, \qquad \lambda < \frac{p(a^2+k^2)}{k^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{k}{3} + \frac{p}{2} < \lambda < \frac{p(a^2+k^2)}{k^2}.$$

Pour qu'il n'existe qu'une seule valeur de λ satisfaisant à ces inégalités, il faut qu'on ait

$$\frac{k}{3} + \frac{p}{2} = p\left(\frac{a^2+k^2}{k^2}\right), \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{2k^3}{3(k^2+2a^2)}.$$

Or cette valeur de p est plus petite que k, ce qui est contraire à l'hypothèse $p > k$. Le problème est donc impossible dans ce cas.

2° $p < k$. $\frac{du}{d\varphi}$ s'annule pour une valeur $\varphi = \alpha$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et définie par l'égalité $\cos\alpha = \frac{p}{k}$.

φ	0		α		$\frac{\pi}{2}$		π
u	$\lambda + \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$	décroît	$\lambda - \frac{p^3}{6k^2}$	croît	λ	décroît	$\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$

Le minimum est $\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$, car $\frac{p}{2} > \frac{p^3}{6k^2}$. Le maximum peut être λ ou $\lambda + \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$.

I. $\frac{k}{3} - \frac{p}{2} < 0$. Le maximum est λ. On doit avoir

$$\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2} > 0, \qquad \lambda < \frac{p(k^2+a^2)}{k^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{k}{3} + \frac{p}{2} < \lambda < \frac{p(k^2+a^2)}{k^2};$$

d'où l'on déduit $\frac{k}{3} + \frac{p}{2} = \frac{p(k^2+a^2)}{k^2}$, et $p = \frac{2k^3}{3(k^2+2a^2)}$;

et ceci est impossible, car on n'a pas $\frac{p}{2} > \frac{k}{3}$.

II. $\frac{k}{3} - \frac{p}{2} > 0$. Le maximum est $\lambda + \frac{k}{3} - \frac{p}{2}$. On doit avoir

$$\lambda - \frac{k}{3} - \frac{p}{2} > 0, \quad \lambda + \frac{k}{3} - \frac{p}{2} < \frac{p(k^2+a^2)}{k^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{k}{3} + \frac{p}{2} < \lambda < -\frac{k}{3} + \frac{p}{2} + \frac{p(k^2+a^2)}{k^2};$$

il faut donc qu'on ait $\frac{k}{3} + \frac{p}{2} = -\frac{k}{3} + \frac{p}{2} + \frac{p(k^2+a^2)}{k^2}$, ou $p = \frac{2k^3}{3(k^2+a^2)}$.

Or cette valeur de p est acceptable, car on a bien $\frac{p}{2} < \frac{k}{3}$.

En résumé, il faut et il suffit que l'on ait

$$p = \frac{2k^3}{3(k^2+a^2)}, \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{2(l^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3l^2}.$$

Assez bonnes solutions de MM. Lach, à Denain et Rousseau, à Amiens.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

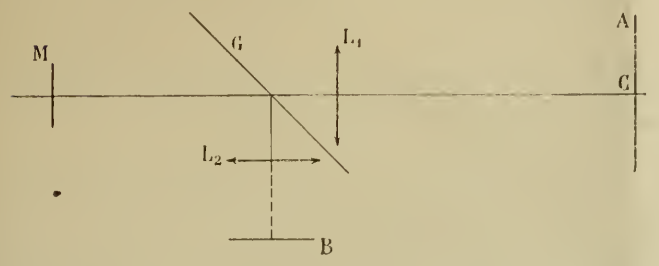
Concours de 1909.

Groupe I.

Physique.

1800. — *Un disque lumineux* A *est placé, perpendiculairement à l'axe, dans le plan focal d'une lentille convergente mince* L_1 *(distance focale* $= 1^m$; *diamètre* $= 3^{cm}$). *A 1 mètre au delà de cette lentille se trouve un miroir plan normal à l'axe,* M *(diamètre* $= 2^{cm}$). *La lumière est renvoyée par* M *sur une grande glace transparente* G *inclinée à* 45° *et qui la réfléchit à son tour sur une lentille convergente* L_2 *(distance focale* $= 1^m$; *diamètre* $= 3^{cm}$) *symétrique de* L_1 *par rapport à* G.

On demande où l'on doit placer une plaque photographique B *pour y obtenir une image du disque* A *; de combien se déplace l'image d'une très petite région entourant le centre* C *du disque* A, *si le miroir* M *tourne d'un angle de* $\frac{1}{100}$ *de radian autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure ; et de quel angle maximum* X *le miroir* M *peut tourner sans que l'on cesse d'obtenir une photographie de* C *(on pourra admettre* tg X = sin X = X). *Quel est le diamètre maximum du disque* A *qui pourra être photographié dans la première position de* M *; quel est le diamètre correspondant de la photographie et quel est, dans l'image* B, *le diamètre de la région de pleine lumière ?*



Si l'on éloignait progressivement le miroir M, *pour quelle distance le diamètre de la région de pleine lumière de* B *serait-il réduit à* 1^{mm} *; l'impression photographique au centre de la plaque resterait-elle constante ou changerait-elle pendant le déplacement du miroir ?*

Le miroir M *étant supposé replacé à* 1 *mètre, on examinera ce qui se passerait si l'on ramenait le disque* A *jusque contre la lentille* L_1. *Dans cette nouvelle position, où se ferait l'image de la petite région* C ; *serait-elle plus grande que tout à l'heure et impressionnerait-elle plus ou moins la plaque photographique ? Aurait-on, enfin, gagné quelque chose soit au point de vue du déplacement de l'image de* C *par la rotation de* $\frac{1}{100}$ *de radian du miroir* M, *soit au point de vue de l'angle maximum* X *dont* M *peut tourner sans que l'image de* C *sorte tout-à-fait du champ ?*

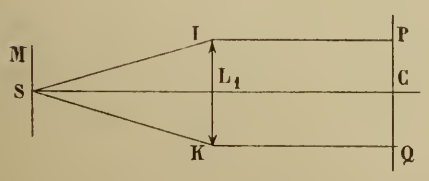
D'une manière générale, la glace G n'ayant d'autre effet que de renvoyer la lumière sur une lentille symétrique de L_1, on peut en faire abstraction et étudier simplement les conditions dans lesquelles la lumière réfléchie par M revient sur la lentille L_1.

1° A l'aller, la lentille L_1 donne de C une image à l'infini ; M laisse cette image à l'infini ; au retour, L_1 en donne une image en C. La plaque B doit donc être placée à 1 mètre de L_2.

2° Les rayons issus de C forment, après avoir traversé L_1, un faisceau parallèle qui revient d'abord sur lui-même. Quand M a tourné de $\frac{1}{100}$ de radian, le faisceau réfléchi a tourné de $\frac{2}{100}$; son axe secondaire de retour dans la lentille L_1 fait un angle $\frac{2}{100}$ avec l'axe et l'image s'est déplacée de

$$\frac{2}{100} \times 100 = 2^{cm}.$$

3° Le faisceau issu du point C, réfracté par la lentille L_1 qui a 3^{cm} de diamètre, couvre toujours complètement le miroir M qui n'a que 2^{cm}. Tant que l'angle de rotation de M est petit, la largeur du faisceau qu'il réfléchit reste sensiblement égale à 2^{cm}. Il faut donc que l'axe de ce faisceau passe à moins de 1^{cm} au-dessous du bord de la lentille L_1 pour que celle-ci reçoive une partie du faisceau. Dans la position limite, l'angle du rayon axial réfléchi avec le rayon incident est donc $\frac{2,5}{100}$ et l'angle dont a tourné le miroir est $\frac{1,25}{100}$ radian.

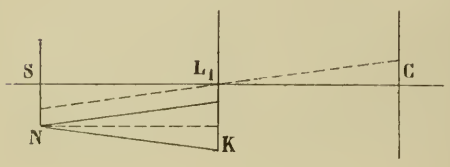


4° Imaginons un point du disque A s'éloignant progressivement du point C. Quand le bord supérieur du faisceau réfléchi par M passera par le bord inférieur K de L_1, le point cessera d'être dans le champ. Or ce rayon, à l'aller, sera passé

par le bord supérieur I de L_1, il se sera donc réfléchi au centre S de M ; ayant la direction IS après avoir traversé L_1, il était à l'origine parallèle à l'axe et provenait d'un point P situé à $1^{cm},5$ de C. Le diamètre maximum cherché est donc de 3^{cm}.

5° Le rayon de retour SK se réfracte en K parallèlement à l'axe et va passer par un point Q symétrique de P et qui sera l'image de P. Le diamètre de la photographie est donc de 3^{cm}.

6° Les points appartenant à la région de pleine lumière sont ceux pour lesquels le faisceau qui traverse au retour la lentille L_1 a toute la largeur de M, comme pour le point C. Le faisceau limite est donc limité inférieurement par le rayon NK, passant par les bords inférieurs de M et de L_1. A l'aller, il a traversé L_1 en un point symétrique par rapport à la normale en N au miroir M, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}$ centimètre de l'axe. Les autres rayons du même faisceau lui sont parallèles ; celui qui passe par le centre optique de la lentille rencontre donc M à $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ centimètre de l'axe et vient d'un point de A situé à une distance x de C telle que $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{L_1C}{L_1S}$, d'où $x = \frac{1}{2}$. Le diamètre de la région de pleine lumière est donc de 1 centimètre.



7° Si, dans l'égalité précédente, nous supposons $x = \frac{1}{20}$ cm., on a $L_1S = 10^m$.

8° Quelle que soit la distance du miroir M, la lumière formant l'image de C est toujours émise dans un cône ayant son sommet en C et rencontrant la lentille L_1 suivant une surface égale à M. L'impression lumineuse reste donc constante.

9° Si le disque A vient sur la lentille L_1, son image dans cette lentille se déplace depuis l'infini jusqu'à la lentille ; l'image fournie par M se déplace symétriquement depuis l'infini à gauche jusqu'en un point symétrique de L_1 par rapport à M et situé, par conséquent, à une distance de L_1 double de sa distance focale. Enfin l'image de retour dans L_1 se déplace vers la droite depuis le point C jusqu'à une position située à 2^m de L_1.

10° Dans la dernière position, les images successives ont les mêmes dimensions que l'objet. Pour les autres positions, l'image de retour est encore égale à l'objet, mais non les images intermédiaires.

11° La lumière qui doit former l'image d'un point est encore émise à l'intérieur d'un cône couvrant la surface de M à la distance d'un mètre et comme l'image a toujours la même grandeur, l'éclairement est resté le même.

12° Quand le point C est sur L_1, son image dans le miroir M est à une distance de l'axe égale à $\frac{1}{50} \times 100$ et l'image de retour est à la même distance, c'est-à-dire à 2^{cm}, comme dans le premier cas examiné.

13° Le faisceau reçu par M est maintenant un faisceau divergent qui revient sur la lentille L_1 avec une largeur double, c'est-à-dire de 4^{cm}. Il faut donc maintenant que l'axe du faisceau réfléchi passe à moins de 2^{cm} du bord de la lentille L_1 et fasse avec l'axe un angle inférieur à $\frac{3,5}{100}$. L'angle X est donc maintenant $\frac{1,75}{100}$ radian.

Groupe II.

Physique.

1802. — *Un condensateur* A *est chargé à* 10 000 *volts. On met ses armatures en communication avec celles d'un condensateur* B *de* 1 *microfarad, qui n'était pas chargé, et la différence de potentiel tombe à* 9 500 *volts. On demande quelle est la capacité du condensateur* A, *et l'on demande d'évaluer l'énergie électrique qui était primitivement disponible dans le condensateur* A, *puis celle qui est actuellement disponible dans le condensateur* A + B.

On réunit les armatures du condensateur double A + B *par une colonne d'eau très légèrement salée, dont la résistance est de* 1 *mégohm* (10^6 *ohms). Quelle est, à l'instant initial, l'intensité du courant qui passe ; et peut-on considérer cette intensité comme constante, à* 1 *pour* 100 *près, pendant le premier vingtième de seconde de la décharge ?*

La masse de la colonne d'eau étant de 1 *gramme, et sa température initiale étant de* 15 *degrés centigrades, quelle serait sa température finale si l'on arrêtait la décharge au bout d'un vingtième de seconde ?*

Soit x la capacité du condensateur A. La quantité d'électricité n'ayant pas changé par la réunion des armatures de A à celles de B, nous aurons

$$10\,000\,x = (10^{-6} + x)\,9\,500,$$

d'où

$$x = 19 \times 10^{-6} \text{ farads} = 19 \text{ microfarads.}$$

La capacité du système est donc de 20 microfarads.

D'une manière générale, l'énergie électrique d'un condensateur a pour expression $\frac{1}{2}CV^2$, V désignant le potentiel.

En appliquant cette formule à l'état primitif du condensateur A, on a

$$W = \frac{1}{2} \times 19 \times 10^{-6} \times \overline{10\,000}^2 = 950 \text{ joules.}$$

De même, pour l'énergie actuellement disponible dans le condensateur A + B, on a

$$W' = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times \overline{9\,500}^2 = 902,5 \text{ joules.}$$

Il y a donc eu, dans la communication, une perte d'énergie de 47,5 joules qui ont été dissipés sous forme de chaleur.

Quand les armatures de A + B sont réunies par une colonne d'eau, l'intensité I_0 du courant qui passe à l'instant initial nous est donnée par la loi d'Ohm

$$I_0 = \frac{E_0}{R} = \frac{9\,500}{10^6} = 0,0095 \text{ ampère.}$$

Puis l'intensité diminue au fur et à mesure que s'accomplit la décharge, car la différence de potentiel entre les armatures va en diminuant.

Supposons l'intensité du courant constante pendant le premier vingtième de seconde de la décharge ; dans cette hypothèse, il se sera écoulé une quantité d'électricité égale à $\frac{1}{20} \times 0,0095 = 0,000475$ coulomb. Or la quantité disponible au début est égale à $20 \times 10^{-6} \times 9\,500 = 0,19$. Il reste donc

$$0,19 - 0,000475 = 0,189525.$$

Cette nouvelle charge diffère de moins de 1 pour 100 de la charge primitive ; il en serait donc de même du nouveau potentiel et, par suite, de la nouvelle intensité, comparés au potentiel et à l'intensité du début. La variation sera, en réalité, moindre que ne l'indique le calcul précédent, puisque l'intensité de la décharge aura été, en réalité, en diminuant.

Supposons donc constante l'intensité du courant. L'énergie calorifique développée pendant le premier vingtième de seconde est donnée par la formule de Joule RI^2T et a ici pour valeur

$$10^6 \times \overline{0{,}00952}^2 \times \frac{1}{20} = 4{,}512 \text{ joules.}$$

Cette énergie équivaut à un nombre de petites calories $\frac{4{,}512}{4{,}19} = 1{,}07$, et cette chaleur échauffera 1 gramme d'eau de $1^\circ{,}07$ à $\frac{1}{100}$ de degré près.

Calcul exact de l'intensité au bout d'un vingtième de seconde. — A un instant quelconque, E désignant le potentiel et Q la charge du condensateur, on a

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Q}{CR} \qquad \text{et} \qquad I = -\frac{dQ}{dt}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{Q}{CR} = -\frac{dQ}{dt}.$$

On en déduit

$$Q = Q_0 e^{-\frac{1}{CR}t} \qquad \text{et par suite} \qquad I = I_0 e^{-\frac{1}{CR}t}.$$

Remplaçons C et R par leurs valeurs :

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{20}t}.$$

Pour $t = \frac{1}{20}$, $I = I_0 e^{-\frac{1}{400}}$, ce qui est sensiblement égal à $I_0\left(1 - \frac{1}{400}\right)$.

Donc l'intensité n'a pas varié à $\frac{1}{400}$ près.

Calcul exact de la chaleur dégagée par le passage du courant. — La formule de Joule donne

$$W = \int_0^t RI^2 dt = RI_0^2 \int_0^t e^{-\frac{1}{10}t} dt = RI_0^2 \left(-10 e^{-\frac{1}{10}t}\right)_0^t = RI_0^2 \times 10\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right).$$

Pour $t = \frac{1}{20}$,

$$W = RI_0^2 \times 10\left(1 - e^{-\frac{1}{200}}\right),$$

ce qui est sensiblement égal à $RI_0^2 \times \frac{1}{20}$. Nous retrouvons ainsi le résultat précédent.

PIERRE SALLERON, à Albi.

Bonne solution de M. André COURTOIS, lycée de Douai.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (1909).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite*).

Mathématiques (M. CLAIRIN).

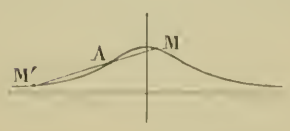
751. — Enveloppe des ellipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pour lesquelles $a + b = k$.

752. — Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = x + \cos x.$$

753. — Lieu des traces sur le plan xoz des tangentes à la biquadratique

$$x^2 + y^2 = 2ax, \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

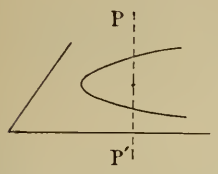


754. — Construire la courbe $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

Chercher les points d'inflexion. Par le point d'inflexion A on mène une sécante variable AMM'. Lieu du milieu de MM'.

755. — Dérivée $n^{\text{ième}}$ de $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

$y^{(n)} = \frac{P_n}{1+x^2}$; étudier P_n, montrer que toutes ses racines sont réelles et établir une formule de récurrence.



756. — Sur la surface $x^2 + y^2 = 2z$ trouver une courbe qui coupe les méridiens sous un angle donné.

757. — Equation générale des paraboloïdes renfermant une parabole et deux points P, P', symétriques par rapport à son plan. Lieu du sommet.

758. — On donne deux cercles O et ω et on considère tous les cercles du plan orthogonaux à l'un d'eux et tangents à l'autre. Trouver le lieu de leurs centres et l'enveloppe de la polaire d'un point fixe P par rapport à ces cercles.

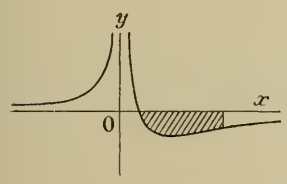
759. — On considère la courbe $\rho = a\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$. Former son équation en coordonnées cartésiennes. Quel est l'ordre de cette courbe? Démontrer qu'elle est unicursale. Construction. Points d'inflexion.

Evaluer l'aire comprise entre la courbe et la perpendiculaire à l'axe polaire au pôle.

Trouver les trajectoires orthogonales quand a varie. Construire l'une d'elles. Points d'inflexion.

760. — On considère deux axes rectangulaires. Une barre AB se déplace de telle façon que A décrit l'axe des x d'un mouvement uniforme et que la vitesse du point B est à chaque instant égale en grandeur à celle de A. Trouver la trajectoire du point B.

761. — On considère l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où les paramètres a et b varient de telle façon que $a + b = k$. Enveloppe de l'ellipse. On trouve une hypocycloïde à quatre rebroussements. Comment passer de la développée d'ellipse à cette hypocycloïde? Ordre et classe de l'hypocycloïde. Propriétés de la tangente.



762. — Construire la courbe

$$x^2y + a^2x = \lambda.$$

Montrer qu'il existe deux courbes tangentes à une droite du plan. Dans quel cas les points de contact sont-ils réels; confondus? Interprétation géométrique. Evaluation de l'aire couverte de hachures.

763. — Démontrer que la surface

$$y^2z^2 + 2kxyz + k^2x^2 + 2ak^2y = 0$$

est une surface réglée.

Trouver les traces et les contours apparents de cette surface sur les plans de projection.

Intersection de la surface et du cylindre

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

On considère les paraboles qui ont pour équation, dans le plan xoy,

$$y^2z_0^2 + 2kxyz_0 + k^2x^2 + 2ak^2y = 0.$$

Démontrer qu'elles sont osculatrices à l'origine au cercle

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

et trouver le lieu de leurs foyers.

764. — Combien par un point de l'espace passe-t-il de droites de la congruence

$$x = uz - v, \qquad y = vz - \frac{u^3}{3}?$$

Démontrer que ces droites ont une enveloppe dans le cas où

$$v = \pm\frac{u^2}{2} + \lambda, \qquad (\lambda \text{ désignant une constante})$$

et dans ce cas seulement.

765. — On considère un cylindre de révolution et une courbe (Γ) sur ce cylindre. Déterminer (Γ) de telle façon que l'aire latérale du cylindre comprise entre une section droite, deux génératrices et la courbe (Γ) soit proportionnelle à l'arc de cette courbe. Rectification de (Γ).

766. — Trouver sur un cylindre de révolution d'axe Oz une courbe C telle qu'entre l'arc s et la cote z d'un point (l'origine des arcs étant convenablement choisie) on ait

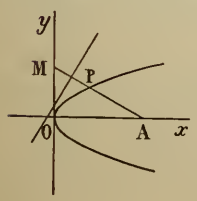
$$s^2 + k^2 = z^2.$$

Démontrer que les tangentes à cette courbe sont tangentes à une même sphère.

767. — Mouvement d'un point soumis à une résistance proportionnelle à la racine carrée de la vitesse; distance de la position initiale au point d'arrêt. Calculer le travail de la résistance pendant le mouvement.

Mathématiques (M. Dulac).

768. — Un point se meut sur la courbe $\rho = a(1 + \cos\omega)$ suivant la loi des aires autour de l'origine. Hodographe; loi du mouvement.



769. — Par un point fixe A de l'axe de la parabole $y^2 = 2px$, on fait passer une sécante variable qui rencontre la parabole et la tangente au sommet en P et M. Enveloppe de la perpendiculaire à PM en son milieu.

770. — Limite supérieure du reste de la série $u_n = \frac{1}{n^2}$

(*A suivre.*)

CONCOURS DE 1909 (*Suite*).

CONCOURS D'ADMISSION DES AGENTS DES POSTES AUX COURS DE L'UNIVERSITÉ

Mathématiques.

I. — **1862**. Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la courbe $x^2 - y^2 - 1 = 0$ située dans le plan des xy. Par chaque point P de la branche comprise dans l'angle xOy, on mène parallèlement à Oz et dans le sens Oz, un vecteur PM égal à l'aire S limitée par la courbe et par les droites Ox et OP. Le lieu de M est une courbe C.

1° Exprimer les coordonnées de P au moyen des fonctions hyperboliques de S.

2° Former les équations du plan normal et du plan osculateur au point M de la courbe C. Ce dernier plan coupe Oz en un point Q. Déterminer la surface engendrée par la droite QM.

3° Calculer le rayon de courbure de la courbe C en fonction de l'abscisse.

4° Construire la projection C_1 de la courbe C sur le plan xOz, et évaluer l'aire comprise entre Ox, la courbe C_1 et la parallèle à Oz qui coupe C_1 en un point dont la cote z est $\frac{1}{2}$. Calculer cette aire au moyen d'une série avec trois chiffres décimaux exacts et justifier de l'approximation obtenue.

II. — **1863**. Dans un plan vertical se trouve une ellipse dont les demi-axes sont égaux à 1 et à $\sqrt{3}$, ce dernier étant horizontal. Sur cette courbe peut se mouvoir sans frottement un point M pesant, soumis à une force attractive F qui émane du point C, sommet le plus élevé de l'ellipse. La force F est proportionnelle à la distance CM, et serait égale à la moitié du poids du point M si celui-ci était placé au centre de la courbe. Trouver les positions d'équilibre du point M, et, pour chacune d'elles, déterminer la réaction de la courbe.

(*22 juin.*)

Chimie.

I. —Peroxyde d'azote.

II. — **1864**. On a un mélange de chlorure de sodium et de chlorhydrate d'ammoniaque. On en prend $1^g,350$ que l'on met dans un petit ballon et l'on ajoute un excès de soude caustique. Ce ballon est relié à un vase approprié contenant 10 centimètres cubes d'acide sulfurique titré à 49^g par litre. On chauffe le ballon pendant un temps suffisant pour que tout l'ammoniaque se dégage; ce gaz est retenu par l'acide sulfurique.

Une fois l'opération terminée, on constate que l'acide n'a pas été entièrement neutralisé ; pour le neutraliser complètement il faut lui ajouter 3^{cm3}, 7 d'une liqueur alcaline.

Sachant que $25^{cm3},5$ de cette même liqueur neutralisent 10^{cm3} de l'acide sulfurique titré à 49^g par litre, on demande quelle est la quantité de chlorhydrate d'ammoniaque qui se trouve dans 100^g du mélange des deux chlorures.

On donne les poids atomiques suivants :

$H = 1$, $Az = 14$, $O = 16$, $S = 32$, $Cl = 35,5$.

(*22 juin, de 3 h. à 5 h.*)

Physique.

I. — Prisme. Déviation minimum. Aplanétisme.

II. — Densité des gaz. Poids du litre d'air.

(*23 juin, de 3 h. à 5 h.*)

QUESTION PROPOSÉE

1865. — Un paraboloïde hyperbolique équilatère a pour sommet le point de cote 10^{cm} et d'éloignement 10^{cm} projeté sur le grand axe de la feuille ; une parabole principale P est horizontale et son foyer de cote 10^{cm} et d'éloignement 10^{cm} est situé à $1^{cm},5$, à droite du sommet.

Un second paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur un plan de profil ; il admet pour génératrices rectilignes : 1° l'axe du premier paraboloïde ; 2° une horizontale de cote 13^{cm}, dont la projection sur le plan de la parabole P rencontre l'axe de cette parabole à 3^{cm} à gauche du sommet et la tangente au sommet à 3^{cm} en avant du sommet.

On considère, d'une part, la région A de l'espace limitée par le premier paraboloïde et qui correspond à

l'intérieur de la parabole P; d'autre part la région B de l'espace limitée par le second paraboloïde et qui correspond à la partie du plan horizontal de cote 10^{cm} située en avant de l'axe du premier paraboloïde.

Représenter le solide limité par les deux paraboloïdes, par les plans horizontaux de cotes 17^{cm} et 2^{cm} et par le plan de profil situé à 10^{cm} à droite du sommet du premier paraboloïde, la partie solide étant à la fois dans les régions A et B.

On supposera les plans de projection transparents.

(*Agrégation des Sciences mathématiques, épreuves pratiques, 1909.*)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires*).

Concours de 1909.

1812. — *Soient les équations*

$$a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} + a_3\sqrt{x_3 - x} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0,$$
$$a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} - a_3\sqrt{x - x_3} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0,$$
$$a_1\sqrt{x_1 - x} - a_2\sqrt{x - x_2} - a_3\sqrt{x - x_3} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0,$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3, x_4$ *sont des constantes supérieures à* 0 *et* $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$.

1° *Démontrer que, parmi ces trois équations, il y en a toujours une et une seule ayant une racine réelle, d'ailleurs unique.*

2° *Indiquer la condition pour que cette racine appartienne à l'une de ces équations choisie à priori.*

3° *Calculer cette racine à un centimètre près quand* $a_1 = a_3 = a_4 = \frac{a_2}{2}$, $x = 10^m$, $x_2 = 9^m$, $x_3 = 7^m$, $x_4 = 6^m$.

P. S. — Si le temps le permet, on pourra essayer d'indiquer une généralisation de la question I.

1° Désignons par $f(x)$ le premier membre de la première équation, de même par $g(x)$ le premier membre de la seconde et par $h(x)$ celui de la troisième.

Nous allons voir que chaque équation ne peut avoir qu'une seule racine en étudiant le signe de la dérivée. Remarquons d'abord que les radicaux considérés sont par définition positifs, abstraction faite du coefficient et du signe extérieur qu'ils peuvent avoir. Nous supposons de plus que les valeurs considérées de x non seulement sont réelles, mais encore rendent positives les quantités placées sous les radicaux.

La dérivée de $f(x)$ est

$$f'(x) = \frac{-a_1}{2\sqrt{x_1 - x}} + \frac{-a_2}{2\sqrt{x_2 - x}} + \frac{-a_3}{2\sqrt{x_3 - x}} - \frac{a_4}{2\sqrt{x - x_4}};$$

elle est toujours négative. Donc $f(x)$ décroît constamment et ne peut avoir au maximum qu'une racine. D'ailleurs les valeurs limites que peut prendre x sont x_4 et x_3, les quantités $x_1 - x$, $x_2 - x$, $x_3 - x$ et $x - x_4$ devant être toutes positives. Pour savoir si effectivement il y a une racine, il suffira de chercher les signes de $f(x_4)$ et de $f(x_3)$:

$$f(x_4) = a_1\sqrt{x_1 - x_4} + a_2\sqrt{x_2 - x_4} + a_3\sqrt{x_3 - x_4}, \qquad f(x_3) = a_1\sqrt{x_1 - x_3} + a_2\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_3 - x_4}.$$

On voit que $f(x_4)$ est toujours positif. Donc $f(x)$ aura une racine et une seule comprise d'ailleurs entre x_3 et x_4 si $A = f(x_3)$ est négatif.

Si nous considérons maintenant la seconde équation : $g(x) = 0$, le calcul de la dérivée, de tous points identique au précédent, montre que $g'(x)$ est toujours négatif et que par suite $g(x)$ ne peut avoir qu'une seule racine. De plus x devant ici être compris entre x_2 et x_3 puisque les quantités $x_1 - x$,

$x_2 - x$, $x - x_3$, $x - x_4$ placées sous des radicaux doivent être positives, on est conduit ici encore à chercher les signes de $g(x_3)$ et de $g(x_2)$:

$$g(x_3) = a_1\sqrt{x_1 - x_3} + a_2\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_3 - x_4}, \qquad g(x_2) = a_1\sqrt{x_1 - x_2} - a_3\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_2 - x_4}.$$

Il y aura une racine acceptable si $g(x_3)$, d'ailleurs égal à $f(x_3)$ ou A, et $B = g(x_2)$ sont de signes contraires. Mais on a $A > B$, car $g(x)$ va en décroissant quand x croît de x_3 à x_2; il faudra donc avoir $A > 0$ et $B < 0$.

$g(x)$ aura donc une racine et une seule, d'ailleurs comprise entre x_2 et x_3 si A est positif et B négatif.

On verra de même que $h(x)$ a une dérivée toujours négative et que x doit être compris entre x_2 et x_1, qui donnent les résultats de substitution

$$h(x_2) = a_1\sqrt{x_1 - x_2} - a_3\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_2 - x_4}, \qquad h(x_1) = -a_2\sqrt{x_1 - x_2} - a_3\sqrt{x_1 - x_3} - a_4\sqrt{x_1 - x_4}.$$

$h(x_2)$ est égal à $g(x_2)$ ou B et $h(x_1)$ est toujours négatif. Donc $h(x)$ a une racine et une seule, comprise d'ailleurs entre x_1 et x_2, si B est positif.

On voit que toute la discussion porte sur le signe de A et B, ce qui donne les trois cas suivants, en remarquant comme nous l'avons déjà fait que $A > B$:

1° $A < 0.f(x) = 0$ est la seule équation ayant une racine acceptable, racine comprise entre x_3 et x_4.

2° $A > 0$ et $B < 0.g(x) = 0$ est la seule équation ayant une racine acceptable, racine comprise entre x_2 et x_3.

3° $B > 0.h(x) = 0$ est la seule équation ayant une racine acceptable, racine comprise entre x_1 et x_2.

2° Cette racine unique appartient donc à $f(x) = 0$ si l'on a $A < 0$, ou

$$a_1\sqrt{x_1 - x_3} + a_2\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_3 - x_4} < 0.$$

Elle appartient à $g(x) = 0$ si l'on a $A > 0$ et $B < 0$ ou

$$a_1\sqrt{x_1 - x_3} + a_2\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_3 - x_4} > 0, \qquad a_1\sqrt{x_1 - x_2} - a_3\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_2 - x_4} < 0.$$

Enfin elle appartient à $h(x) = 0$ si l'on a $B > 0$, ou

$$a_1\sqrt{x_1 - x_2} - a_3\sqrt{x_2 - x_3} - a_4\sqrt{x_2 - x_4} > 0.$$

Ces conditions permettent de choisir à priori l'équation qui doit admettre la seule racine réelle que peut avoir l'ensemble des trois équations.

3° *Application numérique.* — La valeur de x ne change pas si l'on remplace les lettres a par des quantités proportionnelles. Nous pourrons prendre ici $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 1$; $a_4 = 1$ de façon à avoir des valeurs entières simples. Calculons A et B ; on trouve

$$A = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 1, \qquad B = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

On voit que A est positif et B négatif ; donc la racine d'ailleurs comprise entre $x_3 = 7^m$ et $x_2 = 9^m$ appartient à l'équation $g(x) = 0$, qui est ici

$$\sqrt{10 - x} + 2\sqrt{9 - x} - \sqrt{x - 7} - \sqrt{x - 6} = 0.$$

On calcule la racine cherchée par les méthodes générales d'approximation. On trouve que la racine est comprise entre 8, 4 et 8, 5. Comme $g''(x)$ est positif, on applique la méthode des parties proportionnelles à 8,5 et la méthode de Newton à 8,4 et l'on trouve dans le premier cas 8,432... et dans le second 8,433..., d'où avec l'approximation demandée la valeur de la racine :

$$x = 8^m,43.$$

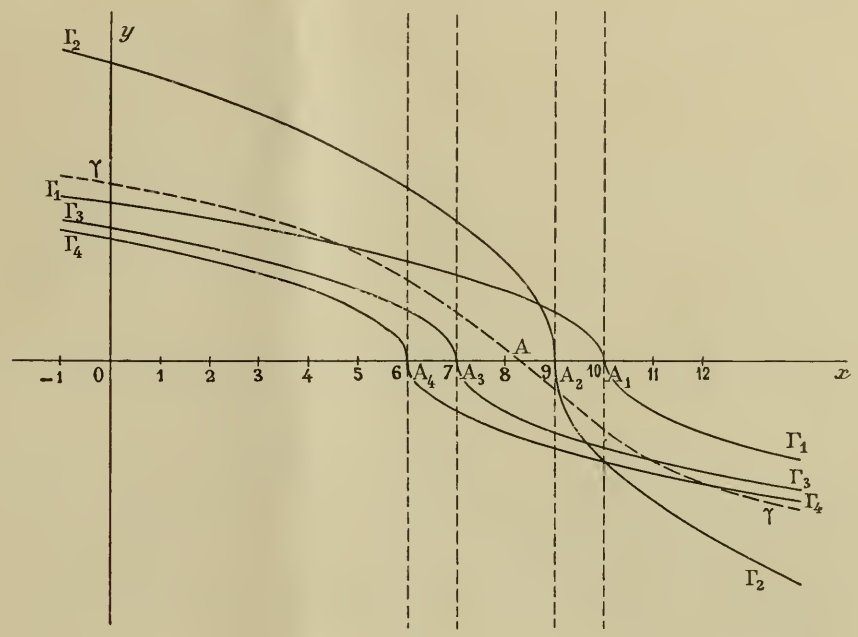
Solution géométrique. — La solution géométrique qui suit est identique, si on la considère avec attention, à la solution analytique qui précède. Cependant elle peut être intéressante par la façon différente dont elle présente la question et par la solution graphique qu'elle permet d'obtenir.

Construisons la courbe (Γ_1) d'équation $y = a_1\sqrt{x_1 - x}$ pour des abscisses $x_1 > x$ et d'équation $-y = a_1\sqrt{x - x_1}$ pour des abscisses $x > x_1$. Elle est formée comme on le voit de deux demi-paraboles égales raccordées en A_1. On construira de même (Γ_2) d'équations $y = a_2\sqrt{x_2 - x}$ pour $x_2 > x$ et $-y = a_2\sqrt{x - x_2}$

pour $x > x_2$, courbe formée de deux demi-paraboles raccordées en A_2, puis (Γ_3) et enfin (Γ_4) avec des définitions analogues. (La figure a été faite avec les hypothèses numériques de l'application que l'énoncé demandait de traiter.)

Construisons pour chaque abscisse le centre des moyennes distances des quatre points de (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) et (Γ_4) qui ont même abscisse, c'est-à-dire que si y_1, y_2, y_3 et y_4 sont les quatre ordonnées des quatre courbes Γ correspondant à la valeur x de l'abscisse, le point considéré a pour ordonnée :

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$



On a tracé en pointillé le lieu de ce point ; nous allons étudier les propriétés de ce lieu. On voit que l'ordonnée de l'une quelconque des courbes (Γ) va constamment en diminuant, il en est donc par suite de même de la courbe (γ) lieu du point (x, y). Cette courbe ne pourra donc couper Ox qu'en un seul point visiblement compris entre A_1 et A_4. Cherchons la relation qui existe entre l'ordonnée y d'un point de (γ) et les équations proposées. En se reportant à la définition de chacune des courbes (Γ) on verra que pour des abscisses comprises entre A_4 et A_3 on a : $4y = f(x)$; pour des abscisses comprises entre A_3 et A_2 on a $4y = g(x)$; et enfin pour des abscisses comprises entre A_2 et A_1 on a $4y = h(x)$. On voit donc que (γ) ayant un seul point de rencontre avec Ox, il y a une seule racine pour les trois équations données.

Pour résoudre graphiquement le problème posé, il faut faire la figure pour les valeurs numériques données, puis chercher par tâtonnement le point A de la courbe sur Ox. Son abscisse donne la valeur cherchée.

Généralisation. — La généralisation est immédiate aussi bien par la géométrie que par le calcul ; nous nous bornerons à donner l'énoncé, la démonstration étant de tous points identique à la précédente :

On considère les équations :

$$a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} + \cdots + a_{n-1}\sqrt{x_{n-1} - x} - a_n\sqrt{x - x_n} = 0,$$
$$a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} + \cdots - a_{n-1}\sqrt{x - x_{n-1}} - a_n\sqrt{x - x_n} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1\sqrt{x_1 - x} - a_2\sqrt{x - x_2} - \cdots - a_{n-1}\sqrt{x - x_{n-1}} - a_n\sqrt{x - x_n} = 0,$$

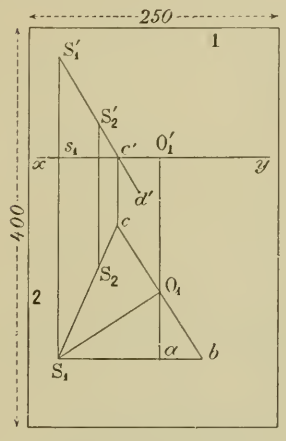
où $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *sont des constantes positives et* $x_1 > x_2 > \ldots, > x_{n-1} > x_n$. *Parmi ces équations il y en a toujours une et une seule ayant une racine réelle, d'ailleurs unique.*

Pour savoir à priori quelle équation admet cette racine, on forme les nombres A, B, C, définis comme précédemment A et B l'étaient, et l'on cherche le premier changement de signe de cette suite de nombres. On en déduira sans peine le rang de l'équation à prendre.

Bonnes solutions : MM. A. Courtois, à Douai ; Hugon, lycée Louis-le-Grand.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de 1909.*)

1826. — *Intersection de deux cônes ayant une génératrice commune et coupés par le plan horizontal suivant des cercles.*



Cadre 250 × 400 *millimètres.*

Données
- S'_1 *à* 30mm *des côtés* 1 *et* 2.
- $S'_1 s_1 = 100^{mm}$.
- $s_1 S_1 = 200^{mm}$ ($S_1 ab$ *parallèle à* xy).
- $S_1 a = 100^{mm}$.
- $a O_1 = 65^{mm}$ ($O_1 b$ *perpendiculaire à* $S_1 O_1$).

Le premier cône a pour sommet S_1, S'_1 *et pour directrice le cercle de centre* O_1, O'_1 *et de rayon* $O_1 b$, *situé dans le plan* xy.

On trace le diamètre bO_1c *et la génératrice* S_1c, S'_1c'.

Le second cône est un cône de révolution à axe vertical, ayant en commun avec le premier la génératrice S_1c, S'_1c'. *Sa section par le plan* xy *est un cercle ayant pour rayon* $S_2c = 45^{mm}$.

Les génératrices du cône de révolution sont prolongées dans les deux sens ; autrement dit il s'agit du solide formé par la réunion de ces deux cônes de révolution opposés par leur sommet commun S_2, S'_2.

On demande de représenter en faisant la distinction des parties vues et cachées :

1° *En projection horizontale, ce qui reste du cône* S_1, *limité à sa partie inférieure par le plan horizontal* xy, *quand on suppose enlevée la partie comprise à l'intérieur du double cône* S_2 ;

2° *En projection verticale le solide commun au cône* S_1 *et au double cône* S_2. *Ce solide commun sera limité à sa partie inférieure par un plan horizontal passant par le point* d', *symétrique de* S'_1 *par rapport à* S'_2.

On reproduira à l'encre (traits noirs discontinus ou traits continus de couleur) la construction de l'asymptote, celle d'un point courant de l'intersection avec la tangente, ainsi que celles de tous les points remarquables avec les tangentes.

L'emploi du pistolet pour le tracé des courbes est interdit. Cadre à l'encre. Titre : Intersection de cônes.

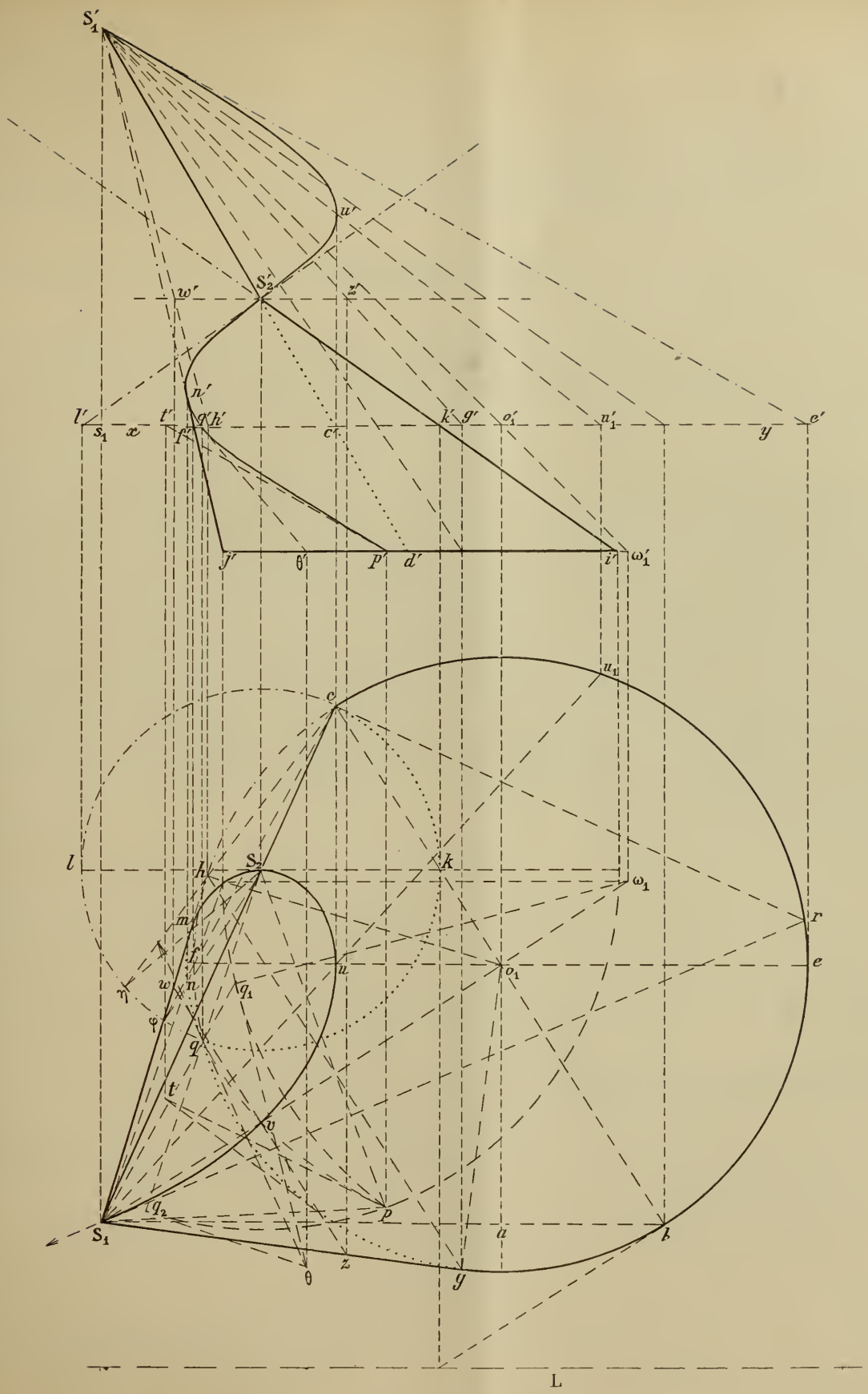
On a immédiatement les deux contours apparents du cône S_1 qui se compose en projection verticale des génératrices S'_1e' et S'_1f' et en projection horizontale des génératrices S_1g et S_1h tangentes au cercle de base. Le cône S_2 n'a pas de contour apparent horizontal et son contour apparent vertical se compose des deux génératrices S'_2k' et S'_2l'.

Chacun des cônes ayant son sommet sur la surface de l'autre, l'intersection des deux surfaces présente un point double réel en chacun des points S_1 et S_2 de la génératrice commune et les tangentes en ces points sont pour le point S_2 par exemple les génératrices suivant lesquelles le plan tangent au cône S_1 au point S_2 coupe le second cône ; l'une d'elles est donc la génératrice commune et l'autre la génératrice lS_2k qui se projette sur le diamètre de front de la base, puisque la tangente en c au cercle o_1 étant perpendiculaire à o_1Kc passe par le point l diamétralement opposé au point k, ce qui dispense de la tracer.

En projection verticale la tangente en S'_2 sera donc la génératrice $l'S'_2$ et la courbe présentera en ce point une inflexion puisqu'elle passe d'une nappe du cône S_2 sur l'autre.

Pour obtenir la courbe d'intersection des deux surfaces, nous ferons tourner un plan auxiliaire autour de la génératrice commune. Sa trace horizontale passera par le point fixe c et coupera les deux bases en deux autres points qui détermineront sur chaque cône une seconde génératrice ; l'intersection de ces génératrices donnera un point de la courbe cherchée. Nous chercherons ainsi tout d'abord les points remarquables : sur le contour apparent horizontal le plan auxiliaire $ch\eta$ nous donnera le point m et sur le contour apparent vertical le plan auxiliaire $cf\varphi$ nous donnera le point n projeté verticalement en n'. La courbe passe au point d'intersection q des deux bases et nous avons construit la tangente en ce point en prenant les traces des plans tangents à chaque cône le long de la génératrice qui y passe, sur le plan horizontal d'. La base du cône S_1 sur ce plan est la circonférence de rayon $\omega_1 q_1$ et celle du cône S_2 est le cercle S_2q_2 ; leurs tangentes en q_1 et q_2 se coupent en 0 et la tangente cherchée est la droite $0q$ dont la projection verticale $0'q'$ donnera la tangente en q' à la projection verticale de la courbe.

Nous avons aussi construit la tangente au point p, p' où les deux cercles ω_1 et S_2q_2 se coupent, et dont la projection verticale $p't'$ est seule utile, puisqu'on limite la projection horizontale au plan xy. Nous avons toutefois tracé



Échelle : $\frac{2}{3}$.

en trait mixte la portion de courbe pq qui ne doit pas rester sur la projection horizontale et qui est tangente en p à la droite pt.

La projection horizontale de la courbe est tangente en S_1 à la génératrice S_1r suivant laquelle le plan tangent au cône S_2 le long de la génératrice commune coupe le cône S_1, et la projection verticale est tangente en S'_1 à la projection verticale de cette génératrice que nous n'avons pas tracée parce qu'elle se confond sensiblement avec S'_1e'.

On achève le tracé de la courbe en construisant quelques points courants, mais on doit remarquer en projection horizontale un point double v situé sur la droite d'intersection $(wz, w'z')$ des plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux cônes.

Asymptote. — La courbe admet une asymptote parallèle à la direction des génératrices parallèles sur les cônes S_1 et S_2. La similitude des deux triangles isocèles S_2ck et S_1cb nous montre que ces génératrices sont S_2k et S_1b. L'asymptote est donc l'intersection L des plans tangents aux deux cônes le long de ces génératrices ; en projection verticale c'est la génératrice S'_2k' elle-même, puisque le plan tangent correspondant est de bout.

Projection horizontale. — Quand on enlève au cône S_1 toute la partie intérieure au cône S_2 il reste sur la partie vue en projection horizontale la surface limitée par le contour $S_1mS_2S_1$ d'une part et la surface limitée par le contour $S_1uS_2cegS_1$. Ces deux contours sont donc entièrement vus. La portion de surface S_2chqmS_2 est enlevée, et avec elle l'arc cq de la base du cône S_1. Le cône S_2 découpe à l'intérieur du cône S_1 une cavité qui a pour base l'arc ckq caché par la partie solide du cône S_1 située entre les deux nappes du cône S_2 dont la nappe supérieure sort du cône S_1 par l'arc de courbe S_2uS_1. On en déduit ainsi la ponctuation indiquée sur l'épure.

Projection verticale. — Le solide commun aux deux cônes occupe précisément toute la cavité dont il était question précédemment dans le cône S_1. Il est limité par la portion de surface formée par toutes les génératrices du cône S_1 qui sont intérieures au cône S_2 d'une part, et toutes les génératrices du cône S_2 qui sont intérieures au cône S_1 d'autre part, ces génératrices étant limitées par leurs points de sortie de la seconde surface.

Nous obtenons ainsi sur la nappe supérieure du cône S_2 la surface comprise entre la génératrice commune $S'_2S'_1$ et la courbe $S'_2u'S'_1$; cette surface est vue, tandis que la surface du cône S_1 limitée par le même contour est cachée, puisqu'elle se projette horizontalement à l'intérieur du contour S_1ecfS_1. Sur la nappe inférieure du cône S_2 nous avons la surface limitée par le contour $S'_2d'i'p'n'S'_2$ dont la portion $S'_2d'i'S'_2$ est cachée, et la surface $S'_2d'j'p'n'S'_2$ du cône S_1 dont le contour est entièrement vu à l'exception de la génératrice S'_2d'.

Bonnes épures : MM. Lach, à Denain ; Rousseau, à Landrecies.

QUESTION PROPOSÉE

1866. — 1° Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le polynome

$$f(x) \equiv x^4 + \lambda x^3 - x^2 - 2x + 2$$

est de la forme

$$(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q^2),$$

la différence des deux trinomes étant égale à $4x + 1$.

2° On prendra pour λ la racine moyenne de l'équation en λ ainsi formée et on calculera

$$F(x) = \int \frac{x^3 + 4}{f(x)}\, dx.$$

3° Montrer qu'en retranchant de $F(x)$ une expression de la forme $AL\,|\,x\,|$, cette fonction reste finie, quand x est infini. Calculer A.

4° On considère la fonction

$$g(x) = \frac{x^3 + 4}{f(x)} - \frac{A}{x};$$

calculer

$$\int_2^{\infty} g(x)dx.$$

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Juillet 1910. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES SURFACES RÉGLÉES DU TROISIÈME ORDRE

par M. **Gaston Cotty**, élève à l'école normale supérieure.

Dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (Juin 1907), M. Parrod a traité la représentation paramétrique des surfaces réglées du troisième ordre. Je crois qu'une petite erreur y a été faite. Ces surfaces ont bien toutes une droite double D et une droite simple Δ, mais ces deux directrices peuvent être confondues. C'est le cas des surfaces réglées du troisième ordre appelées quelquefois surfaces de Cayley. Ces surfaces ne peuvent rentrer dans la catégorie des surfaces étudiées par M. Parrod. Mais ce qui est plus grave, c'est que ces surfaces de Cayley sont telles que les coordonnées d'un point s'expriment rationnellement à l'aide des premiers membres des équations de quatre coniques passant par un point fixe. La généralisation qui termine la Note précitée semble donc inexacte.

Au lieu de reprendre le calcul de M. Parrod, rendons-nous compte géométriquement de l'existence de ces surfaces de Cayley et de leur omission.

Pour que la généralisation soit exacte, il faudrait évidemment qu'étant données à l'avance quatre coniques passant par un point fixe, on puisse toujours trouver un triangle de référence tel que quatre coniques du faisceau ponctuel du troisième ordre défini par les quatre coniques données, aient pour équations

$$\alpha\gamma = 0, \qquad \beta\gamma = 0, \qquad b\alpha^2 + a\alpha\beta = 0, \qquad \beta^2 - h^2\alpha^2 + \alpha = 0,$$

ou bien

$$\alpha\gamma = 0, \qquad \beta\gamma = 0, \qquad b\alpha^2 + a\alpha\beta + \alpha = 0, \qquad \beta^2 - h^2\alpha^2 = 0.$$

On voit de suite que, dans les deux cas, les coniques $\alpha\gamma = 0$, $\beta\gamma = 0$, $b\alpha^2 + a\alpha\beta = 0$, $\beta^2 - h^2\alpha^2 = 0$ devront appartenir au faisceau. C'est visiblement la condition nécessaire et suffisante pour que le calcul soit exact.

Ceci posé, cherchons les coniques du faisceau réduites à une droite double. Il nous faut, pour cela, déterminer quatre nombres A, B, C, D tels que l'on ait identiquement

$$A\alpha\gamma + B\beta\gamma + C(b\alpha^2 + a\alpha\beta) + D(\beta^2 - h^2\alpha^2) \equiv (m\alpha + n\beta)^2,$$

a droite double passant nécessairement par le point fixe $(\alpha = 0, \ \beta = 0)$. Ceci exige que l'on ait

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad bC - Dh^2 = m^2, \qquad aC = 2mn, \qquad D = n^2,$$

d'où, pour déterminer m et n, l'équation du second degré $am^2 - 2bmn + ah^2n^2 = 0$.

Si $b^2 - a^2h^2 \neq 0$, il y aura deux droites doubles distinctes ;

si $b^2 - a^2h^2 = 0$, ces deux droites seront confondues.

Reportons-nous alors aux équations des quatre coniques données.

On voit aisément que ces quatre coniques passent par deux points fixes $(\alpha = 0, \ \beta = 0)$ et $(\gamma = 0, \ a\beta + b\alpha = 0)$.

Il est donc bien évident qu'on ne peut ramener à la forme

$$A\alpha\gamma + B\beta\gamma + C(b\alpha^2 + a\alpha\beta) + D(\beta^2 - h^2\alpha^2) = 0$$

qu'un faisceau ponctuel du troisième ordre ayant les propriétés suivantes :

1° Les coniques passent par un point fixe et les deux droites doubles sont distinctes ou bien

2° Les coniques passent par deux points fixes (cas des surfaces du second degré).

Il y a des faisceaux ponctuels du troisième ordre n'ayant pas ces propriétés. Pour le voir étudions les droites d'un tel faisceau. De cette étude, déjà intéressante en elle-même, nous déduirons la représentation des surfaces réglées du troisième ordre.

Etude des droites d'un faisceau ponctuel du troisième ordre.

I. Coniques réduites a deux droites. — Soient $\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\varphi_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, $\varphi_4(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ les quatre coniques de base.

Si $$\varphi_i(\alpha, \beta, \gamma) = a_i\alpha^2 + b_i\beta^2 + 2c_i\beta\gamma + 2d_i\alpha\gamma + 2e_i.\alpha\beta, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$
l'une des droites passera nécessairement au point $(\alpha = 0, \ \beta = 0)$; ce sera $m\alpha + n\beta = 0$; l'autre sera quelconque, $p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$.

Nous devrons pouvoir déterminer A, B, C, D tels que l'on ait identiquement
$$A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3 + D\varphi_4 = (m\alpha + n\beta)(p\alpha + q\beta + r\gamma).$$
Donc $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + Da_4 = mp$, $Ab_1 + Bb_2 + Cb_3 + Db_4 = nq$, $Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 + Dc_4 = \frac{nr}{2}$,
$$Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 + Dd_4 = \frac{mr}{2}, \qquad Ae_1 + Be_2 + Ce_3 + De_4 = \frac{mq + np}{2}.$$

Ceci exige que l'on ait
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & mp \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & nq \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \frac{nr}{2} \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \frac{mr}{2} \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \frac{mq + np}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons le tableau (T) :
$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{Vmatrix}.$$

Appelons $\Delta(a)$ le déterminant du quatrième ordre obtenu en supprimant dans (T) la ligne des a, $\Delta(b)$ celui obtenu en supprimant les b, etc..., $\Delta(e)$ celui obtenu en supprimant la ligne des e.

L'équation précédente s'écrit
$$m\left[p\Delta(a) + q\frac{\Delta(e)}{2} - r\frac{\Delta(d)}{2}\right] + n\left[p\frac{\Delta(e)}{2} - q\Delta(b) + r\frac{\Delta(c)}{2}\right] = 0.$$

Donc :

Théorème I. — *A une droite quelconque* (D),
$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0,$$
il correspond en général une droite unique (d), $m\alpha + n\beta = 0$, *passant au point fixe et formant avec* (D) *une conique du faisceau.*

Cela cesse d'avoir lieu si la droite (D) est telle que l'on ait

$$p\Delta(a) + q\frac{\Delta(e)}{2} - r\frac{\Delta(d)}{2} = 0, \qquad p\frac{\Delta(e)}{2} - q\Delta(b) + r\frac{\Delta(c)}{2} = 0.$$

Il y a donc, en général, une seule droite (D_1) faisant exception au théorème précédent : c'est la droite

$$p = \frac{\Delta(e)\Delta(c)}{4} - \frac{\Delta(b)\Delta(d)}{2}, \qquad q = -\left[\Delta(d)\Delta(e) + \frac{\Delta(a)\Delta(c)}{2}\right], \qquad r = -\left[\Delta(a)\Delta(b) + \frac{[\Delta(e)]^2}{4}\right].$$

Théorème II. — *Il existe en général une seule droite* (D_1) *formant conique du faisceau avec toute droite passant par le point fixe .*

(D_1) serait elle-même indéterminée si les valeurs de p, q, r étaient simultanément nulles, c'est-à-dire si l'on avait

$$\frac{2\Delta(a)}{\Delta(e)} = -\frac{\Delta(e)}{2\Delta(b)} = -\frac{\Delta(d)}{\Delta(c)}.$$

On voit aisément que toutes les droites (D_1) passent par un point fixe $\left(\alpha = \Delta a, \quad \beta = \frac{\Delta(e)}{2}, \quad \gamma = -\frac{\Delta(d)}{2}\right)$. Toutes les coniques du faisceau passent aussi en ce point. Nous tombons dans le cas des coniques passant par deux points fixes et le résultat précédent a une interprétation géométrique évidente.

(*A suivre.*)

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours spéciaux.*)

Concours de 1909.

1809. — *Déterminer les trajectoires orthogonales d'une série de cercles qui passent par deux points fixes* A *et* B *dans un plan.*

On donnera d'abord une solution analytique basée sur le calcul différentiel et intégral. On cherchera ensuite une solution purement géométrique.

Désignons par $2a$ la distance AB et prenons pour axe des x la perpendiculaire à AB en son milieu.

L'équation générale des cercles passant par les points A et B est $x^2 + y^2 + \lambda y - a^2 = 0$.

Dérivons cette équation par rapport à x, nous avons

$$2x + 2yy' + \lambda y' = 0,$$

et éliminons λ entre ces deux équations, nous obtenons $(x^2 + y^2 - a^2)y' - 2y(x + yy') = 0$,

ou
$$(x^2 - y^2 - a^2)y' - 2xy = 0.$$

C'est l'équation différentielle des cercles qui passent par les points A et B.

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales s'en déduit en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$; on trouve ainsi $2xyy' + x^2 - y^2 - a^2 = 0$, ce qu'on peut écrire

$$(1) \qquad x\frac{d(y^2)}{dx} - y^2 + x^2 - a^2 = 0.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre, la fonction inconnue étant y^2.

Pour l'intégrer, posons $y^2 = uv$, u et v désignant deux fonctions de x, dont l'une pourra être choisie arbitrairement. L'équation devient $x\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) - uv + x^2 - a^2 = 0$, ou

$$(2) \qquad u\left(x\frac{dv}{dx} - v\right) + vx\frac{du}{dx} + x^2 - a^2 = 0.$$

Déterminons v de façon que le coefficient de u soit nul ; nous devons avoir

$$x\frac{dv}{dx} - v = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};$$

on en tire $\quad Lv = Lx, \quad$ et $\quad v = x.$

Puis remplaçons v par cette valeur dans l'équation (2), nous obtenons, puisque le coefficient de u est nul,

$$x^2\frac{du}{dx} + x^2 - a^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad du = \left(-1 + \frac{a^2}{x^2}\right)dx \cdot$$

On en déduit immédiatement $\quad u = -x - \dfrac{a^2}{x} + \mu, \quad$ μ désignant une constante arbitraire.

L'intégrale générale de l'équation différentielle (1) est alors $y^2 = uv = -x^2 - a^2 + \mu x$,

ou $$x^2 + y^2 - \mu x + a^2 = 0.$$

Cette équation représente un faisceau linéaire de cercles ayant leurs centres sur Ox ; de plus le milieu O de AB a par rapport à ces cercles une puissance constante et égale à a^2. On peut dire aussi que tous ces cercles ont deux points communs imaginaires, situés sur Oy et ayant pour coordonnées $\pm ai$.

Solution géométrique.— Soient C et D deux points quelconques conjugués harmoniques par rapport aux points A et B ; le cercle (γ_1) qui a pour diamètre CD coupe orthogonalement tous les cercles (γ) qui passent par les points A et B.

Quand on fait varier les points C et D, les cercles (γ_1) dépendent d'un seul paramètre ; leur ensemble constitue donc les trajectoires orthogonales des cercles (γ).

On voit ainsi que les cercles (γ_1) ont leurs centres sur AB, et que la puissance du milieu de AB par rapport à tous ces cercles est égale à a^2.

André COURTOIS, lycée de Douai.

Autre solution. — Effectuons une transformation par inversion, le pôle étant le point A et la puissance étant égale à $\overline{AB}^2$. Les cercles qui passent par A et B se transforment en droites passant par le point B, et aux trajectoires orthogonales de ces cercles correspondent celles des droites transformées, qui sont des cercles ayant pour centre le point B.

Or, d'après une propriété bien connue de la transformation par inversion, tout cercle de centre B se transforme en un cercle (C) tel que le point B soit le pied de la polaire de l'origine A par rapport au cercle (C).

Il en résulte que tous les cercles (C) ont leurs centres sur AB et rencontrent cette droite en des points conjugués harmoniques par rapport à A et B.

Louis SIRE, à Lyon.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Ruines ; Louis Bel, lycée d'Alger ; G. Deperrois, à Chartres ; G. Foucry, à Reims ; G. Lach, à Denain ; Michel Hugon, lycée Louis-le-Grand ; R. Manen, à Albi ; L. Montant, à Alger ; Edmond Rème, à Alger ; A. Rousseau, à Amiens ; Pierre Salleron, à Albi.

1810. — *Un plan* P *tourne avec une vitesse angulaire constante* ω *autour de la verticale ascendante* Oz. *Etudier le mouvement d'un point* M *pesant qui glisse sans frottement dans le plan* P.

On sait, d'après la théorie du mouvement relatif, que, dans les conditions de l'énoncé, pour étudier le mouvement du point dans le plan, on peut supposer ce dernier immobile, à condition d'ajouter aux forces directement appliquées au point la force centrifuge, représentée par un vecteur égal et opposé au vecteur mJ_e, m représentant la masse du point et J_e l'accélération d'entraînement du point dans la rotation. Cette accélération, puisqu'il s'agit d'une rotation uniforme, est représentée par un vecteur perpendiculaire à l'axe, dirigé du point vers l'axe et égal à $\omega^2.MP$, si MP désigne la distance du point M à l'axe.

Prenons alors le plan fixe comme plan des xz, comme direction Oz la verticale ascendante, comme direction Ox une direction rectangulaire avec la première, passant par la position initiale M_0 du point M.

A chaque instant le point est soumis à la pesanteur et à la force centrifuge, dont les projections sur les axes sont respectivement : 0, $-mg$; $m\omega^2 x$, 0.

On est alors ramené à l'intégration du système $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 x$, $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg$.

On en tire immédiatement $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$, $z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + Ct + D$,

A, B, C, D désignant des constantes arbitraires.

Si l'on mène constamment la verticale du point M, le mouvement relatif du point sur cette verticale est celui d'un point pesant libre tombant verticalement.

Etudions simplement le mouvement de cette verticale dans le plan, c'est-à-dire les variations de x. Les constantes A et B peuvent facilement se déterminer en connaissant la position initiale $(x_0, 0)$ du point et la projection x_0' sur Ox de la vitesse initiale. On trouve sans difficulté

$$A + B = x_0, \qquad A - B = \frac{x_0'}{\omega},$$

d'où la formule
$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{x_0'}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{x_0'}{\omega}\right)e^{-\omega t}$$

ou encore
$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{x_0'}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

On déduit de là
$$\frac{dx}{dt} = \omega x_0 \operatorname{sh} \omega t + x_0' \operatorname{ch} \omega t.$$

La vitesse s'annulera donc à l'instant t donné par

$$\operatorname{th} \omega t = -\frac{x_0'}{\omega x_0}.$$

Il ne correspond de valeurs réelles pour t que si l'on a $\dfrac{x_0'^2}{\omega^2 x_0^2} < 1$.

Dans ce cas on peut choisir comme instant initial celui où la vitesse est nulle, la formule se simplifie, on a

$$x = x_0 \operatorname{ch} \omega t,$$

et on est ramené à la variation d'une fonction connue. Il suffit pour avoir le mouvement vrai du point de chercher la courbe décrite par sa projection sur le plan des xy, qui, en coordonnées polaires, a pour équation

$$\rho = x_0 \operatorname{ch} \varphi.$$

Lorsque t et par conséquent φ varient de $-\infty$ à $+\infty$, le point décrit avec une vitesse angulaire constante autour de l'origine une spirale qui se rapproche de l'origine jusqu'à devenir au temps $t = 0$ tangente à un cercle de rayon x_0, puis s'éloigne ensuite indéfiniment.

Si au contraire on a $\dfrac{x_0'^2}{\omega^2 x_0^2} < 1$, la dérivée de x ne s'annule jamais et la verticale se déplace dans le plan constamment dans le même sens. Si l'on prend alors comme instant initial le moment où la verticale coïncide avec oz, on obtient la forme réduite

$$x = \frac{x_0'}{\omega} \operatorname{sh} \omega t,$$

x varie constamment de $-\infty$ à $+\infty$.

La trace de la verticale dans le mouvement résultant sur le plan des xy a pour équation polaire

$$\rho = \frac{x_0'}{\omega} \operatorname{sh} \varphi.$$

Le résultat est analogue à celui du cas précédent, mais la spirale passe par l'origine au lieu de rester extérieure au cercle de rayon x_0. Enfin l'étude directe des deux cas limites $x_0'^2 = \omega^2 x_0^2$ se fait facilement.

Si $x_0' = \omega x_0$, l'équation se réduit à $x = x_0 e^{\omega t}$.

La trace de la verticale décrit une spirale logarithmique partant de l'origine.

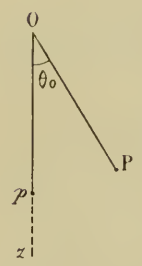
Si $x_0' = -\omega x_0$, l'équation est $x = x_0 e^{-\omega t}$.

La trace décrit la même spirale, mais en partant de l'infini pour aboutir à l'origine.

H. DE LAPIERRE.

Solution exacte de M. Amblard, à Ruines.

1811. — *Deux petites sphères pesantes parfaitement élastiques, de poids* P *et* p, *sont suspendues chacune par leur centre à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, et de même longueur* l *pour les deux sphères. Les deux fils sont fixés à l'autre extrémité en un même point* O.



La sphère p *étant dans sa position d'équilibre* (Op *vertical*), *on abandonne sans vitesse la sphère* P *dans la position* OP, *où le fil est tendu et fait avec* Op *un angle* θ_0 ; P *venant choquer* p, *on demande de dire :* 1° *de quel angle va s'écarter* Op ; 2° *de donner des indications sur le mouvement de* p *et* P *après le choc.*

On envisagera particulièrement le cas où θ_0 *est assez petit, et où* $\frac{P}{p}$ *est voisin de l'unité.*

On réduira les sphères à de simples points matériels.

1° Rappelons que dans le choc de deux corps parfaitement élastiques, les relations entre les vitesses antérieures et postérieures au choc peuvent se déduire des deux propriétés suivantes : 1° la somme des forces vives reste constante ; 2° il en est de même en valeur absolue de la vitesse relative des deux corps comptée sur la normale commune au point de contact, mais cette vitesse relative change de signe.

Dans le problème proposé, le corps P vient choquer le corps p avec une vitesse V, donnée par la formule

$$V^2 = 2gl(1 - \cos\theta_0) = 4gl\sin^2\frac{\theta_0}{2}.$$

Il y a alors dans la distribution des vitesses une discontinuité, et les deux corps seront animés de vitesses respectives V_1 et v_1, dirigées naturellement par raison de symétrie suivant la tangente à la trajectoire décrite par P, le mouvement ayant lieu dans le plan POp. Nous prendrons comme sens positif sur cette tangente, le sens de la vitesse V. Appliquons les deux lois indiquées au début, elles nous donnent

$$PV^2 = PV_1^2 + pv_1^2, \qquad V = -V_1 + v_1.$$

En écrivant les relations sous la forme $P(V^2 - V_1^2) = pv_1^2$, $V + V_1 = v_1$, on en déduit par division une relation plus simple, qui peut remplacer la première,

$$P(V - V_1) = pv_1.$$

On en tire alors facilement $V_1 = \frac{P-p}{P+p}V$, $v_1 = \frac{2P}{P+p}V$.

Le corps p s'écartant de la position avec la vitesse initiale v_1 montera jusqu'en un point tel que l'angle de Op et de la verticale soit un angle θ_1 donné par $v_1^2 = 4gl\sin^2\frac{\theta_1}{2}$.

Donc
$$\sin^2\frac{\theta_1}{2} = \frac{v_1^2}{4gl} = \frac{4P^2}{(P+p)^2}\cdot\frac{V^2}{4gl} = \frac{4P^2}{(P+p)^2}\cdot\sin^2\frac{\theta_0}{2},$$

et par conséquent l'angle θ_1 demandé est donné par $\sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{2P}{P+p}\sin\frac{\theta_0}{2}$.

Cet angle θ_1 n'existera que sous la condition $\frac{2P}{P+p}\sin\frac{\theta_0}{2} < 1$.

Si cette condition n'est pas réalisée, le corps p atteindra le point le plus haut de sa trajectoire avec une vitesse non nulle et continuera par conséquent à tourner dans le même sens.

2° Pour étudier le mouvement des deux corps après le choc, nous subdiviserons en plusieurs cas.

D'abord si $P < p$, la vitesse V_1 est négative et la valeur θ_1 existe et est inférieure à θ_0. Donc le corps P reviendra sur ses pas sans remonter pourtant jusqu'à sa position initiale, car on a

$$|V_1| < |V|.$$

De son côté le corps p sera animé d'un mouvement en sens inverse, nous en avons déterminé l'amplitude maximum.

Puis lorsque les corps redescendront, ils viendront se choquer de nouveau, mais comme la période d'un mouvement pendulaire dépend de l'amplitude tant que cette dernière n'est pas très petite, les périodes des deux mouvements ne seront pas les mêmes et le choc aura lieu en un autre point que la première fois. Il faudrait déterminer ce point pour pouvoir connaître le nouveau mouvement, analogue au premier, qui aura lieu ensuite.

Au contraire si θ_0 est suffisamment petit, il en sera de même de θ_1, puisque la condition $P < p$ entraîne $\theta_1 < \theta_0$, et les périodes pouvant être considérées comme égales, le choc aura lieu au même point que la première fois. Il sera très facile de déterminer les vitesses de chacun des corps au choc, puisqu'on connaît les amplitudes de leurs mouvements et par des calculs absolument analogues à ceux que nous avons faits on trouvera les nouvelles vitesses et ainsi de suite, chaque choc ayant toujours lieu au même point.

Dans le cas intermédiaire où $P = p$, on a $V_1 = 0$ et $v_1 = V$, donc le corps P s'arrête complètement, et le corps p continue le mouvement primitif du corps P avec la même amplitude, car $\theta_1 = \theta_0$. Naturellement le mouvement se reproduira avec échange de P et p. Tout se passera comme si l'on avait un pendule simple, mais chacune des moitiés de trajectoire sera décrite par un des deux corps, l'autre restant immobile pendant ce temps.

Enfin si $P > p$, les deux corps se meuvent après le choc dans la direction primitive du mouvement de P, la vitesse de ce dernier étant diminuée. Nous avons vu que dans ce cas on a toujours $\theta_1 > \theta_0$ et même que l'amplitude de p peut ne pas être limitée, le corps p dépassant le point le plus haut et continuant à tourner dans le même sens. Quel que soit le cas qui se présente, il y aura de nouveau choc entre P et p, mais le point où aura lieu le choc ne sera plus le même. On pourrait répéter ce que nous avons dit précédemment.

Ici le fait que θ_0 est assez petit n'entraîne pas forcément le même fait pour θ_1 puisque $\theta_1 > \theta_0$, mais si θ_0 et θ_1 sont assez petits tous deux, on verrait comme plus haut que les chocs successifs auront lieu au même point et que l'on peut déterminer après chaque choc la nouvelle distribution des vitesses.

Remarque. — Nous n'avons envisagé constamment que le cas où les corps restaient sur le cercle. Si à un moment donné ils le quittent, les corps tomberont en chute libre suivant une parabole osculatrice au cercle jusqu'au moment où le fil sera de nouveau tendu ; mais l'étude de ce cas sortirait complètement de l'étude proposée.

H. DE LAPIERRE.

Solutions exactes de MM. Amblard, à Ruines ; Rousseau, à Amiens.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1909 (*fin*).

1801. — Solide de révolution engendré par un cube. — *On considère un cube qui a deux diagonales situées dans un plan de front dont l'éloignement est* 12^{cm}. *L'une de ces diagonales est verticale ; sur l'autre on s'élève de gauche à droite. La diagonale verticale se projette à* 3^{cm} *à gauche du grand axe de la feuille ; son extrémité inférieure est sur le plan horizontal, sa longueur vaut* 14^{cm}.

Cela étant, on fait tourner le cube autour de sa diagonale de front non verticale. *Les arêtes du cube engendrent des surfaces recouvrant un solide* S.

1° *Construire les deux projections du solide* S ;

2° *On éclaire ce solide par la lumière à 45°. Construire l'ombre propre du solide et son ombre portée sur les plans de projection.*

On déterminera les points remarquables des lignes qui limitent les surfaces recouvrant le solide S, *des lignes de contour apparent et d'ombre, et les tangentes en ces points.*

Nota. — *Dessiner en noir les lignes de contour apparent, les lignes qui limitent les surfaces recouvrant le solide* S, *ainsi que les contours des ombres : en trait plein pour les parties visibles, en ponctué pour les parties cachées.*

Faire en trait rouge, continu et fin, les lignes de construction et les lignes de rappel.

Mettre sur les ombres visibles des hachures fines, espacées d'environ $1^{mm},5$, *bleues ou noires. Diriger ces hachures parallèlement à la ligne de terre pour l'ombre portée, et perpendiculairement aux projections du rayon lumineux pour l'ombre propre.*

Expliquer très sommairement les constructions effectuées; indiquer la nature et les éléments des courbes dessinées. On pourra utiliser la sphère tangente à toutes les arêtes du cube.

Renfermer l'épure dans un cadre de 28×44^{cm}, *et placer la ligne de terre suivant le petit axe du cadre.*

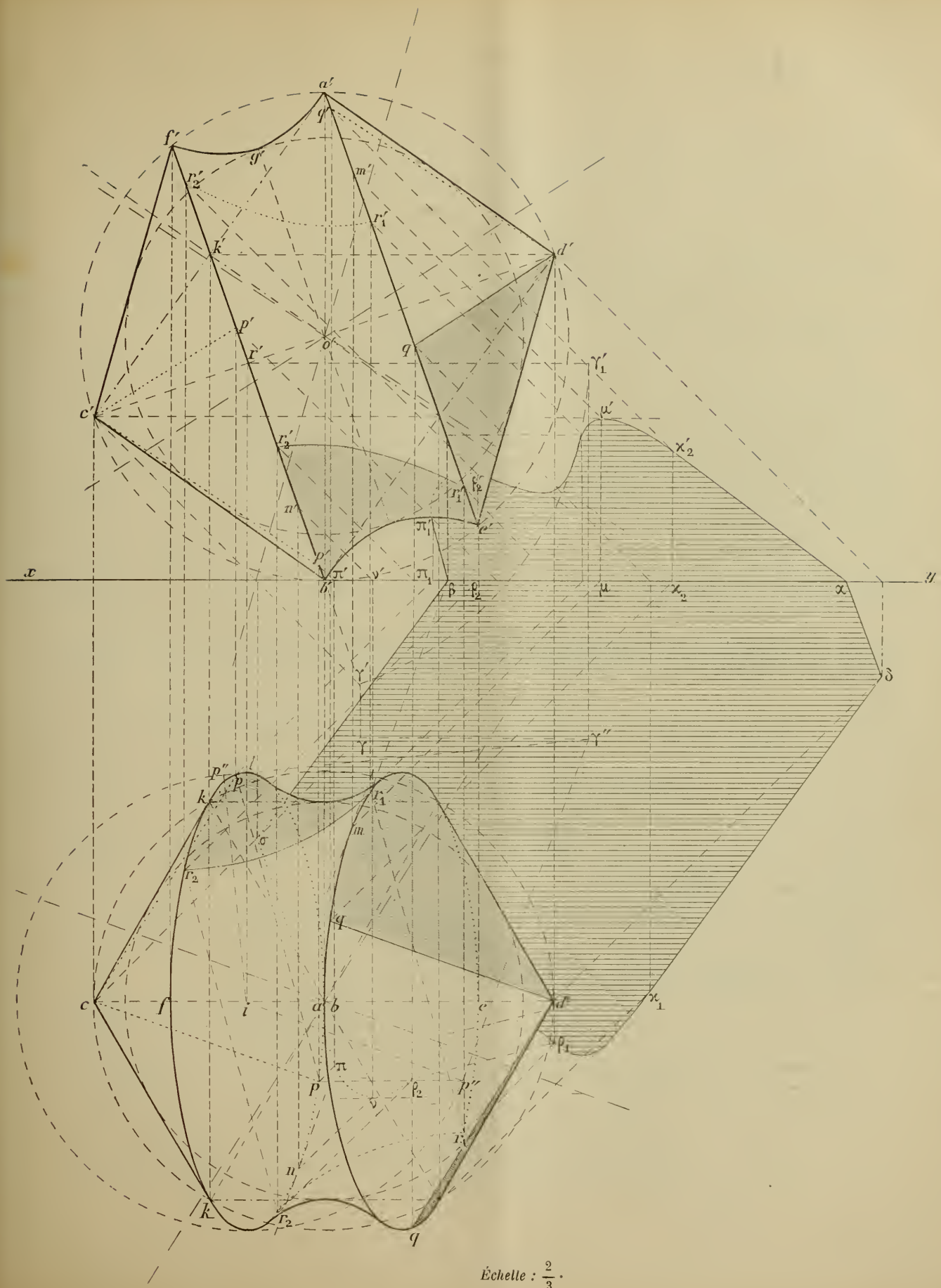
Nous construirons d'abord les deux projections du cube dont la diagonale verticale ab, $a'b'$ a une longueur de 14^{cm}, la seconde diagonale cd, $c'd'$ étant dans le plan de front de la première et s'élevant de gauche à droite. On sait que les projections des sommets C et D sur la diagonale AB divisent cette diagonale en trois segments égaux ; on en déduit immédiatement les projections verticales c' et d' de ces sommets sur la circonférence de diamètre $a'b'$, puis le rayon ad de la circonférence sur laquelle se projettent horizontalement les six sommets du cube en formant un hexagone régulier.

Projections du solide S. — Le solide S se compose des deux cônes de révolution engendrés, l'un par les trois arêtes issues de C, l'autre par les trois arêtes issues de D en tournant autour de CD, et limités aux deux cercles égaux, dont les plans sont de bout, et les diamètres égaux à $a'e'$; puis de la surface gauche de révolution autour du même axe et dont les génératrices sont les six arêtes du cube qui ne passent par aucun des sommets C et D, cette surface étant limitée aux deux cercles, bases des cônes C et D. Le cône asymptote de cette surface est égal à chacun des deux cônes C et D, puisque toutes les génératrices du cube font le même angle avec sa diagonale et il a pour sommet le centre du cube, qui est manifestement un centre de symétrie pour le solide S.

Le contour apparent vertical du solide S se composera donc des contours apparents $d'a'e'$ et $c'f'b'$ des deux cônes, puis de deux arcs de l'hyperbole méridienne de la surface gauche ; on peut construire ces arcs, puisque l'on connaît les deux asymptotes, parallèles aux génératrices de contour apparent des cônes C et D, les sommets de l'hyperbole aux points d'intersection du cercle, contour apparent de la sphère inscrite dans le cube, avec $o'g'$, et de plus les points a', f' et leurs symétriques. La tangente en a' est précisément $a'c'$, direction conjuguée de la verticale par rapport aux deux directions $a'd'$ et $d'e'$. Le contour apparent horizontal se compose des contours apparents des cônes C et D que l'on détermine en menant les tangentes par leurs sommets à la sphère inscrite dans le cube ; les points de contact avec les ellipses projections des bases sont sur le cercle circonscrit à l'hexagone régulier qui représente le cube, car le plan de bout $a'c'$, par exemple, donne la direction conjuguée des cordes verticales dans le cône C et par suite coupe le plan de base FB suivant la corde des contacts $k'k$ relative aux génératrices de contour apparent. Le contour apparent de la surface gauche qui complète le solide S est formé par deux arcs d'hyperbole tangents aux ellipses déterminées précédemment par leurs demi-axes il et ih, en des points situés sur la même circonférence bK, et dont les asymptotes sont parallèles aux génératrices de contour apparent horizontal des cônes C et D, les sommets de cette hyperbole étant, comme pour l'hyperbole méridienne de front, sur le contour apparent de la sphère inscrite dans le cube.

Ombre propre. — Cherchons d'abord l'ombre propre du cône C, et pour cela menons par son sommet la parallèle aux rayons lumineux $c\gamma$, $c'\gamma'$, puis, par le point γ, γ' où elle perce le plan de base, menons des tangentes à cette base. Pour cela nous rabattons son plan autour de son diamètre horizontal il, et de γ'' nous menons les tangentes $\gamma''p''$ dont les points de contact relevés en p font connaître les génératrices d'ombre propre cp, dont nous prenons les projections verticales $c'p'$.

En répétant les mêmes constructions pour le cône D, nous obtiendrions, à cause de la symétrie absolue de toutes les données par rapport au centre du cube, les génératrices d'ombre propre dq, $d'q'$, symétriques des premières par rapport au point a, b. L'ombre propre de la surface gauche sera la courbe d'intersection du plan diamétral conjugué de la direction des rayons lumineux avec la surface. Or ce plan est le même que pour le



Échelle : $\frac{2}{3}$.

cône asymptote ; celui-ci a son sommet au centre du cube et est homothétique inverse du cône C, par exemple, par rapport au point d'intersection I de leur axe commun avec le plan de bout FB. Donc la trace du plan diamétral cherché sur le plan FB, que nous pouvons donner comme base à ce cône asymptote, sera homothétique de celle du plan diamétral conjugué de la même direction dans le cône C, c'est-à-dire de la droite qui joint les pieds p des génératrices d'ombre propre. Il suffit donc de mener une parallèle à cette droite et à une distance moitié moindre du point i, le rapport d'homothétie des cônes étant $\frac{1}{2}$, pour avoir la trace du plan cherché sur le plan BF. Sa trace sur le plan AE est évidemment symétrique par rapport au centre du cube. Les points r où ces droites coupent les ellipses donnent quatre points de l'hyperbole, ligne d'ombre propre cherchée. Son centre est au centre du cube et ses asymptotes sont parallèles aux génératrices d'ombre propre du cône C, par exemple, puisque ce sont les génératrices d'intersection du cône homothétique à C par un plan parallèle au plan de ces génératrices. On déterminerait sans difficulté les tangentes aux points r par la construction connue de la tangente a une hyperbole dont on a les asymptotes et un point.

Ombre portée. — L'ombre portée sur le plan horizontal, par exemple, est la trace, sur ce plan, du cylindre parallèle aux rayons lumineux et qui aurait pour directrice toute la ligne d'ombre propre. Nous avons ainsi d'abord les plans tangents aux deux cônes qui nous donnent le contour $\varkappa_1\delta\alpha$, limité par la ligne de terre, et $\pi\sigma\beta$, limité aussi à la ligne de terre, pour se continuer sur le plan vertical par $\alpha\varkappa_2'$ et $\beta\pi_1'$. Puis on obtient les ombres portées par les arcs de la base tels que qr_1 qui donne l'arc d'ellipse $\varkappa_1\rho_1$, et enfin les ombres portées par les arcs d'hyperbole tels que r_1r_2 qui donne l'arc d'hyperbole $\rho_0\rho_2$. On doit remarquer que ces arcs ont la même tangente au point ρ_1 de raccordement, car au point r_1, par exemple, le plan tangent au cylindre d'ombre, étant tangent à la surface gauche, contient la tangente au cercle base du cône qui est sur cette surface gauche, et par suite il est tangent au cylindre qui a pour directrice ce cercle et la même direction de génératrices.

Constructions analogues pour l'ombre portée sur le plan vertical. — On a les points où la tangente est parallèle à xy en menant, d'après la règle bien connue, les plans tangents à chaque cylindre parallèlement à cette direction. Nous avons ainsi obtenu les points tels que ν, ν' et μ, μ'. La distinction des parties vues et des parties cachées n'offre aucune difficulté.

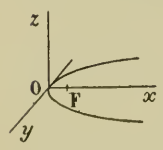
Nous avons reçu une épure très bien dessinée, mais où l'ombre propre du solide S était inexacte; nous ferons seulement observer que la courbe d'intersection de deux surfaces limitant un solide ne coupe les lignes d'ombre propre sur chaque surface au même point que si les deux surfaces ont le même plan tangent en ce point.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE (1909).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin*).

Mathématiques (M. Dulac.)

772. — Un cylindre droit a pour base la parabole $y^2 = 2px$. Lieu des points M de ce cylindre dont l'abscisse est égale à la distance MF au foyer de la parabole.

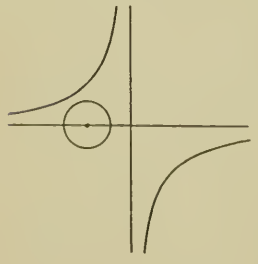


Lieu de la droite MF.

773. — On considère les deux paraboles $y^2 = 2p(x + r)$, $x^2 = 2qy$.
Une parallèle à ox rencontre ces deux paraboles aux points M, M' ; lieu du milieu de MM'.

774. — Une droite tourne autour d'un point fixe d'un mouvement uniforme ; mouvement relatif d'un point pesant qui glisse sur cette droite.

775. — Courbes intégrales de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$.
Lieu des points d'inflexion et des points de contact des tangentes parallèles à ox.



776. — Un cercle a son centre sur l'une des asymptotes d'une hyperbole équilatère. Trouver les cordes qui ont même milieu dans le cercle et dans l'hyperbole. Lieu de ce milieu. Enveloppe de ces cordes et lieu des points par lesquels passent deux cordes rectangulaires.

777. — Dans une conique à centre, on considère un diamètre variable et le cercle passant par un point fixe et par les extrémités de ce diamètre. Lieu du centre. Solution géométrique.

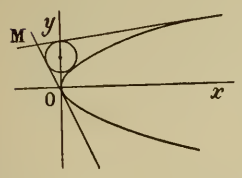
778. — Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à un cercle de rayon constant dont le centre décrit une parabole.

779. — Dans un ellipsoïde rapporté à ses axes on considère les sections par un plan qui tourne autour d'un axe et la surface engendrée par leurs cercles de Monge. Etudier les sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées et des plans passant par les axes. Volume.

780. — Lignes de plus grande pente de la surface $z = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$

Volume compris entre les plans $z = a$, $z = 2a$.

781. — On donne les deux coniques $ax^2 + by^2 - 1 = 0$, $y^2 = 2px$.
Enveloppe des droites qui déterminent dans ces coniques deux segments ayant même milieu.



782. — Intégrer l'équation différentielle

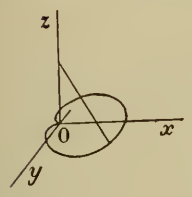
$$y' - xy + x^2 = 0.$$

783. —On considère deux droites rectangulaires dont la plus courte distance est $4a$ et le cercle de rayon a dont le plan est parallèle aux deux droites et dont le centre est le milieu de la perpendiculaire commune. Etudier la surface engendrée par une droite s'appuyant sur les deux droites et sur le cercle. Volume compris entre les deux droites.

Enveloppe du plan tangent à la surface le long du cercle donné.

784. — On donne la parabole $y^2 = 2px$ et un cercle tangent dont le centre décrit Oy; lieu du point de rencontre M des tangentes communes.

785. — Trajectoires orthogonales des paraboles de grandeur constante qui tournent autour du foyer.



786. — Un cercle passant par le sommet d'une parabole lui est tangent en M ; soit A le quatrième point de rencontre. Enveloppe de la droite MA.

787. — Surface engendrée par les droites rencontrant une cardioïde du plan xOy et faisant avec Oz un angle de 45°. Sections parallèles au plan des xy.

788. — Lieu des points tels que les pieds des trois normales issues de ce point à une parabole forment un triangle rectangle.

789. — Un point se meut sur un cercle, étant soumis à une résistance tangentielle égale à $a + bv^2$. Etudier le mouvement.

790. — Calculer $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^4 x \, dx.$$

791. — On considère deux cercles C, C', coupés par une parallèle à la ligne des centres en A, B et A', B'. Lieu du milieu de AA' :

1° Analytiquement, équation et degré ;

2° Géométriquement. Degré. Construction de la tangente en un point.

Trouver l'aire de la courbe en considérant deux parallèles infiniment voisines.

792. — Mouvement d'un point pesant glissant sans frottement sur une droite qui passe à l'origine, tourne autour de Oz d'un mouvement uniforme et fait avec Oz un angle de 45°.

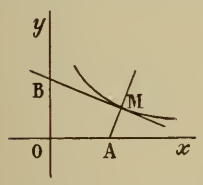
793. — Intégrer l'équation différentielle $(1 - x^2)y' + xy + xy^2 = 0$.
Construire les courbes intégrales.

794. — Construire la courbe

$$x^4 + y^4 - 32x - 4y + 3 = 0,$$

en discutant successivement l'équation en x et l'équation en y.

795. — On considère un faisceau linéaire de cercles et un point fixe A ; puis une droite variable, D, qui passe par A. Il y a deux cercles du faisceau tangents à la droite D, en M et M'. Lieu du conjugué harmonique de A, par rapport à M et M' analytiquement et géométriquement.



796. — Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux cercles qui passent par un point et sont tangentes à une droite fixe, analytiquement et géométriquement.

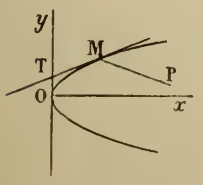
797. — On considère une hyperbole équilatère et une parallèle, D, à une bissectrice de l'angle des asymptotes. Trouver par la géométrie le lieu des segments déterminés par une parallèle variable à l'autre bissectrice entre l'hyperbole et la droite D. Tangente en un point et asymptotes.

798. — Trouver les courbes telles que OA = OB, MA et MB étant la normale et la tangente.

799. — Un cercle mobile reste tangent à une parabole en un point fixe. Lieu du point d'intersection des tangentes communes au cercle et à la parabole.

800 — On considère la parabole $y^2 - 2px = 0$ et la courbe $Ax^2 + By^2 = C$.

Enveloppe des droites telles que les milieux M et M' des cordes interceptées par les deux courbes coïncident.



801. — Enveloppe de la droite MP symétrique de la tangente MT par rapport à Ox.

On considère le cercle tangent à la parabole en M et passant par P, intersection de la droite et de la parabole.

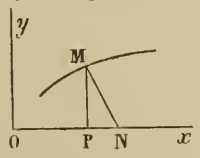
Lieu du centre de ce cercle.

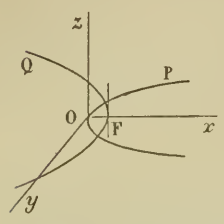
Etudier la question géométriquement.

802. — Courbes telles que

$$MN + 2MP = a,$$

MN étant la normale en M.





803. — P est une parabole d'axe Ox et de plan xOy ; c'est la section droite d'un cylindre.

Q est une parabole d'axe Ox et dans le plan zOx, son sommet est le foyer de P, c'est aussi la section droite d'un cylindre.

Intersection des deux cylindres.

Volume commun aux deux cylindres.

804. — On donne une ellipse, un cercle de rayon donné a son centre qui décrit l'ellipse. Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à ce cercle. Construction du lieu.

Trouver le degré et des particularités de ce lieu par des considérations géométriques.

805. — Nombre des racines de l'équation $2 \sin x - x = 0$.

806. — On considère les coniques circonscrites à un triangle AOB rectangle en O et telles que les tangentes en A et B se coupent sur la hauteur OH du triangle. Lieu du point de rencontre des normales en A et B.

807. — Construire la courbe $x^4 + y^4 - 6y^2 + 8y - 8x + 3 = 0$.

808. — Intégrer l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - y - xy^2 = 0$.

809. — On considère deux droites orthogonales dont la distance est $4a$. Un cercle de rayon a est situé dans le plan équidistant des deux droites et a pour centre le milieu de la perpendiculaire commune.

1° Équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur les deux droites données et sur le cercle.

Étudier la forme de cette surface.

2° Enveloppe des plans tangents à la surface le long du cercle donné.

810. — Enveloppe des sécantes d'une hyperbole équilatère ayant une longueur constante. Démontrer directemen qu'on peut mener deux tangentes à cette enveloppe, parallèles à une direction donnée.

811. — On donne le cylindre $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ et le paraboloïde $z = xy$; trouver la courbe d'intersection. Evaluer la surface du cylindre comprise entre cette courbe et sa base dans le plan xoy.

812. — On donne deux paraboles ayant même sommet et leurs axes rectangulaires ; on considère les normales à l'une des paraboles et on demande le lieu des pôles de ces normales par rapport à la deuxième parabole. Ce lieu est une cubique passant par l'origine et symétrique par rapport à D. Expliquer géométriquement ces résultats et prouver à priori que ce lieu est de degré 3.

813. — Déterminer a de façon que la courbe $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + a = 0$ ait un point double.

Construire cette courbe dans le cas général où il n'y a pas de point double.

814. — Aire de la développée de l'ellipse.

815. — On considère un cercle C et une droite D ; on mène la tangente en un point M de C ; elle rencontre D en N. Lieu du milieu P de MN. Remarques géométriques sur ce lieu ; en particulier trouver géométriquement le degré de la courbe lieu de P.

816. — On considère la courbe

$$x = t^3, \qquad y = t^2, \qquad z = t + 1$$

et un cône de révolution d'axe Oz. Combien y a-t-il de points d'intersection de la courbe avec un plan tangent au cône ? Lieu du centre de gravité de ces points d'intersection. Exprimer ce lieu sous forme paramétrique rationnelle.

817. — Trajectoires orthogonales des paraboles homofocales d'axe Ox.

CONCOURS DE 1910.

ECOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et trigonométrie.

1867. — 1° Trouver une série entière en x qui satisfasse à l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad 9(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 9x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

et aux conditions initiales suivantes : pour $x = 0$, la série doit prendre la valeur 1 et sa dérivée doit prendre la valeur $-\frac{1}{3}$.

2° Déterminer l'intervalle de convergence de la série trouvée. La fonction de x que définit cette série dans son intervalle de convergence sera désignée par $f(x)$.

3° Montrer qu'il existe une infinité de changements de la variable indépendante, de la forme $t = \varphi(x)$, qui transforment identiquement l'équation (E) en une équation linéaire à coefficients constants ; trouver tous ces changements de variable.

4° L'un des changements de variable précédents est $x = \cos 3t$. Partant de là, prouver que les formules

$$x = \cos 3t, \qquad y = \cos t + \sin t$$

définissent, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, le même arc de courbe que l'équation $y = f(x)$, pourvu que t varie dans un intervalle qu'on déterminera.

5° Les équations paramétriques précédentes représentent, quand on n'y limite pas la variabilité du paramètre, une courbe (C). Montrer que cette courbe est coupée par une droite $y = h$ en deux points au plus et que ces points existent pour toutes les valeurs de la constante h qui sont comprises entre deux certains nombres α et β. Ces points seront désignés par M et M'.

6° On imagine qu'on divise le segment de droite MM' en trois parties égales ; soient P et P' les points de division. Calculer l'aire comprise entre les arcs de courbe que décrivent P et P' quand h varie de α à β.

(Durée : 4 heures.)

Géométrie analytique et mécanique.

1868.— Un point matériel de masse unité $M(x, y, z)$ est soumis à une force MF qui a pour composantes

$$X = -ax, \qquad Y = -by, \qquad Z = -cz,$$

où a, b, c sont trois constantes positives données.

1° Calculer les coordonnées x, y, z en fonction du temps, connaissant la position initiale $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ainsi que la vitesse initiale $M_0V_0(x'_0, y'_0, z'_0)$. Conditions pour que le mouvement soit périodique.

2° Un second point matériel libre, de masse 1, se trouve coïncider constamment avec l'extrémité F de la force MF. Montrer que le point F obéit au même champ de force que le point M, et trouver la vitesse correspondante à la position initiale F_0 de ce point.

3° Plus généralement, montrer que tout point matériel N, de masse 1, placé initialement sur la droite M_0F_0, peut recevoir une vitesse initiale N_0W_0 telle qu'il reste constamment situé sur la droite MF. — On examinera le cas particulier où la position initiale N_0 du point N serait dans l'un des plans de coordonnées.

4° La position initiale N_0 variant sur la droite M_0F_0, trouver le lieu du point W_0 et le lieu de la droite N_0W_0.

(Durée : 4 heures.)

Epure de géométrie descriptive.

1869. — Un tétraèdre régulier ABCD a trois sommets A, B, C dans le plan horizontal de projection et le quatrième sommet D au-dessus du plan horizontal.

Soient (S) la sphère circonscrite au tétraèdre et (P) le paraboloïde hyperbolique qui passe par les côtés du quadrilatère gauche ABCDA. (P) partage le volume limité par (S) en deux volumes dont l'un contient le milieu de l'arête BD du tétraèdre. On représentera, en projection horizontale seulement, ce dernier volume supposé limité au plan horizontal de projection et à un autre plan horizontal situé à un centimètre au-dessous du point D.

Mise en place : On supposera que le point D se projette au centre de la feuille, que l'arête AC est parallèle au grand côté de la feuille et à gauche du point D. Le cercle circonscrit au triangle ABC a 10 centimètres de rayon.

On indiquera la construction d'un point quelconque de la courbe commune à la sphère et au paraboloïde et de la tangente en ce point ; la tangente sera tracée en trait mixte noir. Les lignes de construction seront tracées en traits pleins rouges.

(Durée : 4 heures.)

Calcul.

1870.— L'élongation u d'une vibration amortie a pour expression, en fonction du temps t,

$$u = U \cdot \frac{e^{-st}}{\cos\varphi} \cos(rt - \varphi) ; \qquad \left(s = \frac{\sin\varphi}{\theta}, \qquad r = \frac{\cos\varphi}{\theta}, \qquad e = 2{,}718\right).$$

1° Quelles sont les valeurs de t qui donnent à u soit une valeur nulle, soit une valeur maximum ou minimum ?

2° Pour $U = 1$ cm, $\theta = 1$ sec., $\varphi = 45°$, construire une table des valeurs de u en fonction de t, du premier maximum de u à son premier minimum, et procédant par huitièmes de cet intervalle.

3° Comment cette table peut-elle être étendue à l'intervalle suivant ?

(Durée : 1 heure.)

Physique.

I. — Horloges et chronomètres.

II. — **1871.** Un système centré est formé d'une lentille convergente NN' et d'un miroir concave M ; F et F' sont

les foyers de la lentille qui a pour points nodaux N et N' ; F_1 est le foyer du miroir ; les points se succèdent dans l'ordre F, N, N', F', F_1, M. On donne la distance focale φ de la lentille, celle du miroir φ_1 et l'écartement $F'F_1 = \varepsilon$. La lumière issue d'un objet lumineux rencontre d'abord la lentille, puis le miroir, puis de nouveau la lentille pour former l'image que l'on considère.

1° Trouver les deux points de l'axe pour lesquels l'objet et son image sont confondus ; discuter le problème.

2° Application : Calculer la distance δ de ces deux points pour $\varphi = 10$ cm, $\varphi_1 = 10$ cm, $\varepsilon = 20$ cm.

3° Le miroir et la lentille sont montés sur un tube à tirage gradué en millimètres. On mesure les valeurs δ_1, δ_2, δ_3, de la distance δ pour les trois lectures λ_1, λ_2, λ_3 du tirage. En déduire les distances focales φ et φ_1 supposées inconnues.

(*Durée : 3 heures.*)

Chimie.

I. — Le cyanogène ; préparation, propriétés, composition.

II. **1872.** — On donne une solution aqueuse de potasse et de soude qu'on utilise pour les deux opérations suivantes :

On en prend 100 cm³ que l'on chauffe, en y dirigeant un courant de chlore, jusqu'à ce que celui-ci cesse d'être absorbé ; on évapore alors à sec le produit de la réaction et on le chauffe progressivement jusqu'à une température suffisamment élevée pour qu'il ne laisse plus dégager de gaz. Le poids du résidu ainsi obtenu est de 10 grammes et il s'est dégagé un volume V de gaz pendant la calcination.

Cet ensemble d'opérations a finalement transformé les 100 cm³ de la solution initiale en un mélange solide de chlorures de potassium et de sodium. On dissout ce mélange dans 500 cm³ d'eau, lesquels sont contenus dans un calorimètre ; dans ces conditions, on observe que la température du liquide s'abaisse de 15° à 14°,26.

Déduire de ces deux résultats les proportions respectives de potasse et de soude contenues dans un litre de la solution.

Calculer, à 0° et 760 mm., le volume V de gaz dont il est question dans la première opération.

Poids atomiques : K = 39, Na = 23, O = 16, H = 1, Cl = 35, 5.

Chaleurs moléculaires de dissolution : KCl = — 4,39, NaCl = — 1,26, évaluées en grandes calories par molécule-gramme de substance.

Calorimètre et accessoires évalués en eau : 5 grammes.

N. B. — Pour simplifier les calculs, on admettra que la dissolution des chlorures ne modifie pas le volume de l'eau et que la chaleur nécessaire pour élever de 1° la température de 1cm³ de la solution soit égale à l'unité.

Si l'on croyait en avoir besoin, on prendrait la densité de l'hydrogène égale à 0,0693.

(*Durée : 2 heures.*)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires*).

Concours de 1909 (*fin*).

1813. — *On considère la partie de la cycloïde* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ *pour laquelle* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. *Calculer l'aire et le volume de révolution engendrés par cette courbe tournant autour de* Ox. *Peut-on déduire de ce calcul le centre de gravité du périmètre et de l'aire de la courbe ?*

Même problème pour la partie de cette courbe comprise entre les parallèles à Oy *menées par les points* $t = 0$, $t = t_1 \leqslant 2\pi$.

On sait que l'élément d'aire d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe autour de Ox est $2\pi y ds$. Nous avons donc à calculer yds en fonction de t et à intégrer ensuite la différentielle ainsi obtenue de 0 à 2π.

Or $dx = a(1 - \cos t)\,dt$, $dy = a \sin t dt$, et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a dt \sqrt{2(1 - \cos t)}$,

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt\,;$$

le signe à choisir est bien le signe + puisque, dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, $\sin \frac{t}{2}$ reste positif ainsi que y.

L'aire engendrée par l'arceau de cycloïde est donc

$$A = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\, dt, \qquad \text{ou} \qquad A = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt.$$

D'autre part, $\int \sin^3 \frac{t}{2}\, dt$ peut s'écrire $\int \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\, dt$

ou $-2 \int \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d \cos \frac{t}{2} = -2 \int (1 - u^2) du\,;$ l'intégrale indéfinie est donc

$$-2\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C^{te},$$

et, aux limites, la variable $u = \cos \frac{t}{2}$ prend les valeurs 1 et -1 ; nous avons donc $4\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ ou $\frac{8}{3}$ pour valeur de cette intégrale définie, et $A = \frac{64}{3}\pi a^2$.

Passons maintenant au volume.

L'élément de volume est $\pi y^2 dx$, ou, en fonction de t,

$$dv = \pi a^3 (1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3 \sin^6 \frac{t}{2}\, dt = 16\pi a^3 \sin^6 \theta\, d\theta,$$

en posant $t = 2\theta$.

Calculons $\int \sin^6 \theta d\theta = J_6$.

En intégrant par parties, nous avons $\int \sin^5 \theta \sin \theta d\theta = -\cos \theta \sin^5 \theta + 5 \int \cos^2 \theta \sin^4 \theta\, d\theta$;

or, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$; par conséquent la deuxième intégrale peut s'écrire

$$\int (1 - \sin^2 \theta) \sin^4 \theta d\theta = J_4 - J_6\,;$$

nous avons donc finalement la formule de récurrence $6J_6 = 5J_4 - \cos \theta \sin^5 \theta$.

Nous aurons de même

$$4J_4 = 3J_2 - \cos \theta \sin^3 \theta, \qquad 2J_2 = J_0 - \cos \theta \sin \theta.$$

Prenons maintenant toutes ces intégrales entre 0 et π ; nous obtenons $J_0 = \pi$ et ensuite $J_2 = \frac{\pi}{2}$, $J_4 = \frac{3\pi}{8}$, $J_6 = \frac{5\pi}{16}$.

D'autre part, le volume engendré par l'aire de l'arceau de cycloïde envisagé est donné par

$$V = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \theta d\theta, \qquad \text{donc} \qquad V = 5\pi^2 a^3.$$

Pour avoir le centre de gravité du périmètre et celui de l'aire de la courbe, il suffit d'appliquer les théorèmes de Guldin.

Chacun de ces centres de gravité est évidemment situé sur la droite $x = a\pi$, qui est un axe de symétrie ; il suffit donc de trouver l'y.

Pour le périmètre, nous avons $2\pi l y = \frac{64}{3}\pi a^2$, $y = \frac{32a^2}{3l}$, en désignant par l la longueur de l'arceau ; or $l = \int_0^{2\pi} ds = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\left(\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi} = 8a.$

L'ordonnée du centre de gravité du périmètre de l'arceau de cycloïde est donc égale à $\frac{4a}{3}$.

Pour le volume, nous avons de même $2\pi A y = 5\pi^2 a^3$, $y = \frac{5\pi a^3}{2A}$, en appelant A l'aire de la courbe. Or cette aire est donnée par

$$A = \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,dt = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta = 8a^2 J_4.$$

Nous avons trouvé plus haut $J_4 = \frac{9\pi}{8}$; donc l'y du centre de gravité de l'aire est donné par

$$y = \frac{5\pi a^3}{2\,\frac{3\pi}{8}\,8a^2} = \frac{5a}{6}.$$

La dernière partie du problème ne présente aucune difficulté nouvelle : il suffit de prendre chacune des intégrales entre les limites 0 et t_1 pour t, ou 0 et $\frac{t_1}{2}$ pour θ ; l'aire de la surface de révolution sera par exemple

$$A = -8\pi a^2\, 2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)_0^{t_1} = 16\pi a^2\left(\frac{2}{3} - \cos\frac{t_1}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{t_1}{2}\right).$$

Cette expression peut d'ailleurs s'écrire autrement, mais cette transformation n'a aucun intérêt.

Pierre SALLERON, à Albi.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Amiens ; G. Lach, à Denain ; M. Hugon, à Saint-Flour ; R. Manen, à Albi ; E.-N. Barisien ; M. Mazet, à Sétif ; G. Foucry, à Reims ; A. Courtois.

1814. — 1° *Lieu des points* P *d'un plan d'où l'on voit une parabole donnée dans ce plan sous un angle constant* α.

2° *Enveloppe des cordes* AB *de contact des tangentes issues de chacun de ces points* P.

1° L'équation de la tangente à la parabole en fonction du coefficient angulaire est

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

En exprimant qu'elle passe au point (x, y), nous avons la relation $2m^2x - 2my + p = 0$, qui donne les deux coefficients angulaires des tangentes qui passent au point (x, y).

Appelons m' et m'' les deux racines de cette équation ; nous aurons la relation

$$\frac{m'-m''}{1+m'm''} = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

Or $m'+m'' = \frac{y}{x}$, $m'm'' = \frac{p}{2x}$; donc l'équation du lieu est $\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{2p}{x}} = k\left(1 + \frac{p}{2x}\right)$

ou (1) $$y^2 - 2px = k^2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Le lieu du point P est donc une conique. Cette conique a pour direction asymptotique $y^2 - k^2x^2 = 0$, ou $y = kx$, $y = -kx$; elle est en outre doublement tangente à la parabole aux points de rencontre avec la directrice.

C'est donc une hyperbole ayant pour axe de symétrie ox, pour foyer le foyer de la parabole et dont le demi-angle des asymptotes est α. Les sommets sont sur ox et ont pour abscisses les racines de l'équation

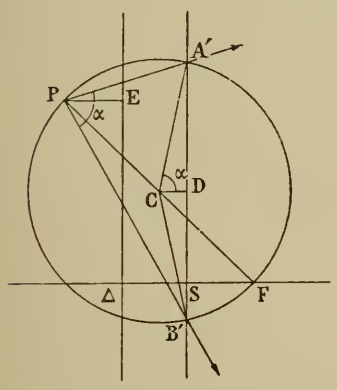
$$k^2\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+2px=0.$$

Ces deux nombres sont de part et d'autre du nombre $\frac{-p}{2}$, ainsi qu'il résulte immédiatement de ce fait que le résultat de la substitution de ce nombre est négatif, et aussi, géométriquement, de ce que l'une des directrices de l'hyperbole coïncide avec la directrice de la parabole, et en outre, de ce que l'hyperbole est tout entière à l'extérieur de la parabole.

L'une des branches, celle qui entoure la parabole, est le lieu des sommets des angles obtus égaux à $\pi-\alpha$, et circonscrits à la parabole; l'autre est le lieu des sommets des angles aigus, égaux à α (si α est aigu).

Tout ceci est évident géométriquement. Il suffit en effet de se rappeler la théorie de la construction des tangentes à la parabole menées par un point, et qui est basée sur ce fait que la podaire du foyer d'une parabole est la tangente au sommet.

On décrit sur PF comme diamètre un cercle et on prend les points de rencontre A′ et B′, avec la tangente au sommet; les deux tangentes issues du point P sont PA′ et PB′.



Si elles font entre elles l'angle α, cet angle est aussi l'angle du rayon CA′ de ce cercle avec la perpendiculaire abaissée du centre C sur la tangente au sommet. On a donc $CD = CA'\cos\alpha$, c'est-à-dire

$$\frac{CA'}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{CF}{CD}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

En doublant ces deux longueurs et en appelant PE la perpendiculaire abaissée de P sur la directrice, on voit que

$$\frac{PF}{PE}=\frac{1}{\cos\alpha}=e.$$

Le lieu du point P est donc une hyperbole qui a même foyer et même directrice que la parabole.

Sur la branche de droite, celle qui est comprise entre la parabole et la directrice, l'angle qui renferme la parabole dans son intérieur est obtus. Sur la branche de gauche, il est aigu. Ces deux angles sont α et $\pi-\alpha$.

2° L'enveloppe de AB est la conique polaire réciproque de cette hyperbole par rapport à la parabole. Nous avons donc à trouver l'enveloppe de la polaire du point (α,β) par rapport à la parabole

$$px-\beta y+p\alpha=0,$$

sachant que α et β vérifient la relation $\beta^2-2p\alpha=k^2\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2$.

Ceci nous montre que par un point quelconque (x, y) du plan il passe deux polaires de cette espèce. Pour les déterminer, nous éliminerons β entre les deux équations, et nous aurons

$$p^2(\alpha+x)^2-2p\alpha y^2-k^2y^2\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

L'enveloppe sera donnée en exprimant que cette équation du second degré en α a une racine double. L'équation en α s'écrit d'abord

$$(p^2-k^2y^2)\,\alpha^2+2\left(p^2x-py^2-p\frac{k^2}{2}y^2\right)\alpha+p^2x^2-k^2\frac{p^2y^2}{4}=0;$$

puis la condition pour qu'il y ait une racine double est

$$\left(px - y^2 - \frac{k^2y^2}{2}\right)^2 - (p^2 - k^2y^2)\left(x^2 - k^2\,\frac{y^2}{4}\right) = 0.$$

Elle contient en facteur y^2, et, comme y a été supposé différent de 0, il n'y a qu'à supprimer ce facteur et conserver l'autre. L'équation de l'enveloppe est donc

$$\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)^2 y^2 - 2px\left(1 + \frac{k^2}{2}\right) - \frac{k^4y^2}{4} + k^2x^2 + \frac{p^2k^2}{4} = 0,$$

ou

$$(1 + k^2)y^2 + k^2x^2 - px(2 + k^2) + \frac{p^2k^2}{4} = 0.$$

Cette équation s'écrit encore

$$y^2 - 2px + k^2\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right] = 0,$$

et cette dernière forme montre que l'enveloppe fait partie du faisceau linéaire déterminé par la parabole et le cercle de rayon nul qui a son centre au foyer.

Cette conique est donc une ellipse ayant pour axe de symétrie l'axe de la parabole, et ayant pour foyer et directrice adjointe le foyer et la directrice de celle-ci.

Il serait facile d'avoir une solution géométrique du problème en transformant la figure par polaires réciproques, la conique de base étant un cercle dont le centre est un foyer de la parabole. La parabole devient un cercle ; les tangentes PA et PB, deux points de ce cercle tels que la corde correspondante soit vue du centre sous un angle constant ; la polaire AB du point P devient le pôle de cette corde. La suite est évidente.

Louis SIRE, à Lyon.

Bonnes solutions : MM. Barisien ; Deperrois, à Chartres ; A. Courtois, à Douai ; Hugon, à Saint-Flour ; G. Foucry, à Reims ; Salleron, à Albi ; G. Lach, à Denain ; A. Rousseau, à Landrecies ; G. Esteben.

1815. — *Calculer approximativement, à un centième près autant que possible, la valeur de la série*

$$1 + \frac{\sin\varphi}{1} + \left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n + \cdots\cdots$$

où $\varphi = 29$ *degrés.*

La série proposée est évidemment convergente : en effet $u_n = \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n$ et $\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sin\varphi}{n}$, quantité qui tend vers 0 quand n grandit indéfiniment. Ceci prouve que la série est convergente quel que soit φ, et en particulier pour $\varphi = 29°$.

Cela posé, la règle à calculs donne $\sin\varphi = \sin 29° = 0{,}485$, $\frac{\sin\varphi}{2} = 0{,}243$, $\frac{\sin\varphi}{3} = 0{,}162$, $\frac{\sin\varphi}{4} = 0{,}121$ et $\frac{\sin\varphi}{5} = 0{,}0975$. Nous voyons donc que $\frac{\sin\varphi}{5}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$; par suite $\left(\frac{\sin\varphi}{5}\right)^5 < \frac{1}{10^5}$. Donc, en calculant chaque terme avec quatre décimales exactes, il suffira d'aller jusqu'à $\left(\frac{\sin\varphi}{4}\right)^4$.

Nous trouvons de même $\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}059$. $\left(\frac{\sin\varphi}{3}\right)^3 = 0{,}0043$. $\left(\frac{\sin\varphi}{4}\right)^4 = 0{,}0002$, et la somme de tous ces termes est 1,5485.

D'autre part, le reste de la série est plus petit que

$$\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^7}+\cdots \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{10^5}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9\times 10^4}.$$

Si donc nous prenons 1,54 pour somme de la série, nous commettons une erreur moindre que

$$\frac{85}{10^4}+\frac{4}{10^4}+\frac{1}{10^4}=\frac{90}{10^4}<\frac{1}{10^2}$$

La somme de la série calculée avec deux chiffres exacts est donc 1,54 et elle est très voisine de 1,55. C'est 1,55 à $\frac{1}{100}$ près, par excès.

Le calcul est non moins facile par logarithmes. Nous avons

$\log\sin 29^\circ = \bar{1},68557,\qquad \operatorname{colog} 2 = \bar{1},69897,\qquad \operatorname{colog} 3 = \bar{1},52288,\qquad \operatorname{colog} 4 = \bar{1},39794.$

Écrivons la série ainsi :

$$1+u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,$$

nous aurons

$\log u_1 = \bar{1},68557,\qquad \log\sqrt{u_2} = \bar{1},38454,\qquad \log\sqrt[3]{u_3} = \bar{1},20845,\qquad \log\sqrt[4]{u_4} = \bar{1},08351\,;$

par conséquent

$\log u_1 = \bar{1},68557,\qquad \log u_2 = \bar{2},76908,\qquad \log u_3 = \bar{3},62535,\qquad \log u_4 = \bar{4},33404.$

Les tables nous donnent immédiatement

$$u_1 = 0,4848,\qquad u_2 = 0,0601,\qquad u_3 = 0,0042,\qquad u_4 = 0,0002$$

et

$$1+u_1+u_2+u_3+u_4 = 1,5491.$$

Le reste s'achève comme précédemment et nous voyons que si 1,54 est la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{100}$ près, il vaut mieux prendre 1,55 qui est approché par excès, mais beaucoup plus approché que le nombre précédent.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; G. Foucry, à Reims ; A. Rousseau, à Landrecies ; Salleron, à Albi ; M Hugon, à Saint-Flour ; A. Courtois, à Douai.

1816. — *Deux points mobiles m et m' se déplacent sur deux droites* D *et* D' *données dans l'espace, sous l'action de forces accélératrices constantes. Ils partent de deux points* A *et* B *donnés sur* D *et* D', *où ils se trouvaient primitivement au repos ou animés de vitesses initiales connues, dirigées suivant les droites* D *et* D'.

On demande à quelle époque la distance qui les sépare sera minimum et quelle sera la grandeur de cette plus courte distance.

Examiner le cas où les vitesses initiales différant de zéro, les forces accélératrices seraient supposées nulles, et celui où les deux droites D *et* D' *étant dans un même plan, les deux points mobiles peuvent se rencontrer.*

Prenons pour axe des z la perpendiculaire commune aux deux droites, pour origine le milieu de cette perpendiculaire commune et pour axe des x la bissectrice des deux demi-droites qui indiquent les sens des mouvements des deux mobiles, ou des accélérations. Soient α l'angle de la première droite avec ox et h sa cote, $-\alpha$ l'angle de la seconde et $-h$ sa cote. Appelons ρ et ρ' les espaces comptés sur les deux droites à partir du pied sur chaque droite de la perpendiculaire commune. Nous aurons

$$\rho = a+vt+\frac{gt^2}{2},\qquad \rho' = a'+v't+\frac{g't^2}{2},$$

a, a' étant les valeurs de ρ et ρ' au temps $t=0$, v, v' les vitesses initiales et g, g' les accélérations.

Nous supposons les accélérations positives.

Les coordonnées du premier mobile sont alors $x=\rho\cos\alpha$, $y=\rho\sin\alpha$, $z=h$; celles du second, $x'=\rho'\cos\alpha$, $y'=-\rho'\sin\alpha$, $z'=-h$.

Le carré de la distance des deux points est donc

$$l^2 = (\rho - \rho')^2 \cos^2 \alpha + (\rho + \rho')^2 \sin^2 \alpha + 4h^2, \qquad \text{ou} \qquad l^2 = (\rho^2 + \rho'^2) - 2\rho\rho' \cos 2\alpha + 4h^2.$$

Pour qu'elle soit minimum, il faut que le trinome $\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos 2\alpha$ soit minimum.

Or c'est une fonction de t du quatrième degré ; par conséquent la dérivée est du troisième degré en t, et l'on ne peut rien dire de précis du cas général.

Supposons v et v' nuls, c'est-à-dire les deux points au repos à l'époque $t = 0$, ce que nous pouvons toujours réaliser dans le cas où les deux mobiles s'arrêtent en même temps. Alors $\rho = a + \frac{gt^2}{2}$, $\rho' = a' + \frac{g't^2}{2}$, et le trinome à étudier est un trinome bicarré en t,

$$\left(\frac{g - g'}{2} t^2 + a - a'\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{g + g'}{2} t^2 + a + a'\right)^2 \sin^2 \alpha,$$

ou

$$\frac{t^4}{4} [(g - g')^2 \cos^2 \alpha + (g + g')^2 \sin^2 \alpha] + t^2[(a - a')(g - g') \cos^2 \alpha + (a + a')(g + g') \sin^2 \alpha]$$
$$+ (a - a')^2 \cos^2 \alpha + (a' + a)^2 \sin^2 \alpha.$$

Le premier coefficient est positif ; le trinome est donc minimum pour la demi-somme des racines, c'est-à-dire pour

$$t^2 = -2 \frac{(a - a')(g - g') \cos^2 \alpha + (a + a')(g + g') \sin^2 \alpha}{(g - g')^2 \cos^2 \alpha + (g + g')^2 \sin^2 \alpha}.$$

D'après nos raisonnements, la valeur positive de t seule est acceptable, car nous supposons que les points partent effectivement des points a et a' avec des vitesses nulles. Si on envisage les mouvements complets donnés par les formules

$$\rho = a + \frac{gt^2}{2}, \qquad \rho' = a' + \frac{g't^2}{2},$$

les deux valeurs de t sont acceptables.

Supposons maintenant g et g' nuls ; alors $\rho = a + vt$, $\rho' = a' + v't$, et nous supposerons v et v' positifs. Dans ce cas, l^2 est un trinome en t,

$$[a - a' + (v - v')t]^2 \cos^2 \alpha + [(a + a') + (v + v')t]^2 \sin^2 \alpha,$$

ou

$$t^2 [(v - v')^2 \cos^2 \alpha + (v + v')^2 \sin^2 \alpha]$$
$$+ 2t [(a - a')(v - v') \cos^2 \alpha + (a + a')(v + v') \sin^2 \alpha]$$
$$+ (a - a')^2 \cos^2 \alpha - (a + a')^2 \sin^2 \alpha.$$

Ce trinome est minimum aussi pour la demi-somme des racines,

$$t = -\frac{(a - a')(v - v') \cos^2 \alpha + (a + a')(v + v') \sin^2 \alpha}{(v - v')^2 \cos^2 \alpha + (v + v')^2 \sin^2 \alpha}.$$

Voyons ce qui arrive dans le cas où les mobiles peuvent se rencontrer. Alors $h = 0$, et $\rho = 0$, $\rho' = 0$, au même temps t. Ceci s'exprime en écrivant que les deux équations en t,

$$\frac{gt^2}{2} + vt + a = 0, \qquad \frac{g't^2}{2} + v't + a' = 0,$$

ont une racine commune, ce qui donne $(ga' - ag')^2 - 2(gv' - vg')(va' - av') = 0$.

La racine commune aux deux équations, $t = 0$, est évidemment une des solutions de l'équation en t, et l'équation du troisième degré dont nous avons parlé antérieurement s'abaisse alors au deuxième degré. Il resterait à voir si les deux autres racines correspondent à des maximums ou minimums, c'est-à-dire à étudier le signe de la dérivée seconde pour chacune d'elles.

Si dans ce cas-là, on suppose encore $g = 0$, $g' = 0$; alors $\frac{v}{v'} = \frac{a}{a'}$, et en posant $\frac{a'}{a} = k$, $\frac{v'}{v} = k$, on trouve que, pour le minimum,

$$t = -\frac{(a-a')(v-v')\cos^2\alpha + (a+a')(v+v')\sin^2\alpha}{(v-v')^2\cos^2\alpha + (v+v')^2\sin^2\alpha} \quad \text{devient} \quad -\frac{av}{v^2}\,\frac{(1-k)^2\cos^2\alpha + (1+k)^2\sin^2\alpha}{(1-k)^2\cos^2\alpha + (1+k)^2\sin^2\alpha},$$

ou $t = -\dfrac{a}{v}$, ce qui est bien la valeur qui annule ρ et ρ'.

Bonne solution : M. G. Lach, à Denain.
Solutions satisfaisantes : MM. Hugon, lycée Louis-le-Grand ; A. Courtois, à Douai.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (*Concours de 1909.*)

1827. — *Un poids* P *de bioxyde de manganèse est divisé en deux parties,* p *et* $P - p$.

On chauffe p *avec un excès d'acide chlorhydrique jusqu'à cessation de tout dégagement gazeux, et l'on fait passer le gaz obtenu dans une solution concentrée et chaude de potasse. La solution est ensuite évaporée à sec, puis calcinée au rouge vif. Pendant la calcination on recueille le gaz qui se dégage ; il occupe le volume* V.

L'autre partie est calcinée au rouge, et le gaz recueilli occupe également le volume V.

1° *Quel est le rapport* $\dfrac{p}{P}$?

2° *On mélange le volume* 2V *de gaz à une petite quantité d'air occupant le volume* x. *Pour évaluer* x, *on introduit le volume total* $2V + x$ *dans un eudiomètre, et on le mélange à un volume double de bioxyde d'azote. La réaction terminée, on absorbe les vapeurs nitreuses par la potasse, et l'on constate le volume résiduel* V. *Tout calcul fait, on trouve* $x = 10^{cm^3}$.

On demande quel était le poids initial de bioxyde de manganèse P *et quelle quantité de bioxyde d'azote aurait été suffisante pour provoquer une réaction complète dans l'eudiomètre.*

On prendra $O = 16$, $Mn = 55$.

On admettra que tous les volumes sont mesurés dans les conditions normales 0° *et* 760^{mm}, *et que les molécules gazeuses occupent dans ces conditions* $22^l,32$.

Enfin, on supposera que l'air est formé simplement par le mélange de 79 *volumes d'azote avec* 21 *volumes d'oxygène.*

1° Une molécule-gramme de bioxyde de manganèse pesant 87 grammes, on met en jeu dans la première réaction une fraction de molécule égale à $\dfrac{p}{87}$, d'où

$$\frac{p}{87}\left\{MnO^2 + 4HCl = MnCl^2 + Cl^2 + 2H^2O\right\}.$$

Puisque la solution de potasse est concentrée et chaude, on a ensuite

$$\frac{p}{87}\left\{Cl^2 + 2KOH = \frac{5}{3}KCl + \frac{1}{3}ClO^3K + H^2O\right\}.$$

Enfin, le chlorate étant calciné au rouge, la réaction s'écrit

$$\frac{p}{87}\left\{\frac{1}{3}ClO^3K = \frac{1}{3}KCl + O\right\}.$$

Il résulte de là que le volume V est égal à

$$\frac{p}{87} \times 11^l,16.$$

La deuxième série de réactions donne de même

$$\frac{P-p}{87}\left\{MnO^2 = \frac{1}{3}Mn^3O^4 + \frac{2}{3}O\right\}.$$

Le volume V est donc encore égal à

$$\frac{P-p}{87} \times \frac{2}{3} \times 11^l,16.$$

En égalant ces deux valeurs de V, on trouve

$$p = \frac{2}{3}(P-p) \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{P} = \frac{2}{5}.$$

2° Le volume 2V est entièrement constitué par de l'oxygène ; on lui ajoute un volume x d'air ; donc, dans le volume total $2V + x$, on aura

$$2V + 0,21x \text{ d'oxygène} \qquad \text{et} \qquad 0,79x \text{ d'azote.}$$

On introduit $2V + x$ dans un eudiomètre et on ajoute un volume double, donc $4V + 2x$ de bioxyde d'azote. Celui-ci, au contact de l'oxygène, donne la réaction

$$AzO + O = AzO^2,$$

et le peroxyde d'azote est absorbé par la potasse. Dans cette réaction, le volume du bioxyde d'azote est double de celui de l'oxygène ; donc, au volume $2V + 0,21x$ d'oxygène, il s'est combiné $4V + 0,42x$ de bioxyde d'azote, de sorte que le volume V qui reste dans l'eudiomètre se compose de $0,79x$ d'azote et de $4V + 2x - (4V + 0,42x) = 1,58x$ de bioxyde d'azote, soit en tout $2,37x$. Remplaçons x par 10,

$$V = 23^{cm3},7.$$

Egalons à ce nombre la première expression de V :

$$\frac{p}{87} \times 11,160 = 23,7.$$

D'autre part, $P = \frac{5}{2}p$. On en déduit

$$P = \frac{5}{2} \times \frac{23,7 \times 87}{11,160} = 0^g,46.$$

Enfin, il y avait dans l'eudiomètre un volume d'oxygène $2V + 0,21x$; le volume de bioxyde d'azote suffisant pour provoquer une réaction complète eût été $4V + 0,42x$. En remplaçant V et x par leurs valeurs, on trouve

$$99^{cm3}.$$

Camille TEULIÈRE, à Toulouse.

Bonnes solutions de MM. Gérin, à Lyon, et Léonzi, lycée de Bordeaux.

Assez bonnes solutions de MM. Courtois et Nègre. MM. Lach et Manen ont supposé, entre l'oxygène et le bioxyde d'azote, des réactions complexes qui pourraient en réalité se produire dans une faible mesure, d'ailleurs impossible à déterminer, mais qui devaient être négligées ici.

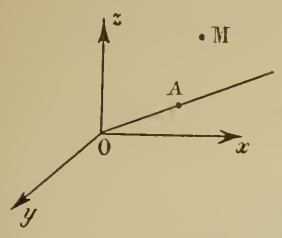
CONCOURS DE 1910

ÉCOLE CENTRALE

Géométrie analytique et Mécanique.

I. — Vecteur-vitesse et vecteur-accélération d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme : positions et expressions, sans démonstration. R rayon du cercle, ω vitesse angulaire.

II. — **1873**. Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, OA un axe fixe défini par le point



A de coordonnées x_0, y_0, z_0 ; M un point invariablement lié à l'axe OA et qui tourne autour de OA avec une vitesse angulaire constante ω. Donner, sans démonstration, les expressions des composantes suivant Ox, Oy, Oz du vecteur-vitesse du point M, à l'instant où ses coordonnées sont x_1, y_1, z_1. Le sens positif de la rotation est le sens direct par rapport à un observateur ayant les pieds en O et la tête en A (le sens direct est de gauche à droite).

Application numérique. — On donne $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, $z_0 = 8$, $x_1 = 18$, $y_1 = 14$, $z_1 = 11$. M fait 27 tours par minute sexagésimale autour de OA dans le sens positif. L'unité de temps est la seconde sexagésimale, l'unité de longueur le centimètre. Calculer les composantes suivant Ox, Oy, Oz du vecteur-vitesse de M, à un centimètre près.

III. — **1874**. On considère la conique (C)

$$x^2 + 4y^2 - 2py = 0$$

rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy ; p désigne un segment rectiligne donné. Dans son plan on prend un point M d'abscisse α et d'ordonnée β. On joint l'origine O à deux points P et P′ diamétralement opposés sur (C), et du point M on abaisse des perpendiculaires sur OP et OP′ ; soient Q et Q′ leurs pieds respectifs sur ces droites, les points P et P′ décrivant (C).

1° Etablir la relation à coefficients constants qui lie les coefficients angulaires m et m' de OP et de OP′.

2° Démontrer que la droite QQ′ passe par un point fixe ; soit S ce point. Calculer les coordonnées de S en fonction de celles de M.

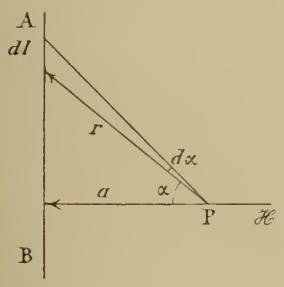
3° La conique (C) restant fixe, ainsi que Ox et Oy, le point M étant mobile et par suite aussi le point S qui lui correspond, on demande les lois du mouvement de M projeté sur Ox et Oy, dans l'hypothèse où le vecteur-accélération de M, pour chacune de ses positions, est le vecteur MS correspondant. On supposera qu'à l'instant pris pour origine du temps la vitesse de M est nulle et que ses coordonnées α_0 et β_0 sont données positives.

4° Construire la trajectoire du point M et discuter le sens de son mouvement sur cette trajectoire.

(8 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique et Chimie.

I. — Etablir par le calcul la formule donnant les conditions de sensibilité d'une balance lorsque les trois axes parallèles de suspension ne sont pas dans un même plan ; décrire la méthode de pesée à charge constante.



II. — **1875**. Un fil AB indéfini, d'épaisseur négligeable, est chargé uniformément d'électricité de densité λ par unité de longueur ; écrire l'expression de la composante du champ $\mathcal{H}$ produit par un élément dl en un point P à distance a du fil et en déduire le champ $\mathcal{H}$ en ce point P.

Calcul numérique — Trouver dans le système des unités électrostatiques la valeur de $\mathcal{H}$, sachant que la charge du fil est de $4^{\text{coulombs}},5$ par kilomètre et que le point P est à 3^{m} du fil ($K = 1$).

III. — Acide orthophosphorique.

IV. — **1876**. A. — On chauffe $2^{\text{g}},5$ d'un mélange parfaitement sec d'oxalate neutre de potassium ($C^2O^4K^2$) et de formiate de potassium ($H\text{-}CO^2K$) avec un excès d'acide sulfurique concentré. Il se dégage un mélange gazeux qu'on recueille dans un tube eudiométrique gradué sur la cuve à mercure.

B. — Dans cet eudiomètre on introduit une solution aqueuse froide de potasse en excès et on agite. On absorbe ainsi un volume gazeux égal à $0^{\text{l}},223$.

C. — On fait passer dans l'eudiomètre, contenant avec la solution de potasse un résidu gazeux, une masse de peroxyde de sodium telle qu'après le passage de l'étincelle le volume gazeux soit nul.

On demande :

1° La composition du mélange salin initial employé pour réaliser l'expérience A ;

2° La nature du gaz absorbé par la potasse pendant l'opération B. Ecrire la réaction ;

3° Quelles réactions se passent en C, quel est le volume du gaz produit après l'introduction du peroxyde de sodium.

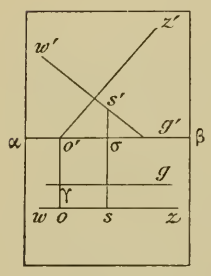
Calculer la masse du peroxyde de sodium.
On supposera que les réactions sont complètes et qu'il n'y a pas de pertes.
On ne fera pas les corrections de température, pression, etc.
Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(8 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

Epure de géométrie descriptive.

1877. — Titre extérieur : Hyperboloïde et cône. — Titre intérieur : Solide commun.
Le cadre a 270mm sur 450mm, αs est le petit axe du cadre. Les lignes de rappel sont perpendiculaires à $\alpha\beta$.

$\alpha o' = 50^{mm}$, $oo' = s\sigma = 110^{mm}$, $o'\sigma = os = 90^{mm}$, $s'\sigma = 45^{mm}$, $o\gamma = 40^{mm}$.



Une surface gauche de révolution a pour axe la droite de front oz, $o'z'$ qui fait avec un plan horizontal un angle de 45°. Elle est engendrée par la droite g, g' parallèle aux deux plans de projection. Un cône de révolution a pour sommet le point s, s' et pour axe la droite de front sw, $s'w'$ qui fait avec un plan horizontal un angle de 45°. Une des génératrices du cône est verticale.

On demande de représenter par ses deux projections la partie solide et opaque du cône intérieure à l'hyperboloïde et limitée à une sphère de rayon 130mm dont le centre est le point d'intersection des axes SW et OZ.

Mise à l'encre. — Le résultat seul est à l'encre noire, les lignes vues en traits pleins, les lignes cachées en points ronds. Les constructions sont faites à l'encre rouge, traits pleins.

On déterminera un point quelconque de chaque courbe et la tangente en ce point, les points et tangentes remarquables.

Nota. — Les tangentes seront tracées en traits rouges pleins, un peu plus visibles aux environs du point de contact.

(9 juin, de 9 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

Problème

1878. — Résoudre un triangle ABC connaissant l'angle B, la longueur a du côté BC et la somme k^2 des carrés du côté AC et de la hauteur AD issue de A :

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = k^2.$$

On pourra prendre pour inconnue le côté AB. Indiquer dans quels cas le problème est possible, combien il a de solutions et dans quels cas l'angle A est aigu, droit ou obtus.

Trouver le minimum de k^2 pour des valeurs données de a et de B et, dans le cas où k^2 est égal à ce minimum, calculer tg A et tg C en fonction de tg B.

Calcul logarithmique

1879. — En désignant par A les $\frac{3}{7}$ d'un angle droit, calculer, soit en grades, soit en degrés, tous les angles x positifs et inférieurs à quatre angles droits qui vérifient l'équation

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt[3]{\frac{32425 \operatorname{tg} A}{85664 \sin 3A}}.$$

(9 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Août 1910. N° 11.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES SURFACES RÉGLÉES DU TROISIÈME ORDRE (*fin*)

par M. **Gaston Cotty**, élève à l'école normale supérieure.

Coniques réduites a une droite double. — On doit avoir identiquement

$$A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3 + D\varphi_4 = (m\alpha + n\beta)^2.$$

Un calcul analogue au précédent montre qu'on a, pour déterminer m et n, l'équation du second degré $\Delta(a)m^2 + \Delta(e)mn - \Delta(b)n^2 = 0$.

Théorème III. — *Si* $[\Delta(e)]^2 + 4\Delta(a)\Delta(b) \neq 0$, *il y a deux droites doubles distinctes* D′ *et* D″.

Théorème IV. — *Si* $[\Delta(e)]^2 + 4\Delta(a)\Delta(b) = 0$, *les deux droites doubles sont confondues suivant une droite* D‴.

Plaçons-nous dans ce cas et cherchons ce qu'est devenue (D_1), définie précédemment. (D_1) passe au point fixe, car $r = 0$, mais pour (D‴) on a $m\Delta(a) + q\dfrac{\Delta(e)}{2} = 0$.
Donc (D_1) et (D‴) coïncident.

Cependant, dans ce dernier cas, les coniques ne passent que par le seul point fixe $(\alpha = 0, \quad \beta = 0)$.

Ce cas a nécessairement échappé à la discussion de M. Parrod.

Appliquons les résultats géométriques précédents à l'étude de la surface

$$X = \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma), \qquad Y = \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma), \qquad Z = \varphi_3(\alpha, \beta, \gamma), \qquad T = \varphi_4(\alpha, \beta, \gamma).$$

Premier cas. — Les deux droites doubles du faisceau ponctuel du troisième ordre défini par les coniques $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ *sont distinctes.*

On peut prendre ces deux droites doubles pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

(D_1) ne passe certainement pas en $\alpha = 0$, $\beta = 0$; prenons-la pour $\gamma = 0$. Quatre coniques du faisceau sont, en vertu des théorèmes précédents, $\alpha^2 = 0$, $\beta^2 = 0$, $2\alpha\gamma = 0$, $2\beta\gamma = 0$.

On pourra donc trouver un certain tétraèdre de référence par rapport auquel la surface aura pour équations

$$X = \alpha^2, \qquad Y = \beta^2, \qquad Z = 2\alpha\gamma, \qquad T = 2\beta\gamma, \qquad \text{ou} \qquad YZ^2 - XT^2 = 0,$$

surface du troisième degré admettant comme directrice rectiligne double la droite $(Z = 0, \quad T = 0)$ et comme directrice simple la droite $(X = 0, \quad Y = 0)$. Inversement, il est bien facile de prouver que toute surface du troisième degré réglée peut se mettre sous la forme précédente, pourvu que ses deux directrices soient distinctes.

Pour retomber sur les équations de M. Parrod, il nous suffit de prendre pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ deux droites telles que les droites doubles aient pour équations

$$\left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - h^2}\right)\alpha + \beta = 0, \qquad \left(\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - h^2}\right)\alpha + \beta = 0,$$

$\gamma = 0$ restant toujours (D_1).

Quatre coniques du faisceau seront alors $\alpha\gamma = 0$, $\beta\gamma = 0$, $h\alpha^2 + a\alpha\beta = 0$, $\beta^2 - h^2\alpha^2 = 0$ et on en déduit facilement pour x, y, z les expressions mêmes, données dans la note citée.

Deuxième cas. — Les deux droites doubles du faisceau ponctuel sont confondues.

D_1, D' et D'' sont alors confondues suivant une même droite passant au point fixe. Prenons cette droite pour $\alpha = 0$, $\alpha^2 = 0$ est une conique du faisceau.

Je mène par le point fixe une droite quelconque $\beta = 0$, distincte de $\alpha = 0$; elle forme conique du faisceau avec : 1° une droite $\gamma = 0$ ne passant pas au point fixe; 2° la droite $\alpha = 0$. Ceci en vertu des théorèmes démontrés ci-dessus.

Trois coniques du faisceau sont alors $\alpha^2 = 0$, $2\beta\gamma = 0$, $2\alpha\beta = 0$.

Dans la quatrième conique on peut supposer qu'on a fait disparaître les termes en α^2, $\beta\gamma$, $\alpha\beta$; son équation est donc de la forme $\beta^2 + 2k\alpha\gamma = 0$.

On doit avoir $[\Delta(e)]^2 + 4\Delta(a)\Delta(b) = 0$.

On vérifie aisément que, quel que soit k, on a $\Delta(e) = 0$, $\Delta(a) = 0$ et que la condition est vérifiée.

On peut donc prendre $X = \alpha^2$, $Y = \beta^2 + 2\alpha\gamma$, $Z = 2\alpha\beta$, $T = 2\beta\gamma$.

L'équation de la surface est donc $Y^3 - 4X(YT - 2XZ) = 0$.

C'est une surface du troisième ordre où les deux directrices sont confondues sur $X = 0$, $Y = 0$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si les coordonnées d'un point d'une surface s'expriment rationnellement à l'aide des premiers membres des équations des quatre coniques* $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, *la surface est une surface réglée du troisième ordre :*

1° *à directrices distinctes si* $\Delta(a)\Delta(b) + 4[\Delta(e)]^2 \neq 0$;

2° *à directrices confondues si* $\Delta(a)\Delta(b) + 4[\Delta(e)]^2 = 0$.

Il est facile de prouver la réciproque de ce théorème.

Nous avons ainsi obtenu la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface réglée du troisième ordre soit une surface de Cayley.

Surfaces de Cayley. — Les propriétés de ces surfaces de Cayley diffèrent notablement des propriétés des surfaces à directrices distinctes.

Ainsi, tandis que les lignes asymptotiques de celles-ci sont des quartiques gauches unicursales dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, quartiques étudiées par M. Ch. Michel dans la *Revue* d'Octobre 1908, les lignes asymptotiques des surfaces de Cayley sont des cubiques gauches.

Voici une construction géométrique de ces surfaces très connue : Par le point double d'une cubique plane unicursale, menons une droite (Δ) ; soit (m) un point de (Δ), (M) un plan passant par (Δ) ; supposons que (m) et (M) se correspondent homographiquement. Joignons (m) au point d'intersection (n) de (M) avec la cubique ; la droite mn engendre une surface de Cayley.

Il est facile de le vérifier en remarquant que la surface est du troisième degré et qu'il n'y a qu'une directrice rectiligne.

Inversement, toute surface de Cayley peut être construite d'une infinité de manières par le procédé ci-dessus décrit.

Revenons au calcul précédent : toute surface de Cayley peut être ramenée à la forme

$$Y^3 - 4X(YT - 2XZ) = 0.$$

Coupons la surface par le plan (M), $Y - \lambda X = 0$.

On voit facilement que le point (m) d'intersection de la directrice $X = 0$, $Y = 0$ avec la droite de la surface située dans le plan (M) est 0, 0, $\frac{\lambda}{2}$, 1.

La correspondance homographique entre (M) et (m) est évidente.

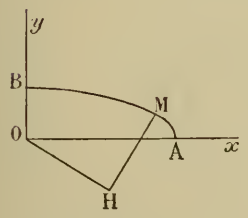
D'autre part, la section de la surface par un plan quelconque est, comme on s'en assure aisément, une cubique ayant un point double sur $(X = 0, \quad Y = 0)$. Ceci achève de démontrer la proposition énoncée.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Concours de 1909 (*fin*).

1818. — *On considère le quadrant* AB *d'une ellipse qui a pour demi axes a et b.*

On demande :



OA = 3m,
OB = 1m,
OH = 2m.

1° *De déterminer le pied* M *de la normale qui passe à une distance du centre égale à* $a - b$;

2° *De calculer la différence de longueur des deux arcs* AM *et* MB *en supposant* $a = 3^m$ *et* $b = 1^m$.

On prendra pour variable le paramètre φ *qui représente un point quelconque de l'ellipse par les formules* $\quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$

Pour déterminer la position du point M *on formera l'équation qui donne la valeur correspondante de* φ, *puis on cherchera cette valeur pour*

$$a = 3^m, \quad b = 1^m.$$

On écrira ensuite l'expression des deux intégrales qui représentent les longueurs AM *et* MB, *et on les calculera en employant* 5 *trapèzes pour la première et* 10 *pour la seconde : la longueur des arcs sera exprimée en centimètres, et l'approximation devra être supérieure au demi-centimètre.*

Dans les opérations logarithmiques il est inutile d'interpoler.

1° La normale au point (x, y) a pour équation $\quad Xa \sin \varphi - Yb \cos \varphi = (a^2 - b^2) \sin \varphi . \cos \varphi.$

Sa distance à l'origine sera égale à $a - b$ si l'on a $\quad a - b = \dfrac{(a^2 - b^2) \sin \varphi . \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$

ou, en élevant les deux termes au carré, $\quad (a + b)^2 \sin^2 \varphi . \cos^2 \varphi = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$ ou enfin, en développant les calculs, $(a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi)^2 = 0,$

ou
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}.$$

La solution $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ ou en degrés $\varphi = 30$ est visiblement ici celle qui convient.

La différentielle d'un arc d'ellipse est donnée par

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)\, d\varphi^2,$$

ds se présente sous la forme d'un radical que l'on peut rendre calculable logarithmiquement en employant la méthode classique, c'est-à-dire en posant ici $\quad \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} = 3 \operatorname{tg} \varphi,$ en tenant compte des valeurs de a et b.

On a alors pour ds^2 $\quad ds^2 = \dfrac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha}\, d\varphi^2, \quad$ ou $\quad ds = \dfrac{\cos \varphi}{\cos \alpha}\, d\varphi = y\, d\varphi,$

avec un sens convenable pour les arcs croissants ; et par suite pour les deux arcs AM et BM on a

$$s = \text{arc AM} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha}\, d\varphi \qquad \text{et} \qquad s' = \text{arc BM} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha}\, d\varphi.$$

Il suffit pour avoir des valeurs approchées de ces intégrales de calculer les valeurs de y pour cha-

cune des valeurs de φ, 0°, 6°, 12°, 18°, 24°, 30°, dans le premier cas ; et pour le second arc pour les valeurs 30°, 36°, 42°, 48°, 54°, 60°, 66°, 72°, 84°, 90° qui vont également de 6° en 6°.

Les formules permettant le calcul logarithmique sont les suivantes :

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} \varphi + \log 3 = \log \operatorname{tg} \varphi + 0{,}47712, \qquad \log y = \log \cos \varphi + \operatorname{colog} \cos \alpha.$$

On peut alors dresser le tableau suivant, dans lequel on garnit simultanément les colonnes portant en titre : log tg φ et log cos φ (celle-ci ayant été mise à la 5me place pour la commodité des calculs), puis ensuite la colonne log tg α, puis de même les autres colonnes jusqu'à la dernière qui donne y (les valeurs de y correspondant à 0° et à 90° ont été calculées directement.)

φ	log tg φ	log tg α	log cos α	colog cos α	log cos φ	log y	y
0°	»	»	»	»	»	»	1
6°	$\bar{1}$,02162	$\bar{1}$,49874	$\bar{1}$,97942	0,02058	$\bar{1}$,99761	0,01819	1,043
12°	$\bar{1}$,32747	$\bar{1}$,80459	$\bar{1}$,92595	0,07405	$\bar{1}$,99040	0,06445	1,160
18°	$\bar{1}$,51178	$\bar{1}$,98890	$\bar{1}$,85497	0,14503	$\bar{1}$,97821	0,12324	1,328
24°	$\bar{1}$,64858	0,12570	$\bar{1}$,77761	0,22239	$\bar{1}$,96073	0,18312	1,524
30°	$\bar{1}$,76144	0,23856	$\bar{1}$,69897	0,30103	$\bar{1}$,93753	0,23856	1,732
30°	$\bar{1}$,76144	0,23856	$\bar{1}$,69897	0,30103	$\bar{1}$,93753	0,23856	1,732
36°	$\bar{1}$,86126	0,33838	$\bar{1}$,62021	0,37979	$\bar{1}$,90796	0,28775	1,940
42°	$\bar{1}$,95444	0,43156	$\bar{1}$,54059	0,45941	$\bar{1}$,87107	0,33048	2,140
48°	0,04556	0,52268	$\bar{1}$,45843	0,54157	$\bar{1}$,82551	0,36708	2,329
54°	0,13874	0,61586	$\bar{1}$,37185	0,62815	$\bar{1}$,76922	0,39737	2,497
60°	0,23856	0,71568	$\bar{1}$,27668	0,72332	$\bar{1}$,69897	0,42229	2,644
66°	0,35142	0,82854	$\bar{1}$,16631	0,83369	$\bar{1}$,60931	0,44300	2,773
72°	0,48822	0,96534	$\bar{1}$,03226	0,96774	$\bar{1}$,48998	0,45772	2,869
78°	0,67253	1,14965	$\bar{2}$,84897	1,15103	$\bar{1}$,31788	0,46891	2,944
84°	0,97838	1,45550	$\bar{2}$,54282	1,45718	$\bar{1}$,01923	0,47641	2,995
90°	»	»	»	»	»	»	3
	log tg φ	log tg α	log cos α	colog cos α	log cos φ	log y	y

Si l'on remarque que 6° valent en radians $\frac{\pi}{30}$, on voit que le premier arc est, d'après la méthode des trapèzes,

$$s = \frac{\pi}{60}\left\{1 + 2\,(1{,}043 + 1{,}160 + 1{,}328 + 1{,}524) + 1{,}732\right\} = 0^{m}{,}672.$$

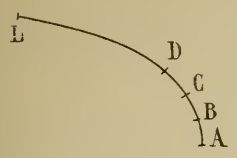
Un calcul analogue donnera $s' = 2^{m}{,}668$.

La différence des deux arcs est donc à $1/2^{cm}$ près et en centimètres :

$$s' - s = 200^{cm}.$$

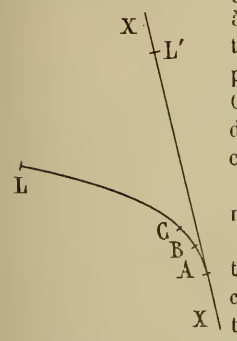
Remarque. — Dans la question 1818 on demande le calcul approché de la longueur d'un arc d'ellipse. Il est parfois utile de pouvoir mesurer de façon rapide la longueur d'un tel arc, ou plus généralement d'un arc de courbe quelconque, ce qui permet, en particulier, d'avoir une vérification précieuse de calculs parfois très longs. Les méthodes sont assez nombreuses pour cela.

Il existe des instruments particuliers appelés curvimètres qui permettent d'effectuer assez rapidement ces mesures, mais il peut se faire que l'on n'en ait pas à sa disposition. Les ingénieurs et les calculateurs employent alors souvent un compas à ouverture fixe (on prend par exemple un demi-centimètre), compas que l'on déplace sur la courbe de AB en BC, puis en CD, etc... Il suffit de compter le nombre des segments pour avoir une



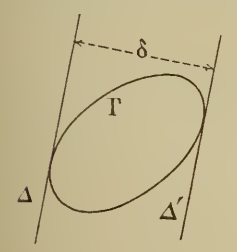
valeur approximative de la longueur AL cherchée. Cette méthode a l'inconvénient de ne pas tenir suffisamment compte de la courbure de la courbe : par exemple sur la figure on voit que de A en B l'ouverture du compas est trop grande, tandis que pour une portion à grand rayon de courbure une ouverture de compas plus grande eut suffi.

Il est préférable d'employer la méthode suivante, qui est moins connue en France que la précédente ; on prend une bande de papier transparent de longueur suffisante sur laquelle on a tracé une droite XX (Il suffira par exemple de prendre un des rouleaux de papier transparent gommé que l'on trouve dans le commerce). On place cette droite tangentiellement en A à la courbe et à l'aide d'une pointe fine, par exemple une aiguille, ou la pointe fine d'un tire-ligne on pique le point voisin de XX : B ; on fait tourner la feuille de papier transparent autour de B pour l'amener à être tangente à nouveau à la courbe, et l'on pique C, etc... Cette méthode qui donne en AL′ la longueur cherchée a l'avantage de permettre de rapprocher les points A, B,.. autant qu'on le veut quand la courbure est forte et au contraire de les prendre éloignés les uns des autres quand la courbure est faible (1).



On arrive ainsi assez aisément à obtenir le centième comme erreur relative de la mesure.

Signalons encore une méthode plus difficile à justifier qui donne d'excellents résultats dans la pratique. Prenons un contour convexe Γ et deux tangentes parallèles Δ, Δ′ à ce contour d'écartement δ. Quand la direction de Δ varie de façon arbitraire, on démontre que la valeur moyenne de δ est le diamètre d'un cercle isopérimètre. Il suffira donc pour appliquer cette propriété de placer une feuille de papier transparent au-dessus de Γ et de mesurer chaque fois la valeur de δ ou mieux de marquer par un point sur la feuille de papier transparent cette distance, et de prendre approximativement la valeur moyenne des valeurs de δ ainsi obtenues, ou si l'on veut le centre de gravité des points obtenus pour avoir le diamètre du cercle isopérimètre (2).



Il va sans dire que cette méthode s'applique à un arc convexe quelconque en lui adjoignant la corde qui le sous-tend pour former un contour convexe fermé.

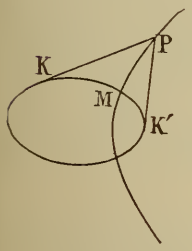
Dans le cas particulier de la question 1818 il suffisait pour avoir une vérification numérique de prendre l'une quelconque des formules approximatives usuelles donnant la longueur du quart de l'ellipse de demi-axes a et b. Par exemple on prend quelquefois

$$L = a + 0{,}2732\, b + 0{,}2976\, \frac{b^2}{a}$$

ou mieux encore la formule suivante : $L = \dfrac{a^2 + b^2 + (\pi - 2)\, ab}{a + b}$,

que l'on retrouve aisément en cherchant une fraction rationnelle du second degré en a et b, symétrique et qui donne les valeurs connues de L dans les hypothèses : a ou b nuls, a égal à b (3).

A. SAINTE-LAGUE, Professeur au lycée de Douai.



Autre remarque. — On sait que si P désigne un point de l'hyperbole homofocale qui passe en M, on a, entre les longueurs PK, PK′ et les arcs MK, MK′ la relation

$$PK - PK' = \text{arc } MK - \text{arc } MK'.$$

Ici l'hyperbole $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ est homofocale à l'ellipse proposée et passe au point de coordonnées 3 et 1.

En plaçant P en ce point, on a précisément

$$\text{arc } MK - \text{arc } MK' = 3 - 1 = 2.$$

C'est la longueur qui était demandée.

Très bonne solution de M. G. Foucry, à Reims.

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Denain ; Névejans ; A. Rousseau.

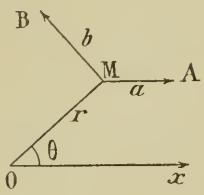
(1) Les Anglais se servent pour des constructions analogues d'une aiguille emmanchée sur une tige de bois qu'ils appellent : « pricker ».

(2) Les résultats sont naturellement d'autant plus précis qu'il y a un plus grand nombre de mesures de δ Pour avoir une idée de la précision que l'on peut ainsi obtenir, indiquons que, avec deux mesures seulement de δ dans le cas de l'ellipse du N° 1818, on obtient pour la longueur totale (en prenant par exemple les axes comme mesures de δ) 12,5664.. au lieu de 13.360.. Avec deux autres mesures, l'on aurait une erreur relative de 1/200 environ.

(3) L'application numérique de cette formule donne ici pour L la valeur : 3,356 alors que le calcul approché demandé donne : 3,340.

1819. — *Un point se meut dans un plan de telle façon que le vecteur représentant sa vitesse soit à chaque instant la résultante de deux vecteurs constants : l'un, de direction fixe ; l'autre, perpendiculaire au rayon joignant le point à une origine fixe. Trouver la trajectoire et déterminer l'accélération.*

Prenons pour pôle le point fixe O, et, pour axe polaire, une parallèle au vecteur constant MA, orientée dans le même sens, et orientons le plan dans le sens de rotation indiqué par le second vecteur MB. La vitesse de glissement est alors $v_R = \frac{dr}{dt} = a\cos\theta$ et la vitesse de circulation est $v_P = r\frac{d\theta}{dt} = b - a\sin\theta$.



En divisant ces deux équations membre à membre, nous avons

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{a\cos\theta}{b - a\sin\theta}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dr}{r} = \frac{-d(b - a\sin\theta)}{b - a\sin\theta};$$

et, par conséquent, $$L\frac{r}{C} = -L(b - a\sin\theta), \qquad r = \frac{C}{b - a\sin\theta}.$$

Cette équation peut s'écrire encore $$r = \frac{C}{b + a\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Sous cette forme, nous voyons que la trajectoire est une conique qui a un foyer à l'origine, dont le paramètre est $\frac{C}{b}$, l'excentricité $\frac{a}{b}$ et telle que l'angle du périhélie avec l'axe polaire soit égal à $\frac{-\pi}{2}$.

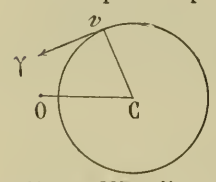
D'autre part, nous voyons que $$r\frac{d\theta}{dt} = b - a\sin\theta = \frac{C}{r}; \qquad \text{donc} \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = C;$$

le mouvement a lieu suivant la loi des aires et la constante C est justement la constante des aires. L'accélération est centrale et donnée par la formule de Binet

$$\gamma = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right] = -\frac{8C}{r^2}.$$

Nous voyons finalement que le mouvement est le même que celui des corps du système solaire autour du soleil ; si $\frac{a}{b} < 1$, c'est le mouvement des planètes.

Ceci peut s'apercevoir géométriquement : en effet, pour avoir l'hodographe, il faut construire un vecteur Ov qui soit la somme géométrique de MA et de MB, et, pour cela, il suffit de mener le vecteur fixe OC équipollent à MA, et, par le point C, le vecteur Cv équipollent à MB ; le lieu du point v est donc un cercle ayant pour centre le point C et pour rayon MB $= b$. L'accélération, qui est la vitesse du point v, est donc un vecteur $v\gamma$ tangent au cercle C et, par suite, perpendiculaire à Cv, c'est-à-dire à MB ; l'accélération est donc centrale ; le mouvement a lieu suivant la loi des aires, et, d'après un théorème connu, c'est un mouvement analogue à celui des planètes.



Réciproquement, on voit que dans le mouvement des planètes, l'hodographe est un cercle dont le centre est un point C différent de O. Par conséquent, tout mouvement de ce genre jouit de la propriété indiquée dans l'énoncé.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Landrecies ; J. Gérin, école des Anglais, à Lyon ; G. Foucry, à Reims.
Assez bonnes solutions : MM. R. Manen, à Albi ; G. Lach, à Denain ; A. Courtois ; J. Delens, à Rouen ; L. Simon, à Montbéliard ; A. Pavillon, à Rouen ; Névejans, 27e d'artillerie ; J. Soubaigné.

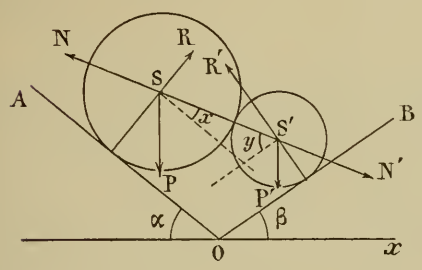
1820. — *Deux sphères homogènes pesantes* S *et* S′, *de rayons différents, reposent sur deux plans* OA, OB, *qui se coupent suivant une horizontale et forment des angles donnés* α, β *avec le plan horizontal. En*

outre ces deux sphères sont tangentes entre elles. Trouver la position d'équilibre du système en supposant que tous les frottements soient négligeables.

Pour déterminer la position des sphères, nous déterminerons les angles que fait la ligne des centres avec des parallèles à OA et à OB ; ces angles sont marqués x et y sur la figure, et l'on a déjà entre eux la relation

$$x + y = \alpha + \beta,$$

car il est évident que la ligne des centres doit être dans un plan vertical perpendiculaire à l'arête du dièdre formé par les deux plans.



Cela posé chaque sphère est en équilibre sous l'action de trois forces : son poids, la réaction du plan qu'elle touche et la réaction de l'autre sphère. Pour S, ces forces sont P, R et N ; pour S', ce sont P', R' et $N' = -N$.

La force P, décomposée suivant la normale et la droite SS', donnera une force égale et opposée à R et une égale et opposée à N ; cette dernière est donnée par $\frac{N}{\sin\alpha} = \frac{P}{\cos x}$.

De même la force P', décomposée suivant la normale au plan OB et la droite S'S, donnera une force égale et opposée à R' et une force égale et opposée à N' ; cette dernière est donnée par

$$\frac{N'}{\sin\beta} = \frac{P'}{\cos y}.$$

Il n'y a plus qu'à égaler N et N' ; ceci donne $\frac{P\sin\alpha}{\cos x} = \frac{P'\sin\beta}{\cos y}$, ou encore

$$\frac{\cos x}{P\sin\alpha} = \frac{\cos y}{P'\sin\beta} = \frac{\cos x + \cos y}{P\sin\alpha + P'\sin\beta} = \frac{\cos x - \cos y}{P\sin\alpha - P'\sin\beta}.$$

Les deux derniers rapports nous donnent $\operatorname{tg}\frac{y-x}{2}\operatorname{tg}\frac{y+x}{2} = \frac{P\sin\alpha - P'\sin\beta}{P\sin\alpha + P'\sin\beta}$.

$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ est connu ; donc nous avons de suite $\operatorname{tg}\frac{y-x}{2}$ ou $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}$, suivant le signe du second membre, et, par suite, nous connaissons les angles x et y.

La direction de la droite $\overline{SS'}$ est alors connue ; comme le segment SS' a une longueur donnée, il est facile de le placer entre les deux parallèles à OA et OB menées dans l'intérieur de l'angle AOB, à des distances respectives de OA et OB égales à R et R', rayons des deux sphères.

Le calcul est facile : supposons, pour fixer les idées, $P\sin\alpha > P'\sin\beta$, et posons $\operatorname{tg}\varphi = \frac{P'\sin\beta}{P\sin\alpha}$;

nous aurons $\operatorname{tg}\frac{y-x}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$, et les calculs seront entièrement logarithmiques. Cette formule nous donnera $\frac{y-x}{2}$ = un certain angle γ ; d'autre part, $\frac{y+x}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$; donc

$$y = \frac{\alpha+\beta}{2} + \gamma \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma.$$

Bonnes solutions : MM. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; J. Delens, à Rouen ; G. Lach, à Denain ; Prévot. J. Gérin, à Lyon ; A. Rousseau, à Landrecies ; G. Guillaume ; A. Pavillon, à Rouen ; A. Courtois ; G. Foucry, à Reims ; J. Bing.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1783. — *On donne une sphère* S *et une droite* D ; *par la droite, on fait passer un plan variable et l'on considère toutes les quadriques circonscrites à la sphère le long de la courbe d'intersection de la sphère et du plan.*

1° *Le lieu des pôles d'un plan fixe* P *par rapport aux quadriques considérées est un plan qui tourne autour d'une droite fixe* Δ, *quand la droite* D *se déplace dans un plan passant par le centre de la sphère.*

2° *On fait alors pivoter le plan* P *autour d'un point* A ; *trouver le lieu du point de rencontre de ce plan avec la droite* Δ. *Ce lieu est une quadrique* Σ *bitangente à la sphère* S. *Etudier la nature de cette quadrique quand le point* A *varie.*

3° *Trouver l'enveloppe des plans des courbes communes à la sphère et à la quadrique* Σ *quand le point* A *décrit un plan ou une sphère.*

Etude géométrique de la question.

1. Prenons comme origine le centre de la sphère et comme plan des xy le plan diamétral qui contient la droite D. L'équation de la sphère est alors

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

et la droite D peut être représentée par les équations $Ax + By + C = 0$, $z = 0$.

Un plan quelconque passant par cette droite a une équation de la forme

$$\Pi \equiv Ax + By + \lambda z + C = 0,$$

et les quadriques circonscrites à la sphère le long de la courbe d'intersection avec ce plan ont pour équation générale

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + \mu\Pi^2 = 0.$$

Soit maintenant un plan fixe $P \equiv ux + vy + wz + h = 0$.

Les coordonnées du pôle de ce plan par rapport à la quadrique (1) sont définies par les équations

$$\frac{x + \mu A\Pi}{u} = \frac{y + \mu B\Pi}{v} = \frac{z + \mu\lambda\Pi}{w} = \frac{-R^2 + \mu C\Pi}{h},$$

et nous aurons le lieu de ce point en éliminant λ et μ entre ces trois équations.

Multiplions les deux termes du premier rapport par C, ceux du quatrième par $-A$, puis ajoutons terme à terme, nous obtenons le rapport égal $\dfrac{Cx + AR^2}{Cu - Ah}$; ajoutons de même les deuxième et quatrième rapports après les avoir multipliés haut et bas par C et $-B$, nous avons le nouveau rapport $\dfrac{Cy + BR^2}{Cv - Bh}$. Il en résulte que l'équation du lieu est

$$\frac{Cx + AR^2}{Cu - Ah} = \frac{Cy + BR^2}{Cv - Bh}, \qquad \text{ou} \qquad C(vx - uy) + A(hy + vR^2) - B(hx + uR^2) = 0 ;$$

cette équation représente un plan qui tourne autour de la droite fixe

$$(\Delta) \qquad hx + uR^2 = 0, \qquad hy + vR^2 = 0,$$

lorsque A, B, C varient, c'est-à-dire quand la droite D se déplace dans le plan des xy.

Cette droite Δ est perpendiculaire au plan des xy, c'est la droite conjuguée par rapport à la sphère de la trace du plan P sur le plan des xy.

2. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A. Pour avoir l'équation du lieu demandé il faut éliminer u, v, w et h entre les équations

$$(2) \qquad ux + vy + wz + h = 0, \qquad ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0, \qquad hx + uR^2 = 0, \qquad hy + vR^2 = 0.$$

Eliminons d'abord w entre les deux premières, nous avons

$$u(xz_0 - zx_0) + v(yz_0 - zy_0) - h(z - z_0) = 0,$$

et comme les deux autres s'écrivent $\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{h}{-R^2}$, il suffit de remplacer u, v et h par les quantités proportionnelles x, y et $-R^2$, ce qui nous donne $x(xz_0 - zx_0) + y(yz_0 - zy_0) + R^2(z - z_0) = 0$, ou

$$(\Sigma) \qquad z_0(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - z(xx_0 + yy_0 + zz_0 - R^2) = 0.$$

On voit ainsi que le lieu est une quadrique (Σ) qui coupe la sphère suivant le grand cercle du plan des xy et suivant le cercle section de la sphère par le plan polaire du point A. Donc cette quadrique est bitangente à la sphère aux points de rencontre de ces deux cercles.

Etudions maintenant la nature de la quadrique (Σ).

Si $z_0 = 0$, l'équation se réduit à $z(xx_0 + yy_0 - R^2) = 0$, elle représente le plan des xy et le plan polaire du point A. Celui-ci seulement est le lieu, car pour $z = 0$, les équations (2) n'ont pas de solutions communes en u, v, h.

Supposons maintenant $z_0 \neq 0$; l'équation s'écrit $x^2 + y^2 - yz\frac{y_0}{z_0} - zx\frac{x_0}{z_0} + \frac{R^2}{z_0}z - R^2 = 0$

ou, en décomposant en carrés, $\left(x - \frac{x_0 z}{2z_0}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0 z}{2z_0}\right)^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{4z_0^2}z^2 + \frac{R^2}{z_0}z - R^2 = 0.$

1° Si le point A est sur Oz, le coefficient de z^2 est nul, la surface Σ est un paraboloïde de révolution autour de Oz.

2° Si le point A n'est pas sur Oz, on peut continuer la décomposition et on obtient

$$\left(x - \frac{x_0 z}{2z_0}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0 z}{2z_0}\right)^2 - \frac{4z_0^2}{x_0^2 + y_0^2}\left[\frac{x_0^2 + y_0^2}{4z_0^2}z - \frac{R^2}{2z_0}\right]^2 - \frac{R^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2)}{x_0^2 + y_0^2} = 0.$$

La nature de la quadrique dépend alors du signe de la quantité $x_0^2 + y_0^2 - R^2$, c'est-à-dire de la position du point A par rapport au cylindre (C) qui est circonscrit à la sphère parallèlement à Oz.

Si le point A est extérieur à ce cylindre, (Σ) est un hyperboloïde à une nappe ; si le point A est à l'intérieur du cylindre, la surface est un hyperboloïde à deux nappes ; enfin, si le point A est sur le cylindre, la surface est un cône réel.

3. Les plans des courbes communes à la sphère et à la quadrique (Σ) sont le plan des xy qui est fixe et le plan polaire du point A, $xx_0 + yy_0 + zz_0 - R^2 = 0$.

Si le point A décrit un plan $Ax + By + Cz + D = 0$, on a $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, et cette égalité montre que son plan polaire passe par le point fixe qui a pour coordonnées

$$-\frac{AR^2}{D}, \qquad -\frac{BR^2}{D}, \qquad -\frac{CR^2}{D},$$

c'est-à-dire par le pôle du plan.

Supposons maintenant que le point A décrive la sphère S' $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R'^2 = 0$. Nous avons alors

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - R'^2 = 0,$$

et l'enveloppe du plan polaire de A s'obtient en éliminant x_0, y_0, z_0, entre les équations

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - R'^2 = 0, \quad xx_0 + yy_0 + zz_0 - R^2 = 0, \quad \frac{x_0 - a}{x} = \frac{y_0 - b}{y} = \frac{z_0 - c}{z}.$$

Désignons par λ la valeur commune de ces trois rapports ; nous avons

$$x_0 = a + \lambda x, \qquad y_0 = b + \lambda y, \qquad z_0 = c + \lambda z ;$$

remplaçons x_0, y_0, z_0 par ces valeurs dans les deux premières équations, et éliminons λ entre les relations obtenues. Nous trouvons ainsi l'équation de l'enveloppe

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(ax + by + cz - R^2)^2}{R'^2}.$$

Cette équation représente une quadrique de révolution admettant pour foyer l'origine et pour plan

directeur correspondant le plan polaire du centre O′ de la sphère S′ par rapport à la sphère S. Le carré de l'excentricité est $\frac{a^2+b^2+c^2}{R'^2}$.

Cette quadrique est un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde suivant que OO′ est inférieur, supérieur ou égal à R′.

Etude géométrique. — **1.** Soit γ le cercle section de la sphère S par un plan quelconque Π mené par la droite D. Toutes les quadriques circonscrites à S le long du cercle γ forment un faisceau linéaire ; par suite le lieu des pôles d'un plan fixe P par rapport à ces quadriques est une droite d, qui passe en particulier par le pôle Q du plan P par rapport à la sphère et par le pôle B du plan Π.

Si le plan Π tourne autour de la droite D, le point Q reste fixe et le point B décrit la droite D′, conjuguée de D par rapport à la sphère. Donc la droite d se déplace dans un plan P_1 passant par le point Q et la droite D′.

Donc le lieu des pôles du plan P par rapport à toutes les quadriques considérées est le plan P_1.

Supposons maintenant que la droite D se déplace dans un plan R passant par le centre O de la sphère S′, la droite D′ reste perpendiculaire au plan R, et le plan P_1 tourne autour de la droite fixe Δ, menée par le point Q perpendiculairement au plan R.

2. Si le plan P pivote autour d'un point A, le point Q se déplace dans un plan fixe T, plan polaire du point A par rapport à la sphère. Pour avoir un point du lieu, il suffit de prendre l'intersection du plan P et de la droite menée par le point Q perpendiculairement au plan R.

Ce lieu est évidemment une surface algébrique ; il est facile de voir qu'il passe par le point A. Menons en effet par ce point une perpendiculaire à R, qui rencontre T au point Q ; le plan polaire du point Q passe par le point A, qui est ainsi un point simple du lieu.

Cherchons maintenant combien il y a de points du lieu sur une droite quelconque L passant par le point A. Projetons L orthogonalement sur le plan T, soit L_1 la projection ; la droite L_1', conjuguée de L_1 par rapport à S, passe par le point A. Elle détermine avec L un plan P′ dont le pôle Q′ est sur L_1. Par suite, la perpendiculaire au plan R passant par le point Q′ rencontre L en un seul point M, c'est le seul point du lieu situé sur L en dehors du point A.

Il en résulte que le lieu cherché est une quadrique Σ passant par le point A. Je dis maintenant que cette quadrique coupe la sphère S suivant deux cercles.

Soit M un point du lieu Σ situé sur la sphère S. Menons par le point M une perpendiculaire au plan R qui rencontre la sphère en un deuxième point M′ et le plan T au point Q. Puisque le point M est un point du lieu, le plan polaire du point Q doit passer par le point M, ou ce qui revient au même, le conjugué harmonique de Q par rapport à M et M′ est le point M. Ceci ne peut avoir lieu que si M′ est confondu avec M, ou si Q est confondu avec M.

Dans le premier cas, le point M est situé sur le cercle γ_1, section de la sphère par le plan R ; dans le deuxième, il est situé sur le cercle γ_2 section de la sphère par le plan T.

Donc l'intersection de la quadrique Σ et de la sphère S se compose des cercles γ_1 et γ_2 ; ces deux surfaces sont bitangentes aux points de rencontre de ces deux cercles.

3. Le plan du cercle γ_1 est fixe ; celui du cercle γ_2 est le plan polaire du point A, et ce plan enveloppe la polaire réciproque par rapport à S du lieu du point A. Si le point A décrit un plan, son plan polaire passe par le pôle de ce plan. Si le point A décrit une sphère S′, on sait que la polaire réciproque de cette sphère par rapport à S est une quadrique de révolution admettant pour foyer le centre de S.

Jacques PAPELIER, 32e d'artillerie à Orléans.

Bonnes solutions par MM. Max Bonnetète ; A. Courtois, lycée de Douai ; G. Esteben ; G. Lach, à Denain ; Mabilleau, lycée de Nantes ; A. Monial, 1er régiment d'infanterie, à Cambrai ; Rieumajou ; A. Rousseau, à Landrecies.

1805. — *On considère la quadrique* (H) *définie par l'équation*

$$(H)\qquad 2x^2 - \alpha^2y^2 - \alpha^6z^2 + 2\alpha^4yz + 10\alpha^3zx + 2\alpha xy - 12\alpha^2x + 6\alpha^3y + 6\alpha^5z + 18\alpha^4 = 0,$$

où α désigne un paramètre variable.

1° *L'enveloppe de cette quadrique se compose de quatre surfaces réglées du quatrième ordre, dont on cherchera les équations et les contours apparents sur le plan des coordonnées.*

2° *Chaque quadrique* (H) *touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche* ABCD. *Montrer que chaque côté de ce quadrilatère a un contact du second ordre avec les surfaces réglées engendrées par les deux côtés qui lui sont consécutifs.*

3° *Soient* A*a la tangente au lieu de* A *et* A*a'* *la droite suivant laquelle le plan* DAB *touche son enveloppe. Montrer que ces deux droites divisent harmoniquement l'angle* BAD. *On a les mêmes propriétés pour les trois autres sommets* B, C, D.

4° *Si l'on considère le tétraèdre* ABCD, *les lieux de ses sommets, les arêtes de rebroussement des enveloppes de ses faces, les intersections des six surfaces réglées engendrées par ses arêtes et combinées deux à deux de toutes les manières possibles, se composent uniquement de cubiques gauches, qui admettent toutes une même définition géométrique très simple.*

La courbe de contact de la quadrique (H) avec son enveloppe est l'intersection de cette quadrique avec celle dont on obtient l'équation en dérivant l'équation proposée par rapport à α, soit :

$$(\mathrm{H}') \qquad -\alpha y^2 - 3\alpha^5 z^2 + 4\alpha^3 yz + 15\alpha^2 zx + xy - 12\alpha x + 9\alpha^2 y + 15\alpha^4 z + 36\alpha^3 = 0.$$

D'après l'énoncé, cette courbe doit être un quadrilatère gauche ABCD. Donc, parmi les quadriques du faisceau (H, H'), doivent se trouver deux couples de plans, les couples (ACB, ACD) et (BDA, BDC). Autrement dit, pour deux valeurs différentes de λ, l'équation $\mathrm{H} \times \lambda \mathrm{H}' = 0$ doit représenter l'ensemble de deux plans. Or, une telle quadrique présente une ligne de centres situés sur elle ; donc les quatre équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, $f'_t = 0$ doivent se réduire à deux équations distinctes.

Ces quatre équations s'écrivent ici

$$\begin{aligned}
4x + (2\alpha + \lambda)y + 5\alpha^2(2\alpha + 3\lambda)z - 12\alpha(\alpha + \lambda) &= 0,\\
(2\alpha + \lambda)x - 2\alpha(\alpha + \lambda)y + 2\alpha^3(\alpha + 2\lambda)z + 3\alpha^2(2\alpha + 3\lambda) &= 0,\\
5(2\alpha + 3\lambda)x + 2\alpha(\alpha + 2\lambda)y - 2\alpha^3(\alpha + 3\lambda)z + 3\alpha^2(2\alpha + 5\lambda) &= 0,\\
-4(\alpha + \lambda)x + \alpha(2\alpha + 3\lambda)y + \alpha^3(2\alpha + 5\lambda)z + 12\alpha^2(\alpha + 2\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Pour que ces équations se réduisent à deux, il faut et il suffit, comme on s'en rend compte aisément, que tous les mineurs du troisième ordre déduits du tableau de leurs coefficients soient nuls. En annulant tous ces mineurs, on obtient un certain nombre d'équations en λ, qui sont en général du troisième degré, et qui, d'après ce qui a été dit plus haut, doivent admettre deux racines communes. Or, si l'on annule par exemple le mineur

$$\begin{vmatrix}
4 & 2\alpha + \lambda & -12\alpha(\alpha + \lambda)\\
2\alpha + \lambda & -2\alpha(\alpha + \lambda) & 3\alpha^2(2\alpha + 3\lambda)\\
-4(\alpha + \lambda) & \alpha(2\alpha + 3\lambda) & 12\alpha^2(\alpha + 2\lambda)
\end{vmatrix},$$

on obtient l'équation du second degré $2\lambda^2 + 3\lambda\alpha + \alpha^2 = 0$.

Les deux racines $\lambda = -\alpha$ et $\lambda = -\dfrac{\alpha}{2}$ de cette équation sont donc nécessairement les deux valeurs de λ cherchées. Prenons par exemple la valeur $\lambda = -\alpha$. Elle nous donne l'équation

$$2x^2 + 2\alpha^6 z^2 - 2\alpha^4 yz - 5\alpha^3 zx + \alpha xy - 3\alpha^3 y - 9\alpha^5 z - 18\alpha^4 = 0,$$

dont le premier membre doit être à priori de la forme $(x + ay + bz + c)(2x + b'z - 2c)$.

En identifiant, on détermine sans peine les coefficients a, b, c, b' et l'on trouve les deux plans

$$(\mathrm{ABC}) \qquad 2x + \alpha y - \alpha^3 z + 6\alpha^2 = 0,$$

$$(\mathrm{ADC}) \qquad x - 2\alpha^3 z - 3\alpha^2 = 0,$$

qui seront par exemple, le premier ABC, le second ADC.

On pourrait maintenant songer à couper la quadrique (H) ou la quadrique (H'), successivement par ces deux plans.

Mais il est plus simple de déterminer l'autre couple de plans, en nous servant de la seconde racine, $\lambda = -\dfrac{\alpha}{2}$. On obtient, par un calcul analogue au précédent, les deux plans

$$(\mathrm{BAD}) \qquad x + \alpha y + \alpha^3 z - 3\alpha^2 = 0,$$

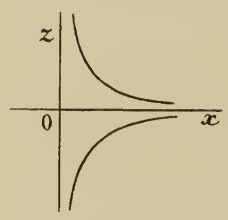
$$(\mathrm{BCD}) \qquad 4x - \alpha y + \alpha^3 z = 0,$$

qui sont par exemple, le premier BAD, le second BCD.

1° Ceci étant, l'enveloppe de (H) se compose évidemment des quatre surfaces réglées engendrées par les côtés du quadrilatère gauche ABCD. Nous avons évidemment les équations de chacun de ces côtés. Formons aussi les équations de leurs projections sur les plans de coordonnées. En prenant les enveloppes de ces projections, nous aurons les contours apparents des surfaces réglées correspondantes. Enfin, en éliminant α entre les équations de l'un des côtés, on aura l'équation de la surface qu'il engendre. Tous ces calculs ne présentent aucune difficulté ; aussi, nous nous bornons à indiquer les résultats :

AB	$\begin{cases} 3x + 2\alpha y + 3\alpha^2 = 0 \\ y + 3\alpha^2 z - 12\alpha = 0 \\ x - 2\alpha^3 z + 9\alpha^2 = 0 \end{cases}$	Equation de (AB) : $3(y - 3zx)^2 + 4(yz + 6)(y^2 + 18x) = 0$	Contours apparents $\begin{cases} y^2 - 9x = 0 \\ yz - 12 = 0 \\ z^2 x + 27 = 0 \end{cases}$
BC	$\begin{cases} x = -\alpha^2 \\ \alpha^2 z - y - 4\alpha = 0 \end{cases}$	Equation de (BC) : $(zx + y)^2 + 16x = 0$	Contour apparent $yz + 4 = 0$
CD	$\begin{cases} 9x - 2\alpha y - 3\alpha^2 = 0 \\ 9\alpha^2 z - y + 12\alpha = 0 \\ x - 2\alpha^3 z - 3\alpha^2 = 0 \end{cases}$	Equation de (CD) : $(27zx - y)^2 - 4(yz - 2)(y^2 - 54x) = 0$	Contours apparents $\begin{cases} y^2 + 27x = 0 \\ yz + 4 = 0 \\ xz^2 - 1 = 0 \end{cases}$
DA	$\begin{cases} 3x + 2\alpha y - 9\alpha^2 = 0 \\ y + 3\alpha^2 z = 0 \\ x - 2\alpha^3 z - 3\alpha^2 = 0 \end{cases}$	Equation de (DA) : $27(zx + y)^2 - 4y^3 z = 0$	Contours apparents $\begin{cases} y^2 + 27x = 0 \\ z^2 x - 1 = 0 \end{cases}$

On vérifie bien que les quatre surfaces réglées sont du quatrième ordre. Leurs contours apparents sur xOy sont des paraboles, sur yOz des hyperboles équilatères, sur zOx des cubiques ayant la forme ci-contre.



2° Nous voulons montrer par exemple que la droite AD correspondant à une certaine valeur β du paramètre α, a, en A, un contact du second ordre avec la surface (AB). Pour cela, il suffit de montrer que, parmi les quatre points d'intersection de AD avec (AB), il y en a trois qui sont confondus en A. Or, à chacun de ces points d'intersection correspond une génératrice de (AB) rencontrant AD et réciproquement. Tout revient donc à prouver que, parmi les quatre droites AB qui rencontrent la droite AD, il y en a trois qui ont pour paramètre β. Autrement dit, l'équation du quatrième degré en α qui détermine les paramètres de ces droites AB, doit être de la forme :

$$(\alpha - \beta)^3 [\alpha - f(\beta)] = 0,$$

$f(\beta)$ étant une certaine fonction de β, qui à priori ne peut d'ailleurs être qu'un polynome du premier degré.

Avant d'aller plus loin, remarquons que s'il en est ainsi, l'équation considérée comme une équation en β admettra une racine triple égale à α, ce qui montrera qu'inversement la droite AB de paramètre α a un contact du second ordre avec la surface (AD) (*). Enfin, ce que nous venons de dire relativement

(*) Le raisonnement précédent contient évidemment la démonstration du théorème général suivant :
Si les génératrices d'une surface réglée S sont tangentes asymptotiques d'une autre surface réglée S', les génératrices de S sont aussi tangentes asymptotiques de S.

au point A se répéterait mot pour mot pour les trois autres points B, C, D. Nous sommes finalement conduits à former les quatre équations qui expriment la rencontre :

d'une droite AB de paramètre α avec une droite AD de paramètre β,
— BC — — CD —
— CD — — DA —
— BC — — AB —

Pour former rapidement ces équations, formons les coordonnées pluckériennes de nos quatre droites, ce qui est immédiat, puisque nous avons déjà les équations des projections de chaque droite sur les trois plans de coordonnées.

Si l'on met ces équations sous la forme $bz - cy = l$, $cx - az = m$, $ay - bx = n$, on obtient immédiatement le tableau suivant pour les coordonnées pluckériennes de nos quatre droites :

AB :	$a = -2\alpha^3$,	$b = 3\alpha^2$,	$c = -1$,	$l = 12\alpha$,	$m = 9\alpha^2$,	$n = 3\alpha^4$;
BC :	$a_1 = 0$,	$b_1 = \alpha^2$,	$c_1 = 1$,	$l_1 = 4\alpha$,	$m_1 = -\alpha^2$,	$n_1 = \alpha^4$;
CD :	$a_2 = 2\alpha^3$,	$b_2 = 9\alpha^2$,	$c_2 = 1$,	$l_2 = -12\alpha$,	$m_2 = 3\alpha^2$,	$n_2 = -3\alpha^4$;
DA :	$a_3 = -2\alpha^3$,	$b_3 = 3\alpha^2$,	$c_3 = -1$,	$l_3 = 0$,	$m_3 = -3\alpha^2$,	$n_3 = -9\alpha^4$.

Ceci étant, la condition de rencontre de AB et BC, par exemple, est, comme on sait,

$$al_1 + bm_1 + cn_1 + a_1l + b_1m + c_1n = 0.$$

En se servant de cette équation, on trouve que les quatre équations qu'il s'agissait de former sont identiques à la suivante :

$$\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + 8\alpha\beta^3 - 3\beta^4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\alpha - \beta)^3(\alpha + 3\beta) = 0.$$

Elles sont bien de la forme voulue.

3° Il suffit évidemment de montrer que les projections des quatre droites considérées sur yOz par exemple forment un faisceau harmonique.

Pour le point A, comme il est à l'infini, sa tangente est aussi à l'infini. Quant à la droite Aa', on obtient précisément sa projection sur yOz en dérivant l'équation du plan BAD par rapport à α, ce qui donne

$$y + 3\alpha^2 z - 6\alpha = 0.$$

En comparant avec les équations des projections de AB et de AD sur yOz, on voit de suite que Aa' est parallèle à AB et à AD et qu'elle en est équidistante, ce qui donne bien un faisceau harmonique avec la droite de l'infini du plan. Pour les trois autres points, qui sont à distance finie, il suffit de vérifier l'harmonie pour les parallèles aux projections par yOz, menées par O. On trouve ainsi :

				Tangente :	Caractéristique	Condition d'harmonie
B	$\left(x = -\alpha^2,\right.$	$y = 0,$	$\left.z = \frac{4}{\alpha}\right)$	$y = 0$	$y = 3\alpha^2 z,$	$(0, 3, -3, 1) = -1$
C	$\left(x = -\alpha^2,\right.$	$y = -6\alpha,$	$\left.z = -\frac{2}{\alpha}\right)$	$y = -3\alpha^2 z$	$y = 3\alpha^2 z$	$(3, -3, 1, 9) = -1$
D	$\left(x = \alpha^2,\right.$	$y = 3\alpha,$	$\left.z = -\frac{1}{\alpha}\right)$	$y = 3\alpha^2 z$	$z = 0$	$(\infty, 3, 9, -3) = -1.$

4° Toutes les courbes en question ont des équations paramétriques de la forme

$$(1) \qquad x = A\alpha^2, \qquad y = B\alpha, \qquad z = \frac{C}{\alpha},$$

où A, B, C sont des constantes, dont certaines peuvent être nulles. Le cas des constantes nulles donne des courbes planes analogues aux contours apparents de la première partie. Si on écarte ce cas, on voit que toutes ces courbes sont des cubiques gauches qui peuvent être définies comme étant l'intersection d'un cylindre ayant pour section droite une parabole d'axe Ox et de tangente au sommet Oy, avec un cylindre admettant pour section droite une hyperbole équilatère d'asymptotes Oy et Oz.

Reste à prouver que toutes les courbes indiquées dans l'énoncé sont bien de la forme (1). C'est fait pour les lieux des sommets du tétraèdre. Pour les arêtes de rebroussement, il suffit de dériver deux fois par rapport à α l'équation de chaque face et de résoudre par rapport à x, y, z le système obtenu. On obtient ainsi les résultats suivants :

BAD : $x = -\alpha^2$, $y = 3\alpha$, $z = \frac{1}{\alpha}$; ABC : $x = \alpha^2$, $y = -6\alpha$, $z = \frac{2}{\alpha}$;

BCD enveloppe un cône de sommet O, CDA enveloppe un cylindre parallèle à Oy.

Quant aux intersections de surfaces réglées, elles sont toutes données par l'intersection de deux droites dont les coordonnées pluckériennes sont de la forme

$$A\alpha^3,\ B\alpha^2,\ C,\ L\alpha,\ M\alpha^2,\ N\alpha^4, \qquad \text{et} \qquad A'\beta^3,\ B'\beta^2,\ B',\ L'\beta,\ M'\beta^2,\ N'\beta^4,$$

avec la condition de rencontre, qui s'écrit en posant $\beta = m\alpha$,

$$CN'.m^4 + A'L.m^3 + (B'M + M'B)m^2 + L'A.m + B'N = 0.$$

Or, les coordonnées du point de rencontre de ces deux droites sont par exemple, en remplaçant β par $m\alpha$,

$$x = \frac{(MA'm - M'A)}{CA'm^3 - C'A}\cdot\alpha^2, \qquad y = \left[\frac{MC' - CM'm^2}{CA'm^3 - C'A}\cdot\frac{B}{C} - \frac{L}{C}\right]\alpha, \qquad z = \frac{MC' - CM'm^2}{CA'm^3 - C'A}\cdot\frac{1}{\alpha};$$

équations qui sont bien de la forme (1). Donc, l'intersection de deux quelconques de ces surfaces réglées se compose en général de quatre cubiques gauches de la forme (1). Bien entendu, certaines de ces cubiques peuvent dégénérer, comme nous l'avons dit tout à l'heure. (L'intersection totale des deux surfaces doit être du seizième degré ; or, nos cubiques ne nous donnent que du douzième degré ; le reste est la droite de l'infini de xOy, qui doit être comptée quatre fois).

Les coordonnées pluckériennes de AC et BD étant :

AC : $-2\alpha^3$, $3\alpha^2$, -1, -12α, $-3\alpha^2$, $15\alpha^4$; BD : $2\alpha^3$, $3\alpha^2$, -5, 12α, $-3\alpha^2$, $3\alpha^4$,

rien n'est plus facile que de former les équations en m relatives aux intersections des six surfaces prises deux à deux. On trouve ainsi d'abord $(m-1)^3(3m+1) = 0$, pour les intersections de surfaces consécutives, puis $\frac{m^2+1}{m} = -4 \pm \sqrt{-12}$, pour $(AB)_\alpha$ avec $(CD)_\beta$;

$9m^4 + 8m^3 + 6m^2 + 1 = 0$, pour $(BC)_\alpha$ et $(DA)_\beta$; 4 rac. imag. ;

$5m^4 + 8m^3 - 6m^2 - 8m + 1 = 0$, ($m = 1$ et $5m^3 + 13m^2 + 7m - 1 = 0$, 3 racines réelles), pour $(AB)_\alpha$ et $(AC)_\beta$, $(CD)_\alpha$ et $(AC)_\beta$, $(BD)_\alpha$ et $(AB)_\beta$, $(BD)_\alpha$ et $(CD)_\beta$;

$5m^4 + 6m^2 - 8m - 3 = 0$, ($m = 1$ et $5m^3 + 5m^2 + 11m + 3 = 0$, 1 racine réelle), pour $(AD)_\alpha$ et $(AC)_\beta$, $(BD)_\alpha$ et $(BC)_\beta$;

$15m^4 - 8m^3 - 6m^2 - 1 = 0$, ($m = 1$ et $15m^3 + 7m^2 + m + 1 = 0$, 1 racine réelle), pour $(BC)_\alpha$ et $(AC)_\beta$, $(BD)_\alpha$ et $(AD)_\beta$;

$m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 8m + 15 = 0$ (0 racine réelle), pour $(AC)_\alpha$ et $(BC)_\beta$.

CONCOURS DE 1910 (*Suite*).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

PREMIÈRE COMPOSITION.

I. — **1880**. — Soit (G) la courbe définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations

$$x = \frac{1+t^2}{t}, \qquad y = 1 + t^2,$$

où t est un paramètre arbitraire.

1° Déterminer un polynome du second degré $f(x, y)$ (dans lequel le coefficient de y^2 est 1) tel qu'on ait une identité de la forme

$$t^2 f\left(\frac{1+t^2}{t}, 1+t^2\right) = (t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2.$$

On montrera qu'une telle identité n'est possible que moyennant l'existence d'une relation entre les constantes α, β, γ. Cette relation se décompose en deux autres très simples.

2° Supposant successivement vérifiée chacune de ces deux relations, les coefficients de $f(x, y)$ se trouvent, dans chaque cas, exprimés au moyen de deux des paramètres α, β, γ. Pour l'une des solutions, le polynome $f(x, y)$ est le carré d'un polynome du premier degré en x, y.

Des résultats précédents on déduit immédiatement la réponse aux questions suivantes :

3° Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de (G) pour que ces trois points soient en ligne droite.

4° Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de (G) pour qu'il existe une conique (C) tangente à (G) en ces trois points.

5° Former l'équation générale des coniques (C).

En outre :

6° Trouver, lorsque la conique (C) se décompose en deux droites, le lieu du point de concours des deux droites.

7° Montrer que les tangentes aux trois points de contact de (C) et de (G) coupent encore la courbe (G) en trois autres points situés sur une même droite (D).

8° Trouver l'équation générale de la droite (D) en fonction des mêmes paramètres que ceux qui déterminent la conique correspondante (C).

9° Déterminer en fonction des mêmes paramètres le centre de gravité P du triangle formé par les points de contact de (C) et de (G).

10° Trouver l'enveloppe de la droite (D) lorsque P décrit une parallèle à l'axe des x.

II. — **1881**. — Une surface (Σ), rapportée à des axes rectangulaires, est coupée par chaque plan parallèle au plan xOy suivant une courbe fermée. L'aire S de cette courbe est une fonction déterminée $[S = f(z)]$ de la cote z de tous ses points. On suppose que la surface (Σ) est continue et on suppose que la fonction $f(z)$ admet des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre inclusivement.

Déterminer quelle doit être la forme *la plus générale* de la fonction $f(z)$ pour que le volume compris entre la surface (Σ) et les plans de cotes z_0 et z soit donné, *quels que* soient z_0 et $z > z_0$, par la formule

$$V = \frac{z - z_0}{6}\left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right].$$

(10 juin, de 8 h. à 2 h.)

DEUXIÈME COMPOSITION.

I. — **1882**. — Étant donnés trois axes rectangulaires ox, oy, oz, et une fonction $f(z)$ qui admet une dérivée $f'(z)$, les équations

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x = \rho x_0, \\ y = \rho y_0, \\ \displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} = t \end{cases} \qquad \left(\rho = \sqrt{\frac{f(z_0)}{f(z)}}\right)$$

où t désigne le temps, définissent le mouvement d'un point M (x, y, z), si on connaît la position M_0 (x_0, y_0, z_0) de ce point à l'instant $t = 0$; quand on a fixé la valeur de t, les mêmes équations (I) définissent une transformation remplaçant le point M_0 par le point M.

1° Montrer que les projections de la vitesse du point M (x, y, z) sur les axes ox, oy, oz peuvent s'exprimer par des fonctions de x, y, z qui ne contiennent ni le temps t, ni les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0.

2° A tous les points d'un cercle (C_0) ayant pour équations

$$(x_0 - a_0)^2 + y_0^2 = R_0^2, \qquad z_0 = \text{constante}, \qquad (a_0, R_0 \text{ constants})$$

correspondent, à l'instant t, d'après les équations (I), des points M tous situés sur un cercle (C) dont le plan est parallèle au plan xoy. Calculer, en fonction du z de ce plan, le rayon R et l'abscisse a du centre du cercle (C).

3° Soient (S) la surface engendrée par le cercle (C) quand t varie à partir de 0, (T) le solide limité par la surface (S) et par les plans $z = z_1$, $z = z_2$.

Vérifier que le volume V de (T) ne dépend que de la différence des valeurs de t qui correspondent à z_2 et à z_1.

Effectuer jusqu'au bout les calculs et construire la trajectoire d'un point M dans les deux cas suivants :

Premier cas : $f(z) = \frac{k^2}{2z}$ (k constant) ; *deuxième cas :* $f(z) = k\,\frac{z^2 + k^2}{z^2}$ (k constant).

Calculer, dans chacun des deux cas précédents, les coordonnées $(\xi, 0, \zeta)$ du centre de gravité du solide (T) supposé homogène, en se servant des formules

$$V\xi = \int_{z_1}^{z_2} a(z)A(z)dz \qquad \text{et} \qquad V\zeta = \int_{z_1}^{z_2} zA(z)dz,$$

où $A(z)$ désigne l'aire et $a(z)$ l'abscisse du centre du cercle (C) de cote z.

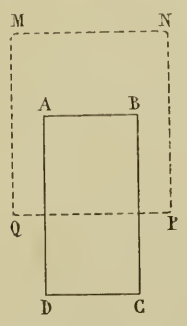
II. — **1883.** — Construire la courbe dont l'équation est $y = \operatorname{tg} x - x$.

Trouver, avec deux décimales, la racine comprise entre 1 et 1,1 de l'équation $\operatorname{tg} x - x = \frac{\pi}{4}$.

(13 juin, de 8 h. à midi.)

Physique.

1884. I. — Un fil de cuivre, de 3 millimètres de diamètre, est disposé en forme de rectangle ABCD (AB = 10 centimètres, BC = 20 centimètres). Une partie de ce cadre est placée entre les pièces polaires d'un électro-aimant donnant un champ magnétique perpendiculaire au plan du rectangle ; ce champ magnétique a une intensité constante et égale à 10000 gauss dans la région limitée par le contour MNPQ (qui peut représenter la projection des pièces polaires sur le plan de la figure), et il est nul en dehors de ce contour, de telle manière que AB soit dans le champ magnétique et CD en dehors. La résistivité du cuivre est $1{,}6 \times 10^{-6}$ ohms par cm.



1° Qu'arrive-t-il au point de vue électrique, mécanique et calorifique si l'on donne au cadre un mouvement de translation parallèle à BC, dans un sens ou dans l'autre ?

2° Ce mouvement de translation étant supposé uniforme, et la vitesse égale à 2 centimètres par seconde, calculer l'intensité du courant qui passe dans le cadre. Quelle force faut-il exercer sur le cadre pour produire ce mouvement ? Quelle est, en calories, la quantité de chaleur dégagée par seconde ? On suppose que toute la chaleur ainsi dégagée soit employée à échauffer le cuivre ; quelle sera l'élévation de température lorsqu'on aura produit un déplacement de 10 centimètres ?

La chaleur spécifique du cuivre est 0,1.

3° Le côté BC étant supposé vertical, on abandonne le cadre à lui-même sous l'action de son poids. Expliquer ce qui se passe. Montrer que le mouvement devient rapidement uniforme, et calculer la vitesse ainsi atteinte.

La densité du cuivre est 9 ; l'accélération des corps en chute libre est $g = 980$ unités C.G.S.

Qu'arriverait-il si l'on modifiait le diamètre du fil de cuivre sans changer les dimensions du rectangle, ou si le cadre était fait de plusieurs spires de fil isolées les unes des autres ?

II. — Les notions de période, de vitesse et de longueur d'onde dans le cas des radiations lumineuses. Sans entrer dans aucun détail d'appareil, indiquer les expériences ou observations qui ont conduit à introduire ces notions en optique et ont permis de mesurer les quantités que l'on est ainsi amené à définir. Indiquer comment varient ces quantités lorsqu'on passe d'une radiation à une autre ; donner l'ordre de grandeur de chacune d'elles dans les différents cas.

Indiquer, en particulier, quelle donnée numérique sert à caractériser les diverses radiations lumineuses, et montrer comment, avec les spectroscopes usuels, on peut obtenir ces données numériques pour les diverses radiations correspondant aux diverses raies que l'on observe dans un spectre.

(16 juin, de 8 h. à 2 h.)

Epure de géométrie descriptive.

1885. — La ligne de terre étant placée suivant le petit axe de la feuille, on donne : 1° un *paraboloïde de révolution*, dont l'axe Z est vertical, a pour éloignement 110^{mm} et se projette à 20 à droite du grand axe de la feuille, la cote du sommet est 160, celle du foyer 144 ; 2° un *paraboloïde hyperbolique* qui a deux génératrices de front ; la première D est verticale, elle est située dans le plan de profil de l'axe Z, à 32 en avant de cet axe ; la seconde Δ est à 64 en arrière de Z, elle est inclinée à 45° sur le plan horizontal et on s'élève sur elle de gauche à droite. Les projections verticales de ces deux génératrices se rencontrent en un point dont la cote est 96. Enfin, le paraboloïde a un plan directeur perpendiculaire à la génératrice Δ.

On demande : 1° de construire l'intersection des deux surfaces ; 2° de représenter la partie solide du para-

boloïde de révolution qui ne contient pas le sommet, séparée par le paraboloïde hyperbolique et limitée au plan horizontal de projection; 3° de construire l'ombre propre de ce solide et son ombre portée sur le plan horizontal. Les rayons lumineux sont parallèles à la direction Δ.

On déterminera, pour chaque courbe, un point courant et la tangente en ce point, ainsi que les points et tangentes remarquables. En particulier, on cherchera les tangentes à l'intersection aux points situés dans le plan de profil de l'axe du paraboloïde de révolution.

Entourer l'épure d'un cadre de 280×440. — Dessiner les résultats en noir (les lignes vues en trait plein, les lignes cachées en points ronds) et les constructions en rouge. Mettre sur les ombres des hachures bleues ou grises, fines, espacées d'environ $1^{mm},5$. Expliquer très sommairement les constructions effectuées et les résultats obtenus.

(21 juillet 1910, de 8 h. à 12 h.)

Groupe II.

Mathématiques.

I. — **1886**. On donne deux axes coordonnés rectangulaires ox, oy et une droite (D) parallèle à l'axe oy.

A chaque point M d'une courbe (C), située dans le plan des deux axes, on fait correspondre un point M′, de même abscisse que le point M, par la condition que la parallèle menée par l'origine à la tangente en M à la courbe (C) et la parallèle à l'axe ox menée par le point M′ se rencontrent sur la droite (D). Soit (C′) le lieu décrit par le point M′ quand le point M décrit la courbe (C). Soit M″ le point qui se déduit du point M′ comme le point M′ se déduit du point M, en remplaçant toutefois la courbe (C) par la courbe (C′).

Déterminer la courbe (C) :

1° De manière qu'elle passe par l'origine et que la longueur MM′ soit égale à une ligne donnée;

2° De manière qu'elle passe par l'origine, qu'elle y soit tangente à la bissectrice de l'angle xoy et que la longueur MM″ soit égale à une ligne donnée.

II. — **1887**. On considère le mouvement défini par les équations

$$x = 3a \cos t - a^3 \cos 3t, \qquad y = 3a \sin t + a^3 \sin 3t, \qquad z = 3a^2 \cos 2t,$$

où t désigne le temps et a un paramètre constant. Déterminer la vitesse et l'accélération.

La trajectoire est une courbe fermée ; quelle est sa longueur ? Déterminer a de façon que cette longueur soit égale à 3π. (On se bornera à calculer deux décimales.)

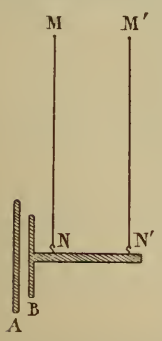
III. — Évaluer les deux intégrales définies

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx, \qquad B = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

(13 juin, de 8 h. à midi.)

Physique.

I. — **1888**. — Un appareil, destiné à servir d'électromètre, est constitué par deux plateaux circulaires, verticaux et parallèles, l'un A fixe, l'autre B suspendu par deux fils égaux et parallèles MN, M′N′ (voir la figure ci-jointe). Le plateau B a un rayon de 10 centimètres ; A est notablement plus grand. Les fils de suspension ont 1 mètre de long ; l'ensemble du système qu'ils supportent pèse 200 grammes. La distance des deux plateaux est de 1 centimètre lorsqu'ils sont au même potentiel, B étant au repos. L'accélération des corps en chute libre est $g = 980$ unités C. G. S.



1. On établit entre les deux plateaux une différence de potentiel de V volts. Les deux plateaux se rapprochent et, lorsque l'équilibre est établi, leur distance devient x. Trouver la relation qui lie V et x. Représenter cette relation par une courbe.

2. Quelle différence de potentiel faut-il établir entre les deux plateaux pour que le déplacement de B atteigne 1 millimètre ?

3. Montrer qu'à chaque valeur de V correspondent deux positions d'équilibre, mais qu'une seule est stable. Montrer que, si la différence de potentiel dépasse une certaine limite, il n'y a plus de position d'équilibre ; trouver cette limite et la position d'équilibre correspondante. Qu'arrive-t-il si la différence de potentiel dépasse la limite que l'on vient de trouver ?

4. Ayant établi une différence de potentiel V assez faible pour qu'il y ait une position d'équilibre stable, définie par une distance x des deux plateaux, on fait osciller B, comme un pendule, de quantités infiniment petites de part et d'autre de cette position. Calculer la période de ce mouvement. Etudier comment elle varie lorsque l'on donne diverses valeurs à V.

On traitera cette quatrième partie en faisant successivement les deux hypothèses suivantes :

1° La différence de potentiel V est maintenue invariable pendant les oscillations.

2° Ayant établi la différence de potentiel V, on laisse le plateau B prendre sa position d'équilibre, puis on isole complètement les deux plateaux, et, alors seulement, on fait osciller B.

Nota. — On raisonnera comme si le champ électrique était uniforme jusqu'au bord de B.

D'après la construction de l'appareil, les fils de suspension ne peuvent faire qu'un très petit angle avec la verticale. On fera dès le début des calculs, les simplifications qui résultent de ce fait.

II. — Théorie des systèmes optiques centrés, en supposant faibles l'ouverture des surfaces et l'inclinaison des rayons par rapport à l'axe.

Montrer comment les résultats de cette théorie s'appliquent à l'étude des divers instruments d'optique.

Nota. — On attachera peu d'importance à l'étude détaillée du système optique particulier connu sous le nom de lentille épaisse.

(11 juin, de 8 h. à 2 h.)

Chimie.

Propriétés physiques et propriétés chimiques du soufre.

Sulfures métalliques.

(18 juin, de 8 h. à midi.)

Sciences naturelles.

Divers moyens d'utilisation mécanique de l'air, pour le transport, chez les animaux et chez les plantes : dissémination par le vent; adaptation au saut plané et au vol.

(17 juin, de 8 h. à midi.)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1909 (*fin*).

1824. — *Soit un plan fixe* XOY, *dont les axes font l'angle* $+\frac{\pi}{2}$, *et qui contient une droite* D *ayant pour équation* $X = a$.

Soit un plan mobile X'O'Y' *dont les axes font l'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *et qui entraîne dans son mouvement la droite* D' *ayant pour équation* $X' = a$.

Le plan X'O'Y' *glisse sur le plan* XOY *de telle sorte que les droites* D *et* D' *passent respectivement par les points* O' *et* O.

Etudier la courbe décrite par un point quelconque $M(X' = x_0,\ Y' = y_0)$ *entraîné dans le mouvement du plan* X'O'Y'.

On remarquera que la figure formée par les six droites OX, O'X', OY, O'Y', D, D' *est symétrique par rapport à la perpendiculaire* IK *élevée sur le milieu de* OO'. *Le symétrique de* M *par rapport à* IK *est donc fixe.*

Soit P *ce point. On cherchera l'équation de la trajectoire de* M *par rapport à des axes* Px, Py, *parallèles à* OX *et* OY.

1° *Démontrer que la trajectoire de* M *est une courbe du troisième ordre ayant un point double et passant par les points cycliques.*

2° *Déterminer les points* M *du plan* X'O'Y' *dont les trajectoires ont leurs tangentes au point double : a) confondues ; b) réelles et distinctes ; c) rectangulaires.*

Démontrer que la trajectoire de M *est : une cissoïde oblique lorsque les tangentes au point double sont confondues ; une strophoïde oblique lorsqu'elles sont rectangulaires ; une podaire de parabole dans le cas général (on rappelle que la podaire est le lieu des projections d'un point sur les tangentes).*

3° *Etablir les réciproques des résultats* 1° *et* 2°.

Les résultats 1°, 2°, 3° *devront être établis par l'analyse.*

4° *On élève en* O *et* O′ *les perpendiculaires* OI, O′I *aux droites* D′ *et* D. *Chercher le lieu géométrique du point* I *dans le plan fixe et dans le plan mobile.*

En déduire par la géométrie que la trajectoire de M *est une podaire de parabole.*

5° *Généralisation. — Reprendre l'étude du déplacement du plan* X′O′Y′, *mais en remplaçant les droites* D(X = *a*) et D′(X′ = *a*) *par une courbe quelconque* C *et sa symétrique inverse* C′.

La courbe C *a pour équations* $X = f(u)$, $Y = \varphi(u)$, *la courbe* C′ *aura pour équations*

$$X' = f(u'), \qquad Y' = \varphi(u').$$

Lorsque $u' = u$ *le point* (X′, Y′) *est dit l'homologue du point* (X, Y).

On peut toujours faire glisser le plan X′O′Y′ *sur le plan fixe* XOY *de telle sorte que les courbes* C *et* C′ *passent respectivement par les points* O′ *et* O, *et qu'en outre le point* O′ *considéré comme faisant partie de* C *ait pour homologue le point* O.

On demande d'établir les résultats suivants :

a) Soit I *l'intersection des normales en* O, O′ *aux courbes* C′ *et* C; *la perpendiculaire* IK *abaissée de* I *sur* OO′ *est tangente en* I *aux lieux géométriques de ce point dans le plan fixe et dans le plan mobile.*

b) Soit M *un point entraîné dans le mouvement du plan* X′O′Y′ ; *la trajectoire de* M *est la podaire d'une courbe semblable à la courbe* I.

6° *Appliquer les résultats* 5° *au cas où la courbe* C *est un cercle.*

7° *Définitions et théorèmes à démontrer. — Strophoïde oblique : Soient deux points* N, P *et une droite* F *passant par* P. *On mène par le point* N *une sécante mobile qui coupe* F *au point* A *et l'on porte sur cette sécante*

$$AM = AM_1 = AP.$$

La courbe décrite par les points M *et* M_1 *est, par définition une strophoïde oblique.*

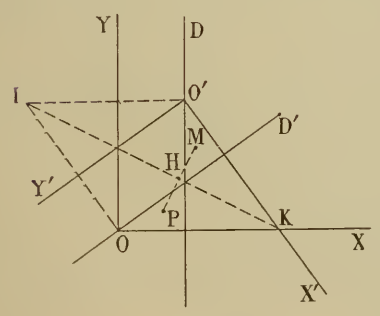
Cissoïde oblique : Soit une circonférence C, P *un point de cette circonférence,* E *une tangente quelconque. On mène par* P *une sécante variable* PAB *et l'on prend* PM = AB.

La courbe ainsi obtenue est la cissoïde oblique.

Démontrer que si, dans la définition de la cissoïde oblique on remplace la tangente E *par un diamètre quelconque du cercle* C, *le lieu de* M *est une strophoïde oblique.*

Si l'on remplace la tangente E *par une droite quelconque, le lieu de* M *est une podaire de parabole.*

Soient a, b les coordonnées du point O′ par rapport aux axes OX, OY, et soit ω l'angle (OX, O′X′). Les cosinus directeurs de O′X′ sont $\cos\omega$, $\sin\omega$ et ceux de O′Y′, $\sin\omega$ et $-\cos\omega$. Par suite, les formules de transformation de coordonnées sont



$$X = a + X'\cos\omega + Y'\sin\omega, \qquad Y = b + X'\sin\omega - Y'\cos\omega.$$

Mais les coordonnées du point O sont 0, 0 dans le système XOY et a, b dans le système X′O′Y′, on a donc

$$0 = a(1 + \cos\omega) + b\sin\omega, \qquad 0 = b + a\sin\omega - a\cos\omega;$$

et ces deux relations nous donnent la même valeur pour b, $b = -a\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$. Les formules précédentes deviennent donc

$$X = a + X'\cos\omega + Y'\sin\omega, \quad Y = -a\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + X'\sin\omega - Y'\cos\omega.$$

Les coordonnées du point M ($X' = x_0$, $Y' = y_0$) par rapport au système XOY sont alors

$$X = a + x_0\cos\omega + y_0\sin\omega, \qquad Y = -a\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + x_0\sin\omega - y_0\cos\omega.$$

D'autre part, le point P a pour coordonnées x_0, y_0 par rapport aux axes OX, OY. Les coordonnées x, y du point M par rapport aux axes Px, Py seront alors

$$x + x_0 = a + x_0 \cos\omega + y_0 \sin\omega, \qquad y + y_0 = -a \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + x_0 \sin\omega - y_0 \cos\omega$$

ou
$$x = a - x_0(1 - \cos\omega) + y_0 \sin\omega, \qquad y = -a \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} + x_0 \sin\omega - y_0(1 + \cos\omega),$$

ou, en posant
$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t,$$

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a - \dfrac{2t^2 x_0}{1+t^2} + \dfrac{2ty_0}{1+t^2} = \dfrac{t^2(a - 2x_0) + 2ty_0 + a}{1+t^2}, \\ y = -\dfrac{a}{t} + \dfrac{2tx_0}{1+t^2} - \dfrac{2y_0}{1+t^2} = -\dfrac{t^2(a - 2x_0) + 2ty_0 + a}{t(1+t^2)}. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre. D'ailleurs, l'élimination de t entre ces deux équations est fort simple, car en les divisant membre à membre on a $\frac{x}{y} = -t$, ou $t = -\frac{x}{y}$. Remplaçons t par cette valeur dans la première équation, nous obtenons l'équation du lieu

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)x - x^2(a - 2x_0) + 2y_0 xy - ay^2 = 0.$$

1. On voit immédiatement que ce lieu est une cubique circulaire qui a un point double à l'origine.

2. L'équation de l'ensemble des tangentes à l'origine est

$$(3) \qquad ay^2 - 2y_0 xy + x^2(a - 2x_0) = 0.$$

a) Pour que ces tangentes soient confondues, il faut qu'on ait $y_0^2 - a(a - 2x_0) = 0$, c'est-à-dire que le point M soit situé sur la parabole (π) qui a pour équation par rapport aux axes O'X', O'Y'

$$Y'^2 + 2aX' - a^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad X'^2 + Y'^2 = (X' - a)^2.$$

Cette parabole a pour foyer le point O' et pour directrice la droite D'.

Si le point M est sur cette parabole, la trajectoire est une cissoïde, car on démontre dans tous les cours que toute cubique circulaire qui a un point de rebroussement est une cissoïde.

b) Les tangentes seront réelles et distinctes si l'on a $y_0^2 - a(a - 2x_0) > 0$, c'est-à-dire si le point M est à l'extérieur de la parabole (π).

c) Les tangentes seront rectangulaires si dans l'équation (3) la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle ; on a ainsi $x_0 - a = 0$, et cette condition est remplie si le point M est sur la droite D'.

Dans ce cas la trajectoire du point M est une strophoïde, car on sait que toute cubique circulaire qui a un point double à tangentes rectangulaires est une cissoïde.

On démontre également que toute cubique circulaire est une podaire de parabole.

On peut d'ailleurs dans le cas actuel obtenir aisément la parabole dont la trajectoire du point M est la podaire.

Soit (α, β) un point M de cette trajectoire. La perpendiculaire MP menée par le point M à la droite qui joint l'origine P au point M a pour équation $\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) = 0$; nous allons chercher l'enveloppe de cette droite.

Pour cela nous remplaçons α et β par les valeurs (1)

$$\alpha = \frac{t^2(a - 2x_0) + 2ty_0 + a}{1 + t^2}, \qquad \beta = -\frac{t^2(a - 2x_0) + 2ty_0 + a}{t(1 + t^2)}.$$

et, en divisant l'équation obtenue par $t^2(a - 2x_0) + 2ty_0 + a$, nous obtenons pour équation de la droite MT

$$t^2 x - ty - t^2(a - 2x_0) - 2ty_0 - a = 0$$

ou

$$t^2(x + 2x_0 - a) - t(y + 2y_0) - a = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite, nous écrivons que cette équation a une racine double en t, ce qui donne

$$(y + 2y_0)^2 + 4a(x + 2x_0 - a) = 0,$$

et cette équation représente bien une parabole.

3. Toute cubique circulaire ayant un point double à l'origine P et son asymptote parallèle à Py peut être engendrée comme il a été dit dans la première partie.

En effet, l'équation de cette cubique est de la forme

(3) $$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=0;$$

on peut déterminer a, x_0, y_0 de façon que les équations (2) et (3) représentent la même courbe. Il suffit de prendre $2x_0-a=\alpha$, $y_0=\beta$, $-a=\gamma$, ou $a=-\gamma$, $x_0=\frac{\alpha-\gamma}{2}$, $y_0=\beta$.

On établit aussi aisément les réciproques de la deuxième partie.

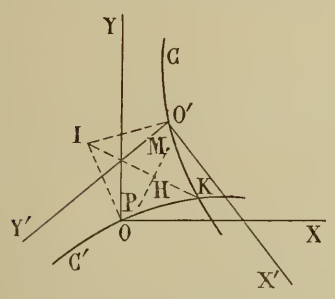
4. Comme $OI=O'I$, le lieu du point I dans le plan fixe est la parabole (π_1) qui a pour foyer le point O et pour directrice D; tandis que le lieu du point I dans le plan mobile est la parabole (π) qui a pour foyer le point O′ et pour directrice la droite D′.

La droite IK, étant la bissectrice de l'angle OIO′, est tangente à ces deux paraboles au point I.

Le milieu H de PM est le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur IK; donc le lieu du point H est la podaire (γ) du point P par rapport à la parabole (π_1), et le lieu du point M est la courbe homothétique de (γ) par rapport au centre d'homothétie P, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

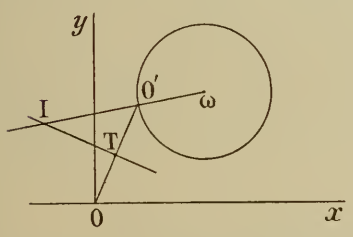
5. *a*) Le point O′ du plan mobile se déplaçant sur la courbe C du plan fixe, la normale en O′ à la courbe C passe par le centre instantané de rotation. D'autre part, la courbe C′ du plan mobile passant constamment par le point O du plan fixe, la normale en O à la courbe C′ passe aussi par le centre instantané de rotation. Il en résulte que le point I est le centre instantané de rotation.

Donc les lieux géométriques du point I dans le plan fixe et dans le plan mobile sont des courbes tangentes au point I. Ces courbes sont d'ailleurs symétriques à chaque instant par rapport à la droite IK; on en conclut que la droite IK est tangente à ces courbes au point I.



b) Le point P, symétrique de M par rapport à IK, est un point fixe. Le point H, milieu de PM, décrit la podaire de la courbe I par rapport au point P, et le point M décrit une courbe homothétique de cette podaire.

6. Supposons que la courbe C soit un cercle de centre ω. Soit O′ un point quelconque de ce cercle; pour obtenir le point I correspondant il suffit de prendre le point commun à la normale $\omega O'$ au cercle et à la perpendiculaire à OO′ en son milieu.

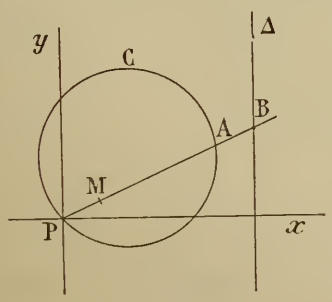


On en conclut immédiatement que le lieu du point I est une conique qui a pour foyers les points ω et O et dont le cercle donné est le cercle directeur.

Cette conique est une ellipse si le point O est à l'intérieur du cercle et une hyperbole si le point O est à l'extérieur.

Si le point O est sur le cercle, la perpendiculaire au milieu de OO′ coupe la normale au point $O'\omega$. Dans ce cas le point I est fixe et coïncide avec ω; le mouvement du plan mobile est une rotation autour du point ω.

7. Soient un cercle C, un point P sur ce cercle et une droite Δ. Par le point P on mène une sécante quelconque rencontrant le cercle au point A et la droite Δ au point B; puis, sur cette sécante on prend un point M tel que $\overline{PM}=\overline{AB}$. Nous allons montrer que le lieu du point M est une cubique circulaire, admettant un point double au point P, les tangentes en ce point étant les droites qui joignent le point P aux points de rencontre du cercle et de la droite Δ.



Prenons le point P comme origine de deux axes rectangulaires Px, Py dont le premier est perpendiculaire à Δ, et soient

$$x^2+y^2-2(ax+by)=0, \qquad x-d=0$$

les équations du cercle et de la droite.

Désignons par $y - tx = 0$ l'équation de la sécante PAB ; l'abscisse du point A est $\frac{2(a+bt)}{1+t^2}$, et celle du point M est $x = d - \frac{2(a+bt)}{1+t^2}$.

Nous aurons le lieu du point M en remplaçant dans cette équation t par $\frac{y}{x}$; nous obtenons ainsi $(x-d)(x^2+y^2)+2x(ax+by)=0$, ou $x(x^2+y^2)-d(x^2+y^2)+2x(ax+by)=0$.

C'est bien l'équation d'une cubique circulaire ayant un point double à l'origine, les tangentes en ce point étant données par l'équation $-d(x^2+y^2)+2x(ax+by)=0$.

On reconnaît sans difficulté les droites joignant le point P aux points de rencontre du cercle donné et de la droite Δ.

Si Δ est tangente au cercle, ces tangentes sont confondues, la courbe est une cissoïde ; si Δ passe par le centre du cercle, les tangentes sont perpendiculaires, la courbe est une strophoïde. Dans le cas général, la courbe est une podaire de parabole.

André COURTOIS, lycée de Douai.

Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Denain ; J. Gérin, école des Anglais, à Lyon.

1825. — *L'équation* $\operatorname{tg}\theta + 2\theta = 0$ *a une racine voisine de* $\frac{\pi}{2}$, *soit* $\frac{\pi}{2}+\Omega$.

Calculer, avec l'approximation que comportent les tables employées, la valeur en grades et fraction décimale de grade de l'angle mesuré par l'arc Ω *du cercle de rayon un.*

L'on emploiera la méthode de résolution suivante :

L'équation donnée peut s'écrire $\log\operatorname{cotg}\Omega = \log\pi + \log\left(1+\frac{\Omega}{100}\right)$; $\frac{\Omega}{100}$ *étant petit, l'équation* $\log\operatorname{cotg}\Omega_1 = \log\pi$ *donne une valeur approchée* Ω_1 *de* Ω.

Une valeur plus approchée Ω_2 *est donnée par* $\log\operatorname{cotg}\Omega_2 = \log\pi + \log\left(1+\frac{\Omega_1}{100}\right)$.

Enfin, de Ω_2, *l'on peut déduire une valeur encore plus approchée* Ω_3, *par le même procédé*

Si l'on calcule la valeur $f(\Omega_3)$ *de l'expression* $\log\operatorname{cotg}\Omega_3 - \log\pi\left(1+\frac{\Omega_3}{100}\right)$, *la valeur cherchée* Ω *sera obtenue par la résolution de l'équation* $\frac{\Omega-\Omega_3}{-f(\Omega_3)} = K$, *où la constante* K *a une valeur que l'on calculera à l'aide des tables.*

On calcule aisément $\log\pi = 0{,}49715$, et de la relation $\log\operatorname{cotg}\Omega_1 = \log\pi = 0{,}49715$ on déduit $\Omega_1 = 19{,}6187$, en prenant le grade comme unité.

On a ensuite $1+\frac{\Omega_1}{100} = 1{,}196187$, $\log\left(1+\frac{\Omega_1}{100}\right) = 0{,}07780$,

puis $\log\operatorname{cotg}\Omega_2 = \log\pi + \log\left(1+\frac{\Omega_1}{100}\right) = 0{,}57495$, et $\Omega_2 = 16{,}5570$.

De même $1+\frac{\Omega_2}{100} = 1{,}16557$, $\log\left(1+\frac{\Omega_2}{100}\right) = 0{,}06654$,

$$\log\operatorname{cotg}\Omega_3 = \log\pi + \log\left(1+\frac{\Omega_2}{100}\right) = 0{,}56369, \quad \text{et} \quad \Omega_3 = 16{,}9718.$$

Calculons maintenant $f(\Omega_3)$. Nous avons

$$f(\Omega_3) = \log\operatorname{cotg}\Omega_3 - \log\pi - \log\left(1+\frac{\Omega_3}{100}\right), \quad f(\Omega_3) = 0{,}56369 - 0{,}49715 - 0{,}06808 = -0{,}00154.$$

Si nous appliquons maintenant la formule d'approximation de Newton, nous avons

$$\Omega - \Omega_3 = -\frac{f(\Omega_3)}{f'(\Omega_3)},$$

ce qui montre que la constante K de l'énoncé est égale à $\frac{1}{f'(\Omega_3)}$.

La dérivée de $f(\Omega_3)$ par rapport à Ω_3 est $f'(\Omega_3) = \frac{d}{d\Omega_3} \log \operatorname{cotg} \Omega_3 - \frac{\log e}{1 + \frac{\Omega_3}{100}} \cdot \frac{1}{100}$.

Soit x la valeur de Ω_3 en radians ; on a $\frac{x}{\Omega_3} = \frac{\pi}{200}$, ou $x = \frac{\pi\Omega_3}{200}$, et $\log \operatorname{cotg} \Omega_3 = \log \operatorname{cotg} x$.

Maintenant $\frac{d}{d\Omega_3} (\log \operatorname{cotg} \Omega_3) = \frac{d}{dx} (\log \operatorname{cotg} x) . \frac{dx}{d\Omega_3} = \frac{d}{dx} (\log \operatorname{cotg} x) . \frac{\pi}{200}$.

Or
$$\frac{d}{dx} (\log \operatorname{cotg} x) = \frac{\log e}{\operatorname{cotg} x} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{2 \log e}{\sin 2x};$$

donc,
$$\frac{d}{d\Omega_3} (\log \operatorname{cotg} \Omega_3) = -\frac{\pi \log e}{100 \sin 2\,\Omega_3},$$

et par suite,
$$f'(\Omega_3) = -\log e \left[\frac{\pi}{100 \sin 2\,\Omega_3} + \frac{1}{100 + \Omega_3} \right].$$

On obtient aisément $2\Omega_3 = 33{,}9436$, $\log \sin 2\,\Omega_3 = \bar{1}{,}70610$,

$$\log \frac{\pi}{100 \sin 2\,\Omega_3} = \log \frac{\pi}{100} - \log \sin 2\Omega_3 = \bar{2}{,}49715 + 0{,}29390 = \bar{2}{,}79105,$$

d'où l'on déduit
$$\frac{\pi}{100 \sin 2\,\Omega_3} = 0{,}06181.$$

D'autre part $\log (100 + \Omega_3) = 2{,}06808$, $\log \frac{1}{100 + \Omega_3} = \bar{3}{,}93192$, et $\frac{1}{100 + \Omega_3} = 0{,}00855$.

On a enfin $\log e = 0{,}43429$, et par suite

$$f'(\Omega_2) = -0{,}43429\,[0{,}06181 + 0{,}00855] = -0{,}43429 \times 0{,}07036.$$

On a alors
$$\Omega - \Omega_3 = -\frac{f(\Omega_3)}{f'(\Omega_3)} = -\frac{0{,}00154}{0{,}43429 \times 0{,}07036},$$

et
$$\Omega = 16{,}9718 - \frac{0{,}00154}{0{,}43429 \times 0{,}07036}.$$

$$\log 0{,}00154 = \bar{3}{,}18752$$
$$-\log 0{,}43429 = 0{,}36222$$
$$-\log 0{,}07036 = 1{,}15267$$

d'où
$$\log \frac{0{,}00154}{0{,}43429 \times 0{,}07036} = \bar{2}{,}70241$$

et
$$\frac{0{,}00154}{0{,}43429 \times 0{,}07036} = 0{,}0504.$$

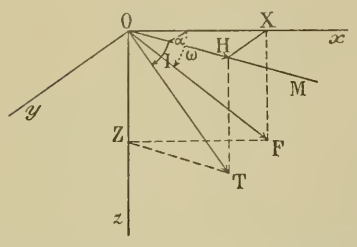
On a donc
$$\Omega = 16{,}9718 - 0{,}0504 = 16{,}9214.$$

PHYSIQUE

1769. — *Le cadre d'une boussole d'inclinaison étant dans le méridien magnétique, on mesure l'inclinaison* I, *pour laquelle on trouve* $\sin I = \frac{3}{5}$. *On fait osciller l'aiguille ; on trouve* 10 *oscillations par mi-*

nute. On fait tourner le cadre d'un angle α tel que l'on ait $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. *On demande la nouvelle inclinaison apparente et le nouveau nombre d'oscillations par minute.*

Par O, pôle nord de l'aiguille, menons un plan horizontal. Soit OM la trace du méridien magnétique et Ox la trace du second plan vertical, faisant un angle α avec le premier. Prenons pour axe Oz la verticale descendante.



Dans le méridien magnétique, l'aiguille prend la direction OT du champ terrestre dont les composantes horizontale et verticale sont OH et OZ. Quand on a fait tourner le cadre d'un angle α, la composante OZ continue d'agir sur l'aiguille, mais la force horizontale efficace se réduit à la projection OX de OH sur Ox, et l'aiguille prend la direction de OF, résultante de OX et de OZ.

Désignons par ω l'inclinaison apparente dans le plan xOz. On a

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{Z}{X}, \qquad X = H\cos\alpha, \qquad H = \frac{Z}{\operatorname{tg} I}.$$

Donc
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg} I}{\cos\alpha} = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad \text{ou} \quad \sin\omega = \frac{3}{4}.$$

La nouvelle inclinaison est précisément égale à l'angle dont on a tourné le cadre de la boussole.

Soient t et t' les durées d'oscillation dans les deux cas, k le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe de suspension, M le moment magnétique. Nous avons

$$t = \pi\sqrt{\frac{k}{MT}} \quad \text{et} \quad t' = \pi\sqrt{\frac{k}{MF}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{T}{F}}.$$

Or
$$T = \frac{X}{\cos\alpha\cos I} \quad \text{et} \quad F = \frac{X}{\cos\omega}, \quad \text{d'où} \quad \frac{T}{F} = \frac{\cos\omega}{\cos\alpha\cos I} = \frac{5}{4}.$$

Si n et n' désignent les nombres d'oscillations par minute,

$$\frac{n'}{n} = \frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{4}{5}}, \qquad \text{d'où} \qquad n' = \sqrt{80} = 8{,}95.$$

J. COULANGE et J. VÉROTS, école des Anglais à Lyon.

Solutions en partie exactes de MM. H. Buttet, à Lyon, et J. Bing, à Toul.

QUESTION PROPOSÉE

1889. — On donne deux cercles concentriques (C) et (C_1); par un point fixe, P, on mène une sécante variable, qui rencontre (C_1) en A et B, et par A, B, on mène les tangentes au cercle (C). Lieu de leurs points de rencontre.

Problème corrélatif.

R. Sasportes.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

20e Année. Septembre 1910. N° 12.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES PLANES

par M. **Louis Sire**, boursier d'agrégation à la Faculté des sciences de Lyon.

Introduction. — Je reviens sur les formules que j'ai établies dans la *Revue* (avril, mai, juin 1909) :

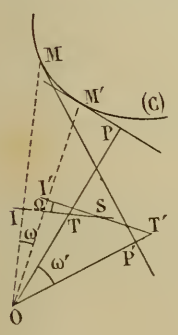
$$F_S : \frac{\rho_p}{R_p} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0 ; \qquad F_i : \frac{\rho i}{R_i} + \frac{\rho}{R} - 1 = 0 ; \qquad F_R : RR_r = 4\rho\rho_r.$$

M. d'Ocagne a fait remarquer (*Revue*, juillet 1909) qu'elles ne sont pas nouvelles ; qu'il veuille bien m'excuser si je n'ai pas signalé les travaux antérieurs, je les ignorais complètement.

D'ailleurs les démonstrations que j'ai données de ces formules sont nouvelles, j'ai étendu la formule F_S aux quasi-podaires, j'ai calculé le rayon de courbure en un point de la podaire d'ordre k et j'en ai déduit que : *la podaire d'ordre infini d'une courbe plane quelconque est une spirale logarithmique.*

Dans ce nouveau travail, je donne une démonstration directe de la formule F_R, fondée sur la même remarque que celle de M. d'Ocagne (*Annales de l'École normale supérieure*, 1887) et qui me permet d'établir la relation $\Omega = \omega$, dont je me sers plus loin. Ensuite, j'applique les formules aux systèmes de deux et trois courbes tangentes, ce qui me conduit à de nouvelles relations et j'indique quelques propriétés des courbes bien connues $\rho^n = a^n \cos n\omega$, que je généralise.

Démonstration directe de la formule F_R. — Soient M, M′ deux points infiniment voisins de la courbe plane (C) ; T, T′ les points correspondants de sa polaire réciproque par rapport au cercle de centre O et de rayon 1. Les tangentes en T, T′ sont perpendiculaires aux droites OM, OM′ aux points I, I′.



Posons $\widehat{MOM'} = \omega$, $\widehat{TOT'} = \omega'$, $\widehat{TSI'} = \Omega$, nous avons $\Omega = \omega$, par suite

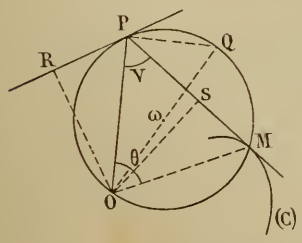
$$R_r = \lim \frac{TT'}{\sin\omega} = \lim \frac{TT'}{\sin\omega'} \cdot \frac{\sin\omega'}{MM'} \cdot \frac{MM'}{\sin\omega},$$

c'est-à-dire $R_r = 2\rho_r \cdot \frac{1}{R} \cdot 2\rho$ ou $RR_r = 4\rho\rho_r$.

Nouvelles démonstrations des formules F_S, F_i, F_R. — Je vais établir ces formules en partant de l'expression bien connue du rayon de courbure en un point d'une courbe plane $R = r\frac{dr}{dp}$.

Formule F_S. — Démontrons la formule F_S dans le cas de la transformation par quasi-podaire relative à l'angle V.

Soient M un point de la courbe plane (C), P le point correspondant de sa quasi-podaire relative à l'angle V. La tangente en P est tangente au cercle OMP de centre ω.



Posons $OM = r$, $OS = p$, $\widehat{MOP} = \theta$, $OP = r_1$, $OR = p_1$.

OS et OR étant les perpendiculaires, issues de O, aux droites MP et PR, nous aurons ainsi, pour les rayons de courbure aux points M et P,

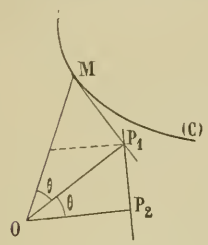
$$R = r\frac{dr}{dp}, \qquad R_p = r_1\frac{dr_1}{dp_1}.$$

Or, $p = r\sin(\theta + V)$, $p_1 = r_1\sin(\theta + V)$, $p = r_1 \sin V$, de sorte que $p^2 = rp_1 \sin V$. En différentiant, il vient $2pdp = \sin V(rdp_1 + p_1dr)$, c'est-à-dire $2p = \sin V\left(\frac{r}{\sin V}\frac{dp_1}{dr_1} + p_1\frac{dr}{dp}\right)$, $2 = \frac{r}{\sin V} \cdot \frac{1}{R_p} + \frac{\sin(\theta+V)}{r} R$.

D'autre part $r = 2\rho\sin(\theta + V)$, $r = 2\rho_p \sin V$, de là, la formule F_S : $\frac{\rho_p}{R_p} + \frac{R}{4\rho} - 1 = 0$.

Formule F_i. — Nous avons, dans ce cas, $R = r\dfrac{dr}{dp}$, $R_i = r_i\dfrac{dr_i}{dp_i}$.

Or $rr_i = 1$, d'où $rdr_i + r_idr = 0$.



D'autre part $p = r\cos\theta$, $p_i = r_i\cos\theta$, par suite $pr_i - rp_i = 0$ et, en différentiant $pdr_i + r_idp - rdp_i - p_idr = 0$, ce qui s'écrit $p + r_i\dfrac{dp}{dr_i} - r\dfrac{dp_i}{dr_i} - \rho_i\dfrac{dr}{dr_i} = 0$, ou encore, en tenant compte des relations précédentes,

$$2\cos\theta - \frac{r}{R} - \frac{r_i}{R_i} = 0,$$

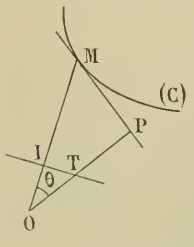
finalement

$$\frac{\rho}{R} + \frac{\rho_i}{R_i} - 1 = 0.$$

Formule F_R. — Sachant que $R = r\dfrac{dr}{dp}$, $R_r = r_1\dfrac{dr_1}{dp_1}$, nous avons $pr_1 = rp_1 = 1$,

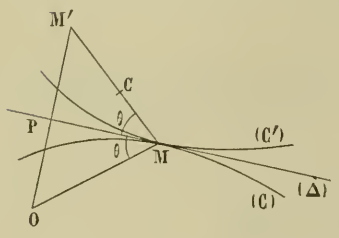
d'où $pdr_1 + r_1dp = 0$, $rdp_1 + p_1dr = 0$,

de là $RR_r = rr_1\dfrac{dr}{dp_1}\dfrac{dr_1}{dp} = \dfrac{r^2r_1^2}{pp_1} = \dfrac{rr_1}{\cos^2\theta} = \dfrac{r}{\cos\theta}\cdot\dfrac{r_1}{\cos\theta} = 4\rho\rho_r$.



La formule F_S *déduite de la formule de Savary.* — Dans le cas de la transformation par podaire, la formule F_S se déduit aisément de la formule de Savary. Considérons, en effet, deux courbes tangentes en un point et symétriques par rapport à cette tangente. Si on fait rouler sans glisser l'une d'elles (C′) sur l'autre (C), à chaque instant les deux courbes seront symétriques par rapport à la tangente commune (Δ) et tout point M′ lié à (C′) sera le symétrique d'un point fixe O par rapport à (Δ); autrement dit le lieu de M′ est homothétique dans le rapport 2 de la podaire de la courbe (C) par rapport au point O.

Soit C le centre de courbure du lieu de M′ en ce point M′. Posons $MO = MM' = r$, $MC = \rho$.



La formule de Savary nous donne

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k\sin\theta} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{k} = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_m}.$$

Or, dans le cas considéré, $R_m = -R_f = -R$, R désignant le rayon de courbure de (C) au point M; de là

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{2}{R\sin\theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r-\rho}{r\rho} = \frac{2}{R\sin\theta}, \qquad \frac{-2R_p}{r(r-2R_p)} = \frac{2}{R\sin\theta};$$

d'autre part $r = 2\rho_p$, $r = 2\rho\sin\theta$, d'où la formule F_S.

Relations entre les rayons de courbure des développées successives d'une courbe, de ses podaires, de son inverse et de sa polaire réciproque. — Désignons par $d\alpha$, $d\alpha_p$, $d\alpha_i$, $d\alpha_r$ les angles de contingence en un point d'une courbe et aux points correspondants de sa podaire, de son inverse et de sa polaire réciproque par rapport à un point O; soit ω l'angle formé par les rayons qui joignent le point O à deux points infiniment voisins de la courbe plane (C). Lorsque j'ai démontré les formules F_S, F_i, F_R (voir la première méthode), j'ai établi, aux notations près, les formules suivantes :

$$d\alpha_p = 2d\alpha - \omega, \qquad d\alpha_i = 2\omega - d\alpha, \qquad d\alpha_r = \omega;$$

de là, les deux relations entre les angles de contingence :

$$d\alpha_p + d\alpha_i = d\alpha + d\alpha_r, \qquad d\alpha_p - d\alpha_i = 3(d\alpha - d\alpha_r).$$

Or, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$, $R_p = \dfrac{ds_p}{d\alpha_p}$, $R_i = \dfrac{ds_i}{d\alpha_i}$, $R_r = \dfrac{ds_r}{d\alpha_r}$,

d'où les deux relations entre les éléments d'arcs et les rayons de courbure :

$$\frac{ds_p}{R_p} + \frac{ds_i}{R_i} = \frac{ds}{R} + \frac{ds_r}{R_r},$$

$$\frac{ds_p}{R_p} - \frac{ds_i}{R_i} = 3\left(\frac{ds}{R} - \frac{ds_r}{R_r}\right). \tag{1}$$

Supposons que le point considéré M de la courbe plane (C) soit tel que la parabole de foyer O et tangente en M à (C) ait un contact du second ordre avec (C); le point correspondant de sa podaire est un point

d'inflexion : $R_p = \infty$. Les deux formules précédentes se simplifient et donnent $\frac{ds}{R} = \frac{1}{2}\frac{ds_r}{R_r} = \frac{1}{3}\frac{ds_i}{R_i}$, de même si $R_i = \infty$, on a $\frac{ds}{R} = 2\frac{ds_r}{R_r} = \frac{2}{3}\frac{ds_p}{R_p}$.

Calculons l'angle de contingence $d\alpha_{p,k}$ en un point de la podaire d'ordre k d'une courbe plane (C). Pour la podaire d'ordre 1, nous avons $d\alpha_{p,1} = 2d\alpha - \omega$; pour la podaire d'ordre 2, $d\alpha_{p,2} = 2d\alpha_{p,1} - d\alpha$.

D'une manière générale, pour la podaire d'ordre k,

$$d\alpha_{p,k} = 2d\alpha_{p,k-1} - d\alpha_{p,k-2};$$

nous obtenons ainsi une relation de récurrence pour déterminer l'angle de contingence $d\alpha_{p,k}$. Ecrivons cette relation sous la forme $d\alpha_{p,k} - d\alpha_{p,k-1} = d\alpha_{p,k-1} - d\alpha_{p,k-2}$, et posons $d\alpha_{p,k} - d\alpha_{p,k-1} = d\beta_k$; nous aurons

$$d\beta_k = d\beta_{k-1} = \cdots = d\beta_1 = d\alpha - d\alpha_r,$$

de là

$$d\alpha_{p,k} - d\alpha_{p,k-1} = d\alpha - d\alpha_r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\alpha_{p,2} - d\alpha_{p,1} = d\alpha - d\alpha_r;$$

en ajoutant membre à membre, il vient $d\alpha_{p,k} - d\alpha_{p,1} = (k-1)(d\alpha - d\alpha_r)$, d'où $d\alpha_{p,k} = (k+1)d\alpha - kd\alpha_r$.

Or,

$$d\alpha_{p,k} = \frac{ds_{p,k}}{R_{p,k}},$$

de sorte que

$$\frac{ds_{p,k}}{R_{p,k}} = (k+1)\frac{ds}{R} - k\frac{ds_r}{R_r}. \tag{2}$$

Les calculs précédents sont relatifs à la podaire d'ordre k, k étant un entier positif; si k est négatif les formules subsistent également.

Introduisons les rayons de courbure des développées successives des courbes considérées. Si $s_1, s_2, \ldots, s_n$ désignent les arcs des développées successives de la courbe (C), $d\alpha_1, d\alpha_2, \ldots, d\alpha_n$ les angles de contingence, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les rayons de courbure aux points correspondants, nous avons

$$ds_1 = dR, \qquad ds_2 = dR_1, \qquad \ldots, \qquad ds_n = dR_{n-1},$$
$$d\alpha = d\alpha_1 = \cdots = d\alpha_n,$$
$$R_1 = \frac{ds_1}{d\alpha_1} = \frac{dR}{d\alpha} = \frac{RdR}{ds}, \quad \ldots, \quad R_n = \frac{ds_n}{d\alpha_n} = \frac{dR_{n-1}}{d\alpha} = \frac{RdR_{n-1}}{ds};$$

nous en tirons les formules connues $\frac{ds}{R} = \frac{dR}{R_1} = \frac{dR_1}{R_2} = \cdots = \frac{dR_{n-1}}{R_n}$.

Nous avons des formules analogues pour la podaire d'ordre k, l'inverse et la polaire réciproque:

$$\frac{ds_{p,k}}{R_{p,k}} = \frac{dR_{p,k}}{R_{p,k,1}} = \frac{dR_{p,k,1}}{R_{p,k,2}} = \cdots = \frac{dR_{p,k,n-1}}{R_{p,k,n}},$$
$$\frac{ds_i}{R_i} = \frac{dR_i}{R_{i,1}} = \frac{dR_{i,1}}{R_{i,2}} = \cdots = \frac{dR_{i,n-1}}{R_{i,n}},$$
$$\frac{ds_r}{R_r} = \frac{dR_r}{R_{r,1}} = \cdots = \frac{dR_{r,n-1}}{R_{r,n}}.$$

$R_{p,k,h}$, $R_{i,h}$, $R_{r,h}$ désignant les rayons de courbure de la $h$ième développée de la podaire d'ordre k, de l'inverse et de la polaire réciproque de la courbe (C). En portant ces valeurs dans les relations (1), (2), nous obtenons les formules

$$\frac{dR_{p,1,h}}{R_{p,1,h+1}} + \frac{dR_{i,h}}{R_{i,h+1}} = \frac{dR_h}{R_{h+1}} + \frac{dR_{r,h}}{R_{r,h+1}},$$
$$\frac{dR_{p,1,h}}{R_{p,1,h+1}} - \frac{dR_{i,h}}{R_{i,h+1}} = 3\left(\frac{dR_h}{R_{h+1}} - \frac{dR_{r,h}}{R_{r,h+1}}\right),$$
$$\frac{dR_{p,k,h}}{R_{p,k,h+1}} = (k+1)\frac{dR_h}{R_{h+1}} - k\frac{dR_{r,h}}{R_{r,h+1}}.$$

Relation entre les rayons de courbure R, R_p, R_i, R_r. — Posons $OM = r$, nous avons

$$\rho = \frac{r}{2\cos\theta}, \qquad \rho_p = \frac{r}{2}, \qquad \rho_r = \frac{1}{2r\cos^2\theta}, \qquad \rho_i = \frac{1}{2r\cos\theta}.$$

Avec ces valeurs, les formules F_S, F_i, F_R deviennent

$$\frac{r}{2}\cdot\frac{1}{R_p} + \frac{\cos\theta}{2r}\cdot R - 1 = 0,$$
$$\frac{1}{2r\cos\theta}\cdot\frac{1}{R_i} + \frac{r}{2\cos\theta}\cdot\frac{1}{R} - 1 = 0,$$
$$RR_r = \frac{1}{\cos^3\theta}.$$

La formule F_R est ainsi mise sous sa première forme trouvée par Mannheim.

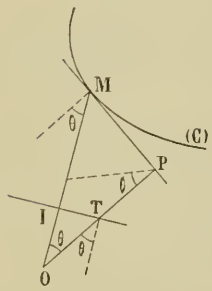
Eliminons r et θ entre les trois équations précédentes ; nous obtenons la relation

$$R^{\frac{1}{3}} R_r^{\frac{1}{3}} \left[R^{\frac{1}{3}} R_r^{\frac{1}{3}} - R_i R_p \right]^2 - 4 R_i R_p \left[R_p R_r^{\frac{1}{3}} - R^{\frac{2}{3}} \right] \left[R^{\frac{1}{3}} R_i - R_r^{\frac{2}{3}} \right] = 0 ;$$

en un point d'inflexion de la podaire $(R_p = \infty)$, cette formule devient $3 R_i R^{\frac{1}{3}} - 4 R_r^{\frac{2}{3}} = 0$;

en un point d'inflexion de l'inverse $(R_i = \infty)$, $3 R_p R_r^{\frac{1}{3}} - 4 R^{\frac{2}{3}} = 0$.

Ces deux dernières équations sont équivalentes.



Application aux coniques. — Supposons que la courbe (C) soit une conique de foyer O ; sa podaire (P) est un cercle, son inverse (I) est un limaçon de Pascal de point double O ; sa polaire réciproque (T) est un cercle. Le rayon a du cercle (P) est d'ailleurs égal au demi-grand axe de la conique et le cercle (T) admettant pour podaire par rapport à O le limaçon (I), son rayon b est égal à la constante du limaçon (nous appelons constante d'un limaçon la longueur constante que l'on porte sur chaque rayon vecteur de son cercle générateur). Il en résulte que si R_1 désigne le rayon de courbure en un point d'une conique de foyer O et de demi-grand axe a, R_2 le rayon de courbure au point correspondant du limaçon inverse par rapport à O et de constante b, nous avons la relation

$$b^{\frac{1}{3}} R_1^{\frac{1}{3}} \left[R_1^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} - a R_2 \right]^2 - 4 a R_2 \left[a b^{\frac{1}{3}} - R_1^{\frac{2}{3}} \right] \left[R_1^{\frac{1}{3}} R_2 - b^{\frac{2}{3}} \right] = 0.$$

Si la conique considérée est une parabole $(a = \infty)$, sa podaire par rapport à O est une cardioïde, et la relation précédente devient $R_1 R_2^3 = c^{te}$.

Le produit du rayon de courbure en un point d'une parabole par le cube du rayon de courbure au point correspondant de la cardioïde inverse par rapport à son foyer est constant.

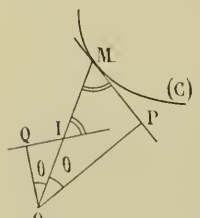
Or, si p désigne le paramètre de la parabole, N la longueur de la normale, nous savons que

$$R_1 = \frac{N^3}{p^2}, \qquad \text{de là} \qquad N R_2 = c^{te},$$

donc :

Le rayon de courbure en un point d'une cardioïde est inversement proportionnel à la normale de la parabole inverse par rapport à son point de rebroussement.

Relations entre les rayons de courbure des podaires successives d'une courbe. — Considérons la podaire d'ordre h d'une courbe (C) par rapport à un point O ; j'ai établi la relation (*Revue*, mai 1909) :



$$\Delta_h'' = 2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - h(\Delta - 2)} ;$$

or

$$\Delta_{p,h} = \frac{R_{p,h}}{\rho_{p,h}}, \qquad \Delta = \frac{R}{\rho},$$

de sorte que la formule précédente devient

$$4h\rho\rho_{p,h} - 2\rho(h+1) R_{p,h} - 2R(h-1)\rho_{p,h} + hRR_{p,h} = 0 ;$$

d'autre part $\rho_{p,1} = \rho \cos\theta$, $\rho_{p,2} = \rho \cos^2\theta$, ... $\rho_{p,h} = \rho \cos^h\theta$;

par suite, pour les podaires d'ordre h, k, l, nous avons les relations

$$(\alpha) \begin{cases} 4h\rho^2 \cos^h\theta - 2\rho(h+1) R_{p,h} - 2R(h-1)\rho \cos^h\theta + hRR_{p,h} = 0, \\ 4k\rho^2 \cos^k\theta - 2\rho(k+1) R_{p,k} - 2R(k-1)\rho \cos^k\theta + kRR_{p,k} = 0, \\ 4l\rho^2 \cos^l\theta - 2\rho(l+1) R_{p,l} - 2R(l-1)\rho \cos^l\theta + lRR_{p,l} = 0. \end{cases}$$

L'élimination de ρ, $\cos\theta$ entre les trois équations précédentes nous conduit à une relation entre les rayons de courbure R, $R_{p,h}$, $R_{p,k}$, $R_{p,l}$; nous ne ferons cette élimination que dans quelques cas particuliers :

1° *Le point* M *de la courbe* C *est un point de rebroussement.* Les formules (α) deviennent dans ce cas

$$2h\rho \cos^h\theta - (h+1) R_{p,h} = 0, \qquad 2k\rho \cos^k\theta - (k+1) R_{p,k} = 0, \qquad 2l\rho \cos^l\theta - (l+1) R_{p,l} = 0 ;$$

l'élimination de ρ, $\cos\theta$ entre ces trois dernières équations nous conduit à la relation

$$(a) \qquad \left(\frac{k}{h} \cdot \frac{h+1}{k+1} \cdot \frac{R_{p,h}}{R_{p,k}} \right)^{\frac{1}{h-k}} = \left(\frac{l}{k} \cdot \frac{k+1}{l+1} \cdot \frac{R_{p,k}}{R_{p,l}} \right)^{\frac{1}{k-l}} ;$$

de là,

Les rayons de courbure aux points correspondants des podaires d'ordre h, k, l d'un point de rebroussement d'une courbe satisfont à la relation (a).

Si la courbe (C) se réduit à un point, la relation (a) sera vérifiée pour tous les points homologues de ses

podaires d'ordre h, k, l ; il en sera de même si la courbe (C) est réductible à un point ; nous reviendrons sur ces courbes plus loin.

D'autre part, au point M nous avons $\Delta = 0$; par suite $\Delta_p^h = \frac{2h}{h+1}$ ou encore $R_{p,h} = \frac{2h}{h+1}\rho_{p,h}$, formule qui donne le rayon de courbure au point correspondant de la podaire d'ordre h d'un point de rebroussement de la courbe (C).

Si $h = -1$, nous avons $R_{p,-1} = \infty$, c'est-à-dire :

La podaire d'un point d'inflexion est un point de rebroussement.

La formule F_8 donne immédiatement ce résultat. Nous en déduisons :

Les rayons de courbure aux points correspondants des podaires d'ordre $h+1$, $k+1$, $l+1$ *d'un point d'inflexion d'une courbe satisfont à la relation* (a).

D'ailleurs, en un point d'inflexion, nous avons $\Delta = \infty$; par suite

$$\Delta_p^h = \frac{2(h-1)}{h} \qquad \text{ou encore} \qquad R_{p,h} = \frac{2(h-1)}{h}\rho_{p,h}.$$

2° *Le point* M *est le pied d'une normale issue de* O *à* (C). — Dans ce cas, nous avons $\theta = 0$, de sorte que les deux premières équations (α) deviennent

$$4h\rho^2 - 2[(h+1)R_{p,h} + (h-1)R]\rho + hRR_{p,h} = 0, \qquad 4k\rho^2 - 2[(k+1)R_{p,k} + (k-1)R]\rho + kRR_{p,k} = 0;$$

nous en déduisons

$$2\rho = \frac{hkR(R_{p,k} - R_{p,h})}{h(k+1)R_{p,k} - k(k+1)R_{p,h} + R(h-k)},$$

formule qui donne la distance OM d'un point à une courbe en fonction rationnelle du rayon de courbure de la courbe en M et des rayons de courbure au point M de ses podaires d'ordre h, k.

Supposons en outre que le point M soit un point de rebroussement ; les deux relations précédentes deviennent

$$2h\rho - (h+1)R_{p,h} = 0, \qquad 2k\rho - (k+1)R_{p,k} = 0,$$

et donnent

$$\frac{R_{p,h}}{R_{p,k}} = \frac{h}{h+1} \cdot \frac{k}{k+1}.$$

Considérons dans ces conditions trois podaires d'ordre h, k, l ; on vérifie facilement que si ces nombres sont harmoniques on a la relation

$$\frac{2}{R_{p,l}} = \frac{1}{R_{p,h}} + \frac{1}{R_{p,k}},$$

c'est-à-dire que les centres de courbure correspondants forment une division harmonique avec le point M.

(*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1823. — *On considère une courbe* (S) *et le cercle* (Γ) *décrit sur le rayon de courbure de la courbe en* M, *comme diamètre.*

1° *Déterminer les courbes* (S) *pour lesquelles le cercle* (Γ) *est tangent à* Ox. *Construire celle de ces courbes qui passe à l'origine.*

2° *Trouver pour cette courbe le lieu* (Σ) *du centre* I *de* (Γ).

3° *Soit* P *la projection de* I *sur* Ox ; *montrer que l'on a* arc OM = 2OP.

4° *Montrer que les tangentes en* M *à* (S) *et en* I *à* (Σ) *se coupent sur* Ox.

1° Soient x, y les coordonnées du point M, α l'angle polaire de la demi-tangente positive à la courbe (S), R la mesure algébrique du rayon de courbure sur la demi-droite d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Pour que le cercle (Γ) soit tangent à Ox, il faut et suffit que l'ordonnée de son centre soit égale à $\pm\frac{R}{2}$. D'où l'équation

$$y + \frac{R}{2}\cos\alpha = \pm\frac{R}{2}.$$

Nous pouvons nous borner à prendre le signe $+$ au second membre, car si nous faisons tourner (S) de 180° autour de l'origine, sans changer le sens des arcs croissants, le premier membre change visiblement de signe, le second restant invariable.

Prenons donc

$$(1) \qquad y = \frac{R}{2}(1 - \cos\alpha) = R\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Nous avons d'autre part la relation bien connue $\dfrac{dy}{d\alpha} = R\sin\alpha = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Eliminons R,
$$\frac{dy}{y} = 2\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Intégrons,
$$y = C\sin^4\frac{\alpha}{2}. \qquad (C = c^{te})$$

Puis
$$dx = dy\cot g\,\alpha = C\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha d\alpha = \frac{C}{2}(1 - \cos\alpha)\cos\alpha d\alpha.$$

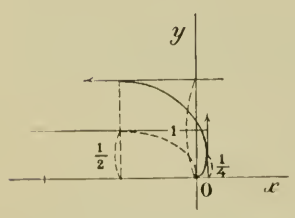
D'où
$$x = x_0 + \frac{C}{2}\sin\alpha - \frac{C}{4}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right). \qquad (x_0 = c^{te})$$

Les deux constantes C et x_0 ne font, en variant, que remplacer une courbe particulière par celles qu'on en déduit par translation parallèle à Ox et par homothétie par rapport à l'origine, ce qui était d'ailleurs évident *a priori*. Nous pouvons donc nous borner à considérer la courbe obtenue pour $x_0 = 0$ et $C = 1$. Construisons cette courbe. Nous avons

$$x = -\frac{\alpha}{4} + \frac{\sin\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{8}, \qquad y = \sin^4\frac{\alpha}{2}.$$

Si l'on change α en $\alpha + 2k\pi$, la courbe subit la translation $-\dfrac{k\pi}{2}$ suivant Ox. Si l'on change α en $-\alpha$, elle subit une symétrie par rapport à Oy. On peut donc se borner à faire varier α de 0 à π. Nous avons d'autre part $\dfrac{dx}{d\alpha} = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha$, $\dfrac{dy}{d\alpha} = 2\sin^3\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

D'où le tableau suivant :



α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dx}{d\alpha}$	0	+	0	—	0
x	0	cr.	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$	décr.	$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{d\alpha}$		+		+	
y	0	cr.	$\frac{1}{4}$	cr.	1

Si l'on se rappelle enfin la signification géométrique de α, on construit sans peine la courbe, qui a la forme ci-dessus. Resterait à compléter par symétrie et translation.

2° Nous avons, d'après l'équation (1), $R = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Les coordonnées X, Y du point I sont donc

$$(2) \qquad X = x - \frac{R}{2}\sin\alpha = -\frac{1}{4}(\alpha - \sin\alpha), \qquad Y = \frac{R}{2} = \frac{1}{4}(1 - \cos\alpha).$$

On reconnaît les équations d'une cycloïde, dont nous figurons en pointillé la partie qui correspond à l'arc (S) que nous avons tracé.

3° Nous avons $\dfrac{ds}{d\alpha} = R = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, d'où $s = \dfrac{\alpha - \sin\alpha}{2} = -2X$.

C. q. f. d.

4° La tangente en M à (S) a pour équation $\dfrac{\xi - x}{\cos\alpha} = \dfrac{\eta - \sin^4\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$, où ξ et η sont les coordonnées courantes.

Pour $\eta = 0$, on a $\xi_0 = x - \dfrac{\sin^4\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

La tangente en I à (Σ) a pour équation $\dfrac{\xi - X}{-\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\eta - \dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Pour $\eta = 0$, on a $\xi_1 = X + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = x - \dfrac{\sin\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$,

en tenant compte de (2).

Ecrivons que $\xi_0 = \xi_1$; nous avons, en divisant par $\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$,

$$-\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sin^2\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{ou} \qquad 2\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha,$$

ce qui est évident.

Remarque. — On pourrait donner des démonstrations géométriques plus ou moins simples des trois dernières parties. Nous nous bornerons simplement à faire remarquer que la dernière est évidente, si l'on se rappelle que la corde de contact d'un cercle variable avec son enveloppe est constamment perpendiculaire à la tangente au lieu du centre de ce cercle.

J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. J. Delens, à Rouen ; G. Foucry, à Roanne ; André Pavillon ; Lieutaud ; Névéjans ; A. Courtois ; Letac, à Poitiers ; A. Rousseau ; L. Simon, à Montbéliard.

1828. — *On considère trois coniques* C, C′ *et* C″ *ayant deux tangentes communes a et b et on demande :*

1° *L'enveloppe des droites* Δ *telles que leurs pôles par rapport à* C, C′, C″ *soient en ligne droite. Soit* Δ_1 *cette droite.*

2° *On demande aussi l'enveloppe des droites* Δ_1, *et le lieu du point de rencontre de* Δ *avec* Δ_1.

3° *On demande en outre l'enveloppe de l'enveloppe de* Δ *et du lieu du point de rencontre de* Δ *et* Δ_1 *quand* C *et* C′ *restant fixes,* C″ *varie.*

Ce problème n'est pas autre chose que le transformé d'une série de problèmes tous très connus.

Transformons d'abord le problème actuel par polaires réciproques : les coniques C, C′ et C″ devien-

dront trois autres coniques passant par deux points fixes A et B, et une transformation homographique ultérieure permettra de rejeter les points A et B, à l'infini, aux points cycliques. Nous aurons alors trois cercles C, C′, C″, et un point Δ dont les trois polaires devront passer par le même point Δ_1. Nous savons que le lieu de Δ est le cercle orthogonal aux trois cercles donnés et que le lieu de Δ_1 est le même cercle, Δ_1 étant à chaque instant diamétralement opposé au point Δ.

Le point de rencontre des deux droites Δ et Δ_1 est devenu ici la ligne de jonction de Δ, Δ_1 ; c'est un diamètre du cercle orthogonal ; cette droite enveloppe donc un point, le centre du cercle orthogonal.

Dans le problème actuel, la droite Δ enveloppe une conique tangente aux deux droites a et b, la droite Δ_1 enveloppe la même conique, et le point de rencontre de Δ, Δ_1 décrit une droite, qui est la polaire du point de rencontre de a et b par rapport à cette conique.

Quand le cercle C″ varie, le cercle orthogonal aux trois cercles passe par deux points fixes situés sur la ligne des centres des cercles C et C′ et harmoniques par rapport à ces deux cercles. L'enveloppe de la conique enveloppe de Δ est donc un couple de droites qui passent par l'intersection des cordes de contact des coniques C et C′ avec les droites a, b, et qui sont conjuguées par rapport aux deux coniques ; il y a en plus les deux droites a et b.

Le lieu du centre du cercle orthogonal est une droite. L'enveloppe de la droite, lieu du point de rencontre de Δ, Δ_1, est un point.

Pour traiter la question par le calcul et directement, nous pouvons prendre pour axes les deux tangentes communes et écrire les équations tangentielles des trois coniques ainsi :

$$abuv + auw + bvw + cw^2 = 0, \qquad a'b'uv + a'uw + b'vw + c'w^2 = 0, \qquad a''b''uv + a''uw + b''vw + c''w^2 = 0.$$

Ce sont bien là trois coniques tangentes aux axes de coordonnées en des points $A(x = a, \quad y = 0)$, $B(x = 0, \quad y = b)$... etc. En outre, nous nous appuierons sur les propriétés générales du jacobien de trois formes homogènes à trois variables et du même degré, et nous appliquerons les résultats au cas actuel.

Nous savons que le jacobien de ces trois formes admet pour solution double toute solution commune aux trois formes. Ce théorème est d'ailleurs vrai pour un système de n formes homogènes à n variables et du même degré.

Soient alors $f(u, v, w) = 0$, $g(u, v, w) = 0$, $h(u, v, w) = 0$ trois coniques quelconques données par leurs équations tangentielles, et considérons une droite $\Delta(u, v, w)$ dont les trois pôles soient en ligne droite. Comme le pôle de Δ par rapport à la conique $f(u, v, w) = 0$ a pour coordonnées homogènes f'_u, f'_v, f'_w, ceci voudra dire que nous avons la relation

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix} = 0.$$

L'enveloppe des droites Δ est donc une courbe de troisième classe.

Or, dans le cas actuel, les trois formes f, g, h ont deux solutions communes ; donc l'équation précédente admet ces deux solutions comme solutions doubles, et la courbe de troisième classe se décompose en un point et une conique. Le point est le point de rencontre des deux tangentes doubles, c'est-à-dire ici l'origine ; et les deux tangentes doubles sont les axes. La conique, véritable enveloppe de la droite Δ, est donc tangente aux deux tangentes communes.

Les deux droites Δ et Δ_1 sont conjuguées par rapport aux trois coniques et par rapport à toutes les coniques du réseau. Les pôles de Δ_1 sont donc aussi en ligne droite sur la droite Δ et cette nouvelle droite, Δ_1, enveloppe la même conique que Δ, la conique Γ.

Les calculs se feront sans difficulté, en appliquant ce que nous avons dit aux équations choisies : le jacobien est ici

$$\begin{vmatrix} abv + aw & abu + bw & au + bv + 2cw \\ a'b'v + a'w & a'b'u + b'w & a'u + b'v + 2c'w \\ a''b''v + a''w & a''b''u + b''w & a''u + b''v + 2c''w \end{vmatrix} = 0,$$

et il est visible que le terme indépendant de w,

$$\begin{vmatrix} abv & abu & au + bv \\ a'b'v & a'b'u & a'u + b'v \\ a''b''v & a''b''u & a''u + b''v \end{vmatrix},$$

est nul.

Le terme en $u\ v\ w$ est

$$\begin{vmatrix} abv & bw & au \\ a'b'v & b'w & a'u \\ a''b''v & b''w & a''u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aw & abu & bv \\ a'w & a'b'u & b'v \\ a''w & a''b''u & b''v \end{vmatrix},$$

il est donc égal à $2Auvw$, en posant

$$A = \begin{vmatrix} ab & b & a \\ a'b' & b' & a' \\ a''b'' & b'' & a'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a' & b' & a'b' \\ a'' & b'' & a''b'' \end{vmatrix}.$$

Le terme en uw^2 est

$$\begin{vmatrix} aw & abu & 2cw \\ a'w & a'b'u & 2c'w \\ a''w & a''b''u & 2c''w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aw & bw & au \\ a'w & b'w & a'u \\ a''w & b''w & a''u \end{vmatrix};$$

il est égal à $2Buw^2$, en posant

$$B = \begin{vmatrix} c & a & ab \\ c' & a' & a'b' \\ c'' & a'' & a''b'' \end{vmatrix}.$$

Le terme en vw^2 est de même $2Cvw^2$, en posant

$$C = - \begin{vmatrix} c & b & ab \\ c' & b' & a'b' \\ c'' & b'' & a''b'' \end{vmatrix}.$$

Enfin le terme en w^3 est $2Dw^3$, en posant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Quant aux termes en u^2w et v^2w, il est facile de vérifier qu'ils sont tous deux nuls. Donc la conique Γ a pour équation tangentielle

$$Auv + Buw + Cvw + Dw^2 = 0,$$

ce qui justifie les résultats annoncés.

Pour avoir le lieu du point de rencontre de Δ avec Δ_1, il faut trouver le lieu des points d'où l'on peut mener deux droites conjuguées aux trois coniques. Or, si les droites Δ et Δ_1 sont conjuguées par rapport aux trois coniques, elles le sont par rapport à toutes les coniques du réseau $\lambda f + \mu g + \nu h = 0$, et on peut remplacer les trois coniques de base du réseau par trois autres qui ne font pas partie d'un même faisceau linéaire : il suffit pour cela d'annuler les deux premiers termes, le premier et le troi-

sième ; puis les deux derniers. On obtient ainsi les trois couples de points

$$w(b_1v + c_1u) = 0, \qquad w(a_2u + c_2w) = 0, \qquad u(a_3v + b_3w) = 0.$$

Dans les deux premiers couples, il y a l'origine ; si donc on appelle μ le point du lieu, les deux premiers couples de tangentes renferment la droite $o\mu$, et les trois couples ne peuvent faire partie d'une même involution que si les deux premiers coïncident, c'est-à-dire si le point μ est sur la droite qui joint les deux points $b_1v + c_1w = 0$, $a_2u + c_2w = 0$. Le lieu du point μ est donc la droite

$$\frac{c_2x}{a_2} + \frac{c_1y}{b_1} - 1 = 0.$$

Calculons b_1, c_1, a_2 et c_2. Pour avoir b_1 et c_1, il faut déterminer λ, μ et ν par les équations

$$ab\lambda + a'b'\mu + a''b''\nu = 0, \qquad a\lambda + a'\mu + a''\nu = 0,$$

et porter ces valeurs dans $b\lambda + b'\mu + b''\nu$ et $c\lambda + c'\mu + c''\nu$.

On trouve ainsi les déterminants $-A$ et $-B$; par suite, on peut prendre $b_1 = A$, $c_1 = B$

Pour avoir a_2 et c_2, il faut déterminer λ, μ et ν par $ab\lambda + a'b'\mu + a''b''\nu = 0$, $b\lambda + b'\mu + b''\nu = 0$, et porter ces valeurs dans $a\lambda + a'\mu + a''\nu$ et $c\lambda + c'\mu + c''\nu$.

On trouve ainsi les déterminants A et C ; on peut donc prendre $a_2 = A$, $c_2 = C$ et la droite lieu du point μ a pour équation

$$\frac{Cx}{A} + \frac{By}{A} - 1 = 0;$$

elle coupe les axes aux points d'abscisse $\frac{A}{C}$ et d'ordonnée $\frac{A}{B}$. Ce sont les points de contact de la conique Γ avec les axes, c'est-à-dire avec les droites a et b. Le lieu du point μ est donc la polaire du point O par rapport à la conique Γ.

Pour apercevoir l'enveloppe de la conique Γ, remarquons que l'équation de cette conique peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} ab & a & b & c \\ a'b' & a' & b' & c' \\ a''b'' & a'' & b'' & c'' \\ -w^2 & vw & uw & -uv \end{vmatrix} = 0,$$

et cherchons à déterminer le rapport des deux nombres α et α' de façon que

$$\frac{-w^2}{\alpha ab + \alpha'a'b'} = \frac{vw}{\alpha a + \alpha'a'} = \frac{uw}{\alpha b + \alpha'b'} = \frac{-uv}{\alpha c + \alpha'c'},$$

pour certaines valeurs de u, v, w. Il nous suffit d'exprimer que $(-uv)(-w^2) = uvw^2$,

c'est-à-dire que $$(\alpha ab + \alpha'a'b')(\alpha c + \alpha'c') = (\alpha a + \alpha'a')(\alpha b + \alpha'b').$$

Ceci est une équation du second degré en $\frac{\alpha}{\alpha'}$, qui donne deux valeurs pour ce rapport ; par suite, il y a deux droites telles que

$$\frac{u}{\alpha b + \alpha'b'} = \frac{v}{\alpha a + \alpha'a'} = \frac{-w}{\alpha ab + \alpha'a'b'},$$

qui sont tangentes à la conique Γ.

Ces deux droites sont indépendantes de la troisième conique C″, et la conique Γ est tangente à quatre droites fixes, quand C″ varie comme il est indiqué. Les deux dernières droites que nous venons de trouver passent par le point de rencontre des deux droites

$$bx + ay - ab = 0, \qquad b'x + a'y - a'b' = 0,$$

c'est-à-dire par le point de rencontre des deux cordes de contact des coniques C et C′ avec les droites a, b.

La droite, lieu du point μ, $Cx + By - A = 0$, peut se représenter par

$$\begin{vmatrix} ab & a & b & c \\ a'b' & a' & b' & c' \\ a''b'' & a'' & b'' & c'' \\ 0 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En choisissant deux nombres α et α' tels que $\alpha ab + \alpha' a'b' = 0$, nous voyons que cette droite passe au point

$$\frac{x}{\alpha a + \alpha' a'} = \frac{y}{\alpha b + \alpha' b'} = \frac{1}{\alpha c + \alpha' c'}.$$

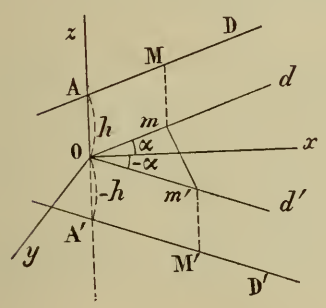
Ce point est indépendant de la conique C″; donc la droite lieu de μ enveloppe un point fixe quand C″ varie de la façon indiquée.

Bonnes solutions par MM. C. Blarez; G. Bouligand; Névejans; Ed. Rème.

1829. — *Une droite mobile* MM′ *s'appuie, en* M *et en* M′, *sur deux droites fixes,* D *et* D′, *et reste perpendiculaire à la droite* D. *Montrer, qu'en désignant par* V *l'angle des deux plans* DMM′ *et* D′M′M, *on a*

$$\mathrm{MM'\,tg\,V} = c^{\text{te}}.$$

Soient AA′ la perpendiculaire commune aux deux droites, d et d' les parallèles à D et D′ menées par le milieu O de AA′. Prenons Oz suivant AA′, Ox et Oy suivant les bissectrices de l'angle dOd'. Soient α et $-\alpha$ les angles polaires des droites d et d', supposées orientées; h et $-h$ les cotes des points A et A′. Si l'on pose



$$\overline{\mathrm{AM}} = \rho, \qquad \overline{\mathrm{A'M'}} = \rho',$$

on a, en projetant sur xOy,

(1) $$\rho = \rho' \cos 2\alpha.$$

Puis

(2) $$l^2 = \overline{\mathrm{MM'}}^2 = 4h^2 + \overline{mm'}^2 = 4h^2 + \rho'^2 \sin^2 2\alpha.$$

Il s'agit maintenant de calculer tg V.

Calculons d'abord les cosinus directeurs (a, b, c) de la normale au plan DMM′. Pour cela, écrivons que cette normale est perpendiculaire à D et à AM′ :

$$a \cos\alpha + b \sin\alpha = 0, \qquad a\rho' \cos\alpha - b\rho' \sin\alpha - 2ch = 0,$$

d'où $$a = -\lambda \sin\alpha, \qquad b = \lambda \cos\alpha, \qquad c = -\frac{\lambda\rho'}{h} \sin\alpha \cos\alpha,$$

avec (3) $$\lambda^2 \left[1 + \frac{\rho'^2}{h^2} \sin^2\alpha \cos^2\alpha \right] = 1.$$

Par symétrie, on a les cosinus directeurs (a', b', c') de la normale au plan D′M′M :

$$a' = \lambda' \sin\alpha, \qquad b' = \lambda' \cos\alpha, \qquad c' = -\frac{\lambda'\rho}{h} \sin\alpha \cos\alpha,$$

avec (4) $$\lambda'^2 \left[1 + \frac{\rho^2}{h^2} \sin^2\alpha \cos^2\alpha \right] = 1.$$

On a maintenant $$\cos \mathrm{V} = \lambda\lambda' \left[\cos 2\alpha + \frac{\rho\rho'}{h^2} \sin^2\alpha \cos^2\alpha \right],$$

ou $$\cos \mathrm{V} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cos 2\alpha,$$

en tenant compte de (1) et (3).

On tire de là
$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{\dfrac{1}{\lambda'^2} - \dfrac{1}{\lambda^2}\cos^2 2\alpha}{\dfrac{1}{\lambda^2}\cos^2 2\alpha}.$$

Or
$$\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda^2}\cos^2 2\alpha = \sin^2 2\alpha, \qquad \text{en tenant compte de (3), (4) et (1).}$$

Donc
$$\operatorname{tg}^2 V = \lambda^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

Mais, l'équation (2) peut s'écrire
$$l^2 = 4h^2\left[1 + \frac{\rho'^2}{h^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right] = \frac{4h^2}{\lambda^2},$$

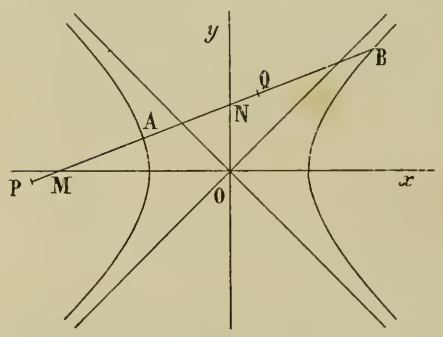
donc
$$l^2 \operatorname{tg}^2 V = 4h^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha = \text{C}^{\text{te}}.$$

J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. Blarez ; Ambl·rd, à Ruines ; M. Pellissonnier ; L. Chattelun, à Nancy ; Giraudot ; Névéjans : A. Rousseau ; A. Coquillat ; Vivier, lycée de Poitiers ; J. Prado, à Nantes ; G. Lach, à Denain ; A. Haegelen, à Dijon.

1834. — *Soient* A *le pied d'une normale à une hyperbole équilatère,* M *et* N *les points où elle rencontre l'axe transverse et l'axe non transverse et* Q *le milieu du segment qu'elle intercepte dans l'hyperbole. Dans le sens* AM *et à partir du point* M *on prend* MP = QN. *Lieu du point* P.

Soient $x^2 - y^2 = a^2$ l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes et x, y les coordonnées d'un point A de cette courbe.



L'équation de la normale à l'hyperbole au point A est $\dfrac{X - x}{x} = \dfrac{Y - y}{-y} = \dfrac{N}{p}$, N désignant le segment de normale compris entre le point A et le point courant de la normale et p la longueur OA ; le sens positif choisi sur la normale est d'ailleurs le sens de la concavité, le sens AM.

Pour avoir AM, nous posons $Y = 0$, et nous avons $N = AM = p$; de même, nous aurons AN en faisant $X = 0$, et nous obtenons ainsi $N = AM = -p$. Le point A est donc bien le milieu du segment MN, et, comme MP = QN, ce sera aussi le milieu du segment QP ; par conséquent $AP = QA = \dfrac{BA}{2}$.

Nous aurons le segment AB en prenant le second point de rencontre de la normale avec l'hyperbole ; nous avons ainsi successivement
$$X = x\left(1 + \frac{N}{p}\right), \qquad Y = y\left(1 - \frac{N}{p}\right) \qquad \text{et} \qquad x^2\left(1 + \frac{N}{p}\right)^2 - y^2\left(1 - \frac{N}{p}\right)^2 = a^2;$$
cette dernière équation s'écrit
$$\frac{N^2}{p^2}(x^2 - y^2) + \frac{2N}{p}(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 - a^2 = 0;$$
or
$$x^2 - y^2 = a^2, \qquad p = \sqrt{x^2 + y^2},$$
cette équation donne donc $N = -\dfrac{2p^3}{a^2}$.

Il résulte de là que $AQ = -\dfrac{p^3}{a^2}$ et $AP = \dfrac{p^3}{a^2}$; les coordonnées du point P sont donc
$$X = x\left(1 + \frac{p^2}{a^2}\right), \qquad Y = y\left(1 - \frac{p^2}{a^2}\right).$$

Remplaçons-y p^2 par x^2+y^2 et a^2 par x^2-y^2, nous aurons $X = \frac{2x^3}{a^2}$, $Y = -\frac{2y^3}{a^2}$.

Il est facile de vérifier que ce point est le point de contact de la normale à l'hyperbole avec son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de cette hyperbole. Le lieu du point P est la développée de l'hyperbole,

$$X^{\frac{2}{3}} - Y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette équation s'obtient immédiatement en éliminant x et y entre

$$x^3 = \frac{a^2X}{2}, \qquad y^3 = -\frac{a^2Y}{2} \qquad \text{et} \qquad x^2 - y^2 = a^2.$$

Bonnes solutions : MM. Névejans ; Guillerme ; G. Lach ; Blarez, école Ste-Geneviève ; A. Courtois, à Douai ; Soubaigné ; Ch. Vivier, à Poitiers ; A. Rousseau ; Louis Bel, à Alger ; L. Simon, à Fourmies ; J. Rodde, à Lyon ; A. Nègre, à Bordeaux ; J. Gérin, à Lyon.

GÉOMÉTRIE

1835. — *On considère une surface* (Σ), *un point variable* A *sur cette surface et une sphère* (S). *Soient* Δ *la normale au point* A *à la surface* (Σ), Δ' *sa conjuguée par rapport à la sphère et* A' *l'inverse de* A *par rapport à cette sphère.*

Trouver l'enveloppe du plan déterminé par Δ' *et par le point* A'.

La droite Δ', polaire de Δ par rapport à la sphère, est dans le plan polaire du point A par rapport à la sphère. Le point A', inverse de A par rapport à la sphère, est aussi dans le plan polaire du point A par rapport à la sphère. Le plan (A', Δ') est donc le plan polaire du point A par rapport à la sphère et il enveloppe la surface (Σ'), polaire réciproque de (Σ) par rapport à la sphère.

Si on appelle A_1 le pôle du plan tangent en A, il est facile de voir que OA_1 est perpendiculaire au plan (O, Δ'), et ceci nous donne une définition très simple de la congruence des droites Δ', en partant de la surface (Σ') : à chaque point de la surface (Σ') correspond une droite Δ', qui est dans le plan tangent en ce point et dans un plan perpendiculaire au rayon qui joint l'origine au point de (Σ').

Bonnes solutions : MM. Névéjans : Louis Bel, à Alger ; A. Courtois, à Douai ; R. Poulain, à Lourches.

PHYSIQUE

1772. — *Dans un milieu où un mouvement vibratoire se propage avec une vitesse* V, *la source origine de ce mouvement se déplace avec une vitesse* v *et l'observateur se déplace en sens inverse avec une vitesse* v'. *Quel sera le mouvement perçu par l'observateur ?*

Application acoustique. — Avec quelle vitesse une locomotive doit-elle s'approcher d'un observateur fixe pour que la note de son sifflet paraisse élevée d'un demi-ton tempéré, c'est-à-dire d'un intervalle égal à 1,06 *environ ?*

Application optique. — Quelle doit être la vitesse radiale relative d'une étoile pour que la raie D *de son spectre paraisse déplacée de* $\frac{1}{6}$ *de l'intervalle qui sépare les deux éléments de cette raie, dont les longueurs d'onde sont respectivement* $0^{\mu},5896$ *et* $0^{\mu},5890$?

Soient N la fréquence vraie et N' la fréquence perçue par l'observateur.

En une seconde, la source exécute N vibrations. La première de ces vibrations s'est, au bout d'une seconde, propagée du côté de l'observateur à une distance V, mais, en même temps, la source s'est

déplacée, dans le même sens par exemple, d'une quantité v. Les N vibrations sont donc propagées sur une longueur $V - v$ et chacune d'elles affecte une longueur $\frac{V - v}{N}$.

D'autre part, l'observateur, en une seconde, se déplace vers la source d'une quantité v'. Il perçoit donc, pendant cette seconde : 1° les vibrations qui, à un instant donné, sont, en quelque sorte, échelonnées sur cette longueur v' ; 2° les vibrations qui, en une seconde, passent en un point fixe et qui, par conséquent, sont distribuées, à un instant donné, sur une longueur V ; soit, en tout, les vibrations échelonnées sur la longueur $V + v'$. Chacune d'elles occupant la longueur $\frac{V - v}{N}$, leur nombre N est tel que l'on ait

$$\frac{N'}{N} = \frac{V + v'}{V - v}.$$

On remarquera la dissymétrie de cette formule en ce qui concerne les mouvements de la source et de l'observateur ; autrement dit, la modification apparente du mouvement vibratoire ne dépend pas uniquement de la vitesse relative des deux mobiles.

Application acoustique. — On suppose $v' = 0$, $V = 340$ et $\frac{N'}{N} = 1{,}06$.

La formule donne $v = \frac{340 \times 0{,}06}{1{,}06} = 19{,}2$ en mètres par seconde, ce qui représente une vitesse d'environ 69 kilomètres à l'heure.

Application optique. — Les longueurs d'onde apparentes sont inversement proportionnelles aux fréquences ; la formule peut donc s'écrire $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{V + v'}{V - v}$.

Dans le faible intervalle qui sépare les deux éléments de la raie D, on peut admettre qu'un déplacement est proportionnel à la variation de longueur d'onde ; le déplacement devant être $\frac{1}{6}$ de l'intervalle, la variation $\lambda' - \lambda$ devra être $\frac{1}{6}$ de la différence $0^{\mu}{,}0006$, soit $0^{\mu}{,}0001$. Or, la formule donne

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = -\frac{v + v'}{V + v'}.$$

La vitesse v' de l'observateur est négligeable vis-à-vis de la vitesse V de la lumière ; on peut donc écrire simplement

$$v + v' = -\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} V = -\frac{1}{5890} \times 300\,000 = -51 \text{ kilomètres par seconde.}$$

On a compté positivement la vitesse v du côté de l'observateur et la vitesse v' du côté de la source. Si la longueur d'onde apparente est augmentée, c'est-à-dire si la raie est déplacée vers le rouge, l'observateur et l'étoile s'éloignent avec la vitesse relative de 51 kilomètres par seconde ; ils se rapprochent dans le cas contraire.

JEAN BING, élève à l'Ecole des Mines.

Bonnes solutions de MM. RIEUMAJOU et ROUSSEAU à Landrecies.

CONCOURS DE 1910 (*Suite*).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires [1].

Dans un plan donné, il y a une infinité de cercles (Γ) orthogonaux à tous les cercles (C) qui passent par deux points donnés P, P′ dans ce plan.

[1] Des solutions étudiées de la question de mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

A tout point M correspond un point M′ tel que M et M′ soient conjugués harmoniques par rapport à tout cercle (Γ).

Donner la construction géométrique de ces points.

1° Trouver le lieu de M et M′ quand MM′ a une longueur donnée l;

2° Trouver le lieu de M′ quand M décrit une droite (D). On pourra supposer successivement que la droite (D) est perpendiculaire à PP′; qu'elle passe par l'un des points P ou P′; qu'elle rencontre PP′ en un point autre que P ou P′, étant oblique à PP′, et enfin que (D) est parallèle à PP′;

3° Lieu de M′ quand M décrit une parabole passant par P et P′ et dont l'axe est perpendiculaire à PP′.

Dans chacun des cas examinés on étudiera le déplacement de M′, celui de M étant supposé connu;

4° On considère dans le plan donné un nombre quelconque de cercles (C), soient (C_1), (C_2),..., (C_p) et autant de coefficients numériques donnés a_1, a_2, ... a_p; puis q cercles (Γ) : (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_q) et des coefficients α_1, α_2, ..., α_q. Peut-on toujours déterminer, dans le plan donné, deux points S_1, S_2 tels que la somme des puissances d'un point quelconque X du plan par rapport à tous ces cercles, chaque puissance étant multipliée par le coefficient correspondant, soit égale à la somme des carrés des distances de ce point X aux deux points cherchés S_1, S_2, multipliée par la demi-somme des coefficients donnés? En supposant que les cercles (C) et (Γ) appartiennent aux deux familles considérées, trouver les conditions pour que S_1 et S_2 soient deux points conjugués M, M′.

Mathématiques spéciales.

1890. — On considère deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P et Q, qui ont même axe et même sommet.

1° On demande de trouver toutes les droites D dont les conjuguées D′ et D″ par rapport à P et Q sont dans un même plan (on ne considère que des droites réelles situées à distance finie). Montrer que deux droites D′ et D″ qui correspondent à une même droite D sont à la même distance de l'axe des paraboloïdes, qu'elles font le même angle avec l'axe et que leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font un angle constant.

2° On considère une droite D particulière, que l'on désigne par D_1; on prend sa conjuguée D_2 par rapport au paraboloïde P, puis on prend la conjuguée D_3 de D_2 par rapport au paraboloïde Q, et ainsi de suite, de telle sorte qu'une droite D_{2p} soit conjuguée de la droite D_{2p-1} par rapport à P et qu'une droite D_{2q+1} soit conjuguée de la droite D_{2q} par rapport à Q; étudier la distribution de ces droites.

3° Une droite D se déplace en faisant un angle constant avec l'axe des paraboloïdes et de façon que les surfaces engendrées par D′ et D″ fassent un angle constant au point commun à D′ et D″; quelle surface engendre D? quelles surfaces engendrent D′ et D″ et quel est le lieu du point commun à D′ et D″? ce lieu peut-il être situé sur la surface engendrée par D? (On indiquera un mode de génération simple de ces diverses surfaces.)

Calcul différentiel et intégral.

On considère la famille de surfaces du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{Constante},$$

a, b, c étant des nombres positifs distincts et donnés, les axes de coordonnées étant rectangulaires; on désigne par (E) l'équation aux dérivées partielles des surfaces (S) orthogonales à cette famille de surfaces du second degré et par (γ) les courbes caractéristiques de l'équation (E).

1° Exprimer les coordonnées des points d'une surface (S) à l'aide de deux paramètres u et v; montrer que l'on peut adopter des expressions de la forme

$$x = f(v) \cdot f_1(u), \qquad y = \varphi(v) \cdot \varphi_1(u), \qquad z = \psi(v) \cdot \psi_1(u),$$

et que la recherche des lignes asymptotiques de toute surface (S) se ramène aux quadratures.

2° Quelle est la condition pour qu'une courbe imposée, distincte d'une caractéristique,

$$x = f(v), \qquad y = \varphi(v), \qquad z = \psi(v),$$

soit ligne asymptotique d'une surface (S)?

La détermination des familles d'asymptotiques distinctes des caractéristiques, des surfaces (S) peut se ramener à la recherche des solutions de trois équations différentielles linéaires analogues.

L'intégration de ces équations linéaires peut-elle se ramener aux quadratures?

Une famille d'asymptotiques a-t-elle une enveloppe?

Comment trouvera-t-on les surfaces (S) dont une famille d'asymptotiques est douée d'enveloppe?

Examiner les particularités de la surface et de ses asymptotiques dans le voisinage de l'enveloppe, en se bornant aux surfaces dont les coordonnées correspondent à des fonctions holomorphes; donner explicitement des exemples très simples.

3° Déterminer les surfaces (S) dont les asymptotiques d'une famille sont des caractéristiques (γ). Définir géométriquement ces surfaces.

4° Soit (S_1) une surface (S) choisie, et (Γ_1) les développables circonscrites à (S_1) le long des caractéristiques génératrices (γ) supposées non asymptotiques.

On réalise une déformation déterminée de la surface (S_1) de telle sorte que tout point M de cette surface décrive la génératrice rectiligne de la développable (Γ_1) tangente en ce point, et l'on désigne par M' la position de M après la déformation, par (Σ_1) la surface obtenue.

Dans le cas particulier où l'on choisit le point M' sur l'arête de rebroussement de la développable (Γ_1), on obtient une surface (Σ_1) particulière, soit (Σ_0). Montrer qu'au réseau tracé sur (S_1) par les courbes (γ) et leurs conjuguées, correspond sur (Σ_0) un réseau conjugué.

5° Déterminer les déformations (S_1, Σ_1) faisant correspondre une courbe (γ) de (S_1) et possédant la propriété précédente de la déformation (S_1, Σ_0).

Montrer que ces déformations associent à toute surface (S_1) une famille à un paramètre de surfaces (Σ_1) dont les asymptotiques se correspondent, exception étant faite pour certaines surfaces (S_1) particulières que l'on caractérisera.

Trouver celles de ces familles Σ_1 dont les lignes asymptotiques correspondent aux asymptotiques de la surface (S_1) initiale et les définir géométriquement.

N. B. — On rappelle que l'équation différentielle des lignes asymptotiques, en coordonnées curvilignes, est

$$\begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} du^2 + 2 \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} du.dv + \begin{vmatrix} x''_{v^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{v^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{v^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

Mécanique.

Mouvement d'un corps solide pesant fixé par un de ses points O autour duquel il peut tourner librement et assujetti à toucher un plan horizontal fixe H ; les liaisons sont supposées sans frottement et le solide au-dessus du plan H.

I. — Le solide est de révolution, généralement non homogène, et est suspendu par un point de son axe de figure.

a. Trouver les équations du mouvement et indiquer les circonstances générales de ce mouvement lorsque les conditions initiales sont arbitraires.

Discuter complètement lorsque le solide est abandonné sans vitesses initiales ; examiner les cas particuliers dans lesquels le solide admet, soit un plan passant par l'axe de figure, soit un plan mené par O et perpendiculairement à cet axe, comme plan de symétrie des masses ; indiquer nettement, par des figures, la nature du mouvement du point de contact du solide sur le plan H.

b. Lorsque l'axe de figure du solide est axe de symétrie des masses, discuter le mouvement, les conditions initiales étant arbitraires ; examiner le cas particulier où le solide est homogène.

Application. — Le mouvement instantané du solide est une rotation que l'on peut toujours décomposer en une rotation, soit ω, portée par l'axe du solide et en une rotation verticale.

On suppose, en se plaçant dans le cas (*b*), que les conditions initiales vérifient la relation

$$2T = C\omega^2,$$

2T étant la force vive, C le moment d'inertie du solide par rapport à son axe.

Calculer explicitement le mouvement, noter ses particularités et indiquer, dans les deux cas possibles, comment ce mouvement peut être imprimé au solide.

II. — Le solide ayant une forme quelconque, on désigne par (Γ) la courbe située sur le solide et lieu des points de contact M avec le plan H ; on exprime les coordonnées, par rapport aux axes principaux d'inertie relatifs au point fixe O, d'un point quelconque de cette courbe à l'aide d'un paramètre u et on définit la position du solide à l'aide du paramètre u et de l'orientation du plan vertical passant par OM.

Trouver les équations donnant ces paramètres et indiquer les circonstances générales du mouvement.

On pourra attacher au solide, en tout point M de la courbe (Γ), un trièdre auxiliaire (T) ayant comme arête la normale en M à la surface du solide, l'une des faces passant par le point fixe O, et regarder le mouvement du solide comme résultant d'un mouvement relatif par rapport au trièdre (T) et d'un mouvement d'entraînement de ce trièdre.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Mathématiques.

1891. — 1° Trouver l'équation des courbes C qui admettent l'axe des y comme axe de symétrie et qui satisfont à l'équation différentielle

$$100\frac{d^6y}{dx^6} - 100\frac{d^2y}{dx^2} + y + 6 = 0.$$

2° Déterminer les constantes arbitraires K par la condition que l'une des courbes, Γ, ait à l'origine un contact du cinquième ordre avec la parabole $y = \frac{x^4}{6}$, c'est-à-dire que la différence des ordonnées au voisinage du point de contact soit du sixième ordre par rapport aux abscisses.

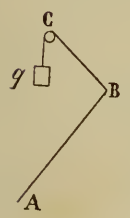
Les constantes arbitraires K devront être calculées avec trois décimales exactes, c'est-à-dire que l'approximation devra être supérieure à $\frac{5}{10000}$.

(*Durée : 4 heures.*)

Mécanique.

1892. — Un point parcourt une développante de cercle avec une vitesse qui croît proportionnellement au temps. A l'instant initial, il se trouve, sans vitesse, au point de rebroussement de la développante.

Trouver, à un instant quelconque, l'accélération totale du mouvement. Construire l'hodographe.



1893. — Une tige homogène AB, de poids donné p et de longueur donnée l, est mobile autour de son extrémité A. A l'autre extrémité est attaché un fil de masse négligeable, qui passe sur une très petite poulie C et supporte un poids q. On donne les distances h et k du point C à l'horizontale et à la verticale de A.

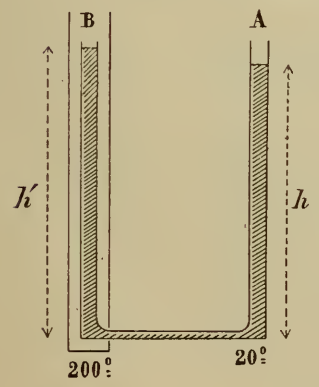
Quel doit être le poids q pour que la tige se tienne en équilibre avec une inclinaison donnée ?

(*Durée : 3 heures.*)

Physique.

I. — Exposer en quoi consiste la capacité électrostatique ; indiquer le principe des condensateurs (sans calculer la capacité d'aucun condensateur particulier) et décrire le rôle que joue la lame de diélectrique dans un condensateur.

II. — **1894.** On considère un appareil de Dulong et Petit pour la mesure du coefficient de dilatation du mercure. Les branches A et B sont des tubes de verre de 1^{cm^2} de section à la température ambiante de 20° ; elles contiennent chacune à cette température une hauteur de mercure de 1^m. On chauffe la branche B à 200° en maintenant la branche A ainsi que le tube de communication à 20°. On demande :



1° Le rapport des hauteurs h et h' du mercure dans les branches A et B ;

2° La masse de mercure $\left(\text{en grammes et à } \frac{1}{100} \text{ près}\right)$ qui s'écoule d'une des branches vers l'autre par le tube de communication pendant le chauffage et le sens dans lequel cet écoulement a lieu ;

3° Les expressions du coefficient l de dilatation linéaire du verre et du coefficient m de dilatation absolue du mercure en fonction des variations a et b du niveau dans les branches A et B pendant l'expérience. Indiquer quelles erreurs relatives résulteraient pour l et m d'une erreur de $0{,}1^{mm}$ commise dans la mesure de a et de 1^{mm} dans la mesure de b, si l'expérience était faite pour évaluer ces coefficients de dilatation.

4° Est-il nécessaire que le tube de communication entre les branches soit fin et qu'il soit horizontal ?

Coefficient moyen de dilatation absolue du mercure : $m = 0{,}00018$.

Coefficient moyen de dilatation linéaire du verre : $l = 0{,}0001$.

Les dilatations, qui n'auront besoin d'être évaluées qu'avec deux chiffres exacts, seront traitées dans les calculs comme des quantités très petites dont on négligera le carré et les puissances supérieures, sans se préoccuper des erreurs ainsi commises.

(*Durée : 4 heures.*)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

1806. — 1° *Déterminer le polynome* $f(x) \equiv x^3 + px + q$, *de façon que* $f(1) = 2$ *et* $f(2) = 1$. *Trouver, sans faire l'opération, le reste de la division de ce polynome par le trinome* $x^2 - 3x + 2$.

2° *Trouver tous les couples de nombres différents* α *et* β, *tels que* $f(\alpha) = \beta$ *et* $f(\beta) = \alpha$.

3° *Trouver la série entière qui représente* $\dfrac{f(x)}{x^2 - 3x + 2}$ *et dire pour quelles valeurs de* x *elle est convergente.*

1° Pour déterminer p et q, nous avons immédiatement les équations $p + q = 1$, $2p + q = -7$; par suite, $p = -8$, $q = 9$, et $f(x) \equiv x^3 - 8x + 9$. Le trinome $x^2 - 3x + 2$ peut s'écrire $(x-1)(x-2)$ et le reste de la division de $f(x)$ par ce trinome est un polynome du premier degré que nous pouvons représenter par $a(x-1) + b$. Or, pour $x = 1$, le reste est égal à 2; donc $b = 2$; et, pour $x = 2$, il est égal à 1, ce qui donne $a + 2 = 1$, $a = -1$.
Le reste est donc égal à $3 - x$.

2° On a
$$\alpha^3 - 8\alpha + 9 = \beta, \qquad \beta^3 - 8\beta + 9 = \alpha;$$
en retranchant et divisant par $\alpha - \beta$ qui n'est pas nul, nous avons de suite
$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 8 + 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 7 = 0.$$
Multiplions maintenant la première par β, la seconde par α, retranchons et divisons encore par $\alpha - \beta$, nous aurons
$$\alpha\beta(\alpha + \beta) - 9 + \alpha + \beta = 0.$$
Nous avons donc à résoudre les deux équations
$$(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 7 = 0, \qquad \alpha\beta(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) - 9 = 0.$$
Nous prendrons comme inconnues $\alpha + \beta = u$, $\alpha\beta = v$, et nous aurons
$$u^2 - v - 7 = 0, \qquad uv + u - 9 = 0.$$
La première donne $v = u^2 - 7$, et la seconde devient alors $u^3 - 6u - 9 = 0$.
Cette équation admet la racine 3 et se réduit ensuite à l'équation du second degré
$$u^2 + 3u + 3 = 0,$$
qui admet les racines imaginaires conjuguées $u = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Pour $u = 3$, nous avons $v = 2$, et α, β sont racines de l'équation $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$; nous avons donc les deux solutions $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Pour
$$u = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}, \qquad v = \frac{3}{2}(1 + i\sqrt{3}) - 7,$$
α et β sont donc racines de l'équation $x^2 + \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{-11 + 3i\sqrt{3}}{2} = 0$.

Les racines de cette équation sont $x = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{4} \pm \sqrt{\dfrac{(3 + i\sqrt{3})^2}{16} + \dfrac{11}{2} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{2}}$.

Pour les calculer effectivement, il faudrait extraire la racine carrée du nombre
$$\frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{16} + \frac{11}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{qui se réduit à} \qquad \frac{94 - 18i\sqrt{3}}{16};$$
nous ne ferons pas ce calcul, qui n'a aucun intérêt et qui ne présente aucune difficulté, et nous représen-

terons les racines de l'équation du second degré par x_1 et x_2. Nous aurons alors les deux solutions

$$\alpha = x_1, \quad \beta = x_2 \quad \text{et} \quad \alpha = x_2, \quad \beta = x_1.$$

Il y a encore deux autres solutions, qui correspondent à $u = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et qui sont imaginaires conjuguées de celles-ci.

L'explication de ces résultats est très simple : les deux équations

$$\alpha^3 - 8\alpha + 9 = \beta, \qquad \beta^3 - 8\beta + 9 = \alpha,$$

où α et β désignent les coordonnées courantes d'un point du plan, représentent deux courbes du troisième degré qui se coupent en neuf points ; ces courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice et elles ont trois points communs sur cette bissectrice, les points dont les abscisses sont racines de l'équation $\alpha^3 - 9\alpha + 9 = 0$, ces points ont été exclus ; il en reste donc six, que nous venons de trouver.

3° La fonction $\dfrac{f(x)}{x^2 - 3x + 2}$ peut se mettre sous la forme

$$x + 3 + \frac{-x+3}{(x-1)(x-2)}, \qquad \text{ou encore} \qquad x + 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Les deux fractions $\dfrac{-2}{x-1}$ et $\dfrac{1}{x-2}$ s'écrivent, sous certaines restrictions,

$$\frac{2}{1-x} = 2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots), \qquad -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \cdots\right).$$

On a donc

$$\frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{9}{2} + \frac{11}{4}x + \frac{x^2}{4}\left(8 - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{8}\left(16 - \frac{1}{2}\right) \cdots + \frac{x^n}{2^n}\left(2^{n+1} - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

et cette serie est convergente tant que $|x| < 1$, c'est-à-dire dans l'intervalle $(-1, +1)$, sauf aux limites.

Bonnes solutions : MM. A. Courtois ; Névéjans, 27e d'artillerie.
Assez bonnes solutions : MM. G. Lach, à Denain ; A. Rousseau, à Landrecies ; G. Foucay, à Reims.

1831. — 1° *Montrer que la fonction* $y = \operatorname{ch} nt$ *de* $x = \operatorname{ch} t$ *satisfait à l'équation différentielle*

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - n^2 y = 0.$$

Transformer cette équation par la substitution $x = \operatorname{ch} t$ *et intégrer.*

2° $\operatorname{ch} nt$ *est un polynome entier en* x *et de degré* n. *Trouver ce polynome à l'aide de l'équation différentielle précédente. Montrer que ce polynome en* x *a toutes ses racines réelles et comprises entre* -1 *et* $+1$. *Calculer ces racines.*

1° Si l'on pose $x = \operatorname{ch} t$, la fonction y, définie par l'équation différentielle

$$(1) \qquad (x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - n^2 y = 0,$$

devient une fonction de t. Dès lors, en remarquant que $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} t}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} t}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{\operatorname{sh} t} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\right)\frac{1}{\operatorname{sh} t}$$

et si l'on porte ces valeurs dans (1), où $x^2 - 1 = \operatorname{sh}^2 t$ et $x = \operatorname{ch} t$, on obtient

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - n^2 y = 0,$$

qui est visiblement vérifiée pour $y = \operatorname{ch} nt$, et qui l'est d'ailleurs aussi pour $y = \operatorname{sh} nt$, de sorte que la solution générale de (2) est de la forme $y = A \operatorname{ch} nt + B \operatorname{sh} nt$, A et B étant des constantes arbitraires.

2° Nous savons d'après la formule de Moivre que $\operatorname{ch} nt$ est un polynome entier, de degré n en $\operatorname{ch} t$, c'est-à-dire en x. Pour le calculer, nous remarquerons qu'il satisfait à (1).

Ce polynome est de la forme $P_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_p x^{n-p} \cdots + a_n$. Portons cette valeur dans (1), le premier membre devient un polynome entier en x; en écrivant qu'il est identiquement nul, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont nuls, nous obtenons une série de relations de la forme

$$(3) \qquad (n-p+2)(n-p+1)\, a_{p-2} + [(n-p)(n-p-1) + (n-p) - n^2] a_p = 0,$$

c'est-à-dire
$$p(p-2n)\, a_p = (n-p+2)(n-p+1)\, a_{p-2}, \qquad (3)$$

où p prend toutes les valeurs entières consécutives de 0 à n.

On voit immédiatement que cette formule constitue une récurrence entre coefficients de même parité, et par conséquent que les coefficients d'indice pair pourront tous s'exprimer en fonction de a_0, et que ceux d'indice impair s'exprimeront en fonction de a_1.

Or si l'on procède à l'identification pour le terme en x^{n-1} on trouve $(2n-1)\, a_1 = 0$, c'est-à-dire $a_1 = 0$, d'où il résulte manifestement, d'après (3), que tous les coefficients d'indice impair son également nuls.

Le polynome P_n ne contient donc que des termes ayant même parité que n et ses coefficients successifs seront fournis par la formule générale

$$a_{2p} = -\frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{4p.\,(n-p)}\, a_{2p-2},$$

de la même façon
$$a_{2p-2} = -\frac{(n-2p+4)(n-2p+3)}{4(p-1)(n-p+1)}\, a_{2p-4},$$

. . . . . .

$$a_2 = -\frac{n(n-1)}{4(n-1)}\, a_0$$

et, en multipliant membre à membre,

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{n(n-1)\cdots(n-2p+2)(n-2p+1)}{4^p.\,p!\,(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}\, a_0 = (-1)^p n \frac{(n-p-1)\cdots(n-2p+1)}{4^p\,.\,p!}\, a_0.$$

Nous sommes ainsi ramenés à calculer a_0.

Or, d'après les formules de Moivre,

$$\operatorname{ch} nt = \operatorname{ch}^n t + C_n^2\,.\,\operatorname{ch}^{n-2} t\,.\,\operatorname{sh}^2 t + \cdots,$$

soit
$$P_n = x^n + C_n^2\, x^{n-2}(x^2-1) + \cdots$$

Visiblement, le coefficient de x^n est

$$a_0 = 1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$$

et finalement
$$a_{2p} = (-1)^p\, 2^{n-2p-1} \frac{n(n-p-1)\cdots(n-2p+1)}{p!}.$$

On voit donc que le polynome P_n n'a que des termes de même parité que n et ces termes ont des signes alternés, le premier étant d'ailleurs positif.

Chercher ses racines est la même chose que résoudre $\operatorname{ch} nt = 0$ ou encore $\cos int = 0$, ce qui donne pour t une infinité de valeurs, imaginaires d'ailleurs, $t = i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Si nous remarquons que $x = \cos it$ ou $\cos(-it)$, nous voyons qu'à ces valeurs de t correspondent pour x les valeurs $x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$, dont n et n seulement sont distinctes, et qu'on les obtiendra toutes en donnant à k n valeurs entières et consécutives, par exemple $0, 1, 2 \ldots n-1$. Et d'ailleurs réciproquement, à toute valeur de x fournie par la formule $x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ correspond

une valeur de t annulant ch nt, donc ces valeurs de x sont racines du polynome, elles sont toutes distinctes, réelles, au nombre de n et comprises entre -1 et $+1$.

Donc P_n est un polynome qui a toutes ses racines réelles et distinctes et comprises entre -1 et $+1$, et ces racines sont les n valeurs de $x = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.

R. LASABATIE, élève du lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. Névéjans ; A. Courtois, à Douai ; T. Vivier, à Poitiers ; A. Letac, à Poitiers.
Assez bonnes solutions : MM. A. Rousseau ; C. Teulière, à Toulouse.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1832. — *Etant donnés deux cercles tangents en* O *et de centres* C *et* C′, *on mène deux droites* OA *et* OB, *également inclinées sur* CC′ *et rencontrant le premier cercle en* A *et le second en* B.

1° *Lieu du milieu de* AB *quand on fait varier l'inclinaison commune de* OA *et* OB *sur* CC′.

2° *Enveloppe de la droite* AB.

Nous prendrons pour axe des x la droite CC′, pour axe des y la tangente commune au point O, et nous désignerons par R et R′ les abscisses des points C et C′. Les équations des cercles sont alors

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2R'x = 0.$$

Soit $y = mx$ l'équation de la droite OA ; les coordonnées du point A sont

$$x = \frac{2R}{1+m^2}, \qquad y = \frac{2Rm}{1+m^2}.$$

La droite OB a pour coefficient angulaire $-m$, et le point B a pour coordonnées

$$x = \frac{2R'}{1+m^2}, \qquad y = -\frac{2R'm}{1+m^2}.$$

1. Les coordonnées du milieu M de AB sont

$$x = \frac{R+R'}{1+m^2}, \qquad y = \frac{(R-R')m}{1+m^2};$$

nous aurons le lieu de ce point en éliminant m entre ces équations. Nous en tirons aisément

$$\frac{x}{y} = \frac{R+R'}{(R-R')m}, \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{(R+R')y}{(R-R')x},$$

et en portant cette valeur de m dans l'équation $x = \frac{R+R'}{1+m^2}$, nous obtenons

$$x^2(R-R')^2 + y^2(R+R')^2 - (R+R')(R-R')^2x = 0.$$

Cette équation représente une ellipse admettant Ox pour axe, le point O comme sommet, la tangente en ce point étant Oy.

Le centre de cette ellipse a pour abscisse $\frac{R+R'}{2}$; ce point est le milieu de CC′. Si l'on transporte l'origine en ce point, l'équation de l'ellipse devient

$$\frac{x^2}{\frac{(R+R')^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{(R-R')^2}{4}} - 1 = 0,$$

ce qui met en évidence les demi-longueurs d'axes.

2. L'équation de la droite AB peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2R & 2R'm & 1+m^2 \\ 2R' & -2Rm & 1+m^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou
$$(R+R')m(1+m^2)x - (R-R')(1+m^2)y - 4RR'm = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît que la droite AB enveloppe une courbe unicursale de troisième classe, puisque le paramètre m figure au troisième degré dans l'équation.

Divisons l'équation par $1+m^2$, et posons $m = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, l'équation de la droite AB s'écrit

$$(1) \qquad (R+R')x \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - (R-R')y - 2RR'\sin\varphi = 0.$$

Dérivons par rapport à φ, nous obtenons

$$\frac{x(R+R')}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} - 2RR'\cos\varphi = 0$$

ou

$$x = \frac{4RR'}{R+R'}\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2RR'}{R+R'}\cos\varphi(1+\cos\varphi).$$

Cette valeur de x est l'abscisse du point limite. Remplaçons x par cette valeur dans l'équation (1); nous en tirons après un calcul facile $y = \frac{2RR'}{R-R'}\sin\varphi(\cos\varphi - 1)$.

Il en résulte que les coordonnées du point limite sont

$$x = \frac{2RR'}{R+R'}\cos\varphi(1+\cos\varphi), \qquad y = \frac{2RR'}{R'-R}\sin\varphi(1-\cos\varphi),$$

ou, en posant

$$\frac{2RR'}{R+R'} = a, \qquad \frac{2RR'}{R'-R} = b,$$

$$x = a\cos\varphi(1+\cos\varphi), \qquad y = b\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Le lieu de ce point est l'enveloppe de la droite AB.

Pour avoir toute la courbe il suffit de faire varier φ dans un intervalle quelconque dont l'étendue soit égale à 2π. Si on change φ en $-\varphi$, x ne change pas, y change de signe; donc, la courbe est symétrique par rapport à Ox. Il suffira donc de faire varier φ de 0 à π, de construire la branche de courbe correspondante, puis de construire la symétrique de cette branche par rapport à Ox.

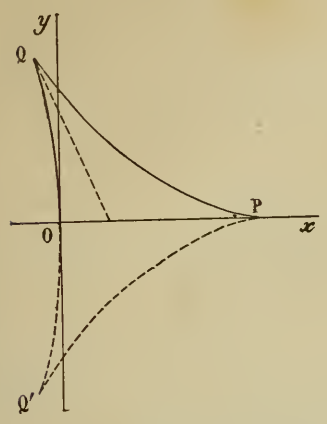
Nous avons

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi(1+2\cos\varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = b(1-\cos\varphi)(1+2\cos\varphi);$$

comme ces dérivées s'annulent pour la même valeur de φ, $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, le point correspondant est un point de rebroussement. De plus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Nous supposerons a et b positifs.



φ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	$2a$	décroît	0	décroît	$-\frac{a}{4}$ (*min.*)	croît	0
y	0	croît	b	croît	$\frac{3b\sqrt{3}}{4}$ (*max.*)	décroît	0
$\frac{dy}{dx}$	0	décroît	$-\frac{b}{a}$	décroît	$-\frac{b}{a}\sqrt{3}$	décroît	$-\infty$

On en déduit la branche de courbe PQO. La tangente au point P est Ox ; le point Q est un point de rebroussement, et la tangente au point O est Oy.

En achevant par symétrie, on obtient une courbe qui présente trois points de rebroussement. Mais ce n'est pas une hypocycloïde à trois rebroussements, car la pente de la tangente au point Q est égale à $-\frac{b}{a}\sqrt{3}$, et l'angle de cette tangente avec Ox n'est pas égal à $\frac{2\pi}{3}$.

Comme exercice de calcul on pourra vérifier que l'aire limitée par cette courbe est égale à

$$\frac{\pi R^2 R'^2}{|R^2 - R'^2|}.$$

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions par MM. A. Courtois, lycée de Douai ; G. Lach, à Denain ; Paul Léonzi, à Bordeaux ; A. Letac, 33e d'artillerie, à Poitiers ; A. Marescalchi ; André Nègre, à Bordeaux ; Névejans ; Ollier, à St-Etienne ; A. C. Pétridi, à Paris ; A. Rousseau, à Landrecies ; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; Camille Teulière, à Toulouse ; Th. Vivier, lycée de Poitiers.

CONCOURS DE 1910 (*Suite*)

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires*).

Algèbre et Analyse.

I. — **1895**. Les séries

$$\sin^3 x + 2\sin^3\frac{x}{2} + \cdots + n\sin^3\frac{x}{n} + \cdots,$$

$$(\sin x)^{\frac{1}{4}} + 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + \cdots + n\left(\sin\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{4}} \cdots,$$

où $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sont-elles convergentes ou divergentes ?

Faute de mieux, on pourra traiter le cas où x est très petit.

II. — Calculer $$\int_0^a x^3\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

III. — **1896**. 1° On considère tous les secteurs sphériques appartenant à une sphère de rayon R donné, et qui ont un même volume V donné. Quel est celui de ces secteurs dont la surface *totale* a la plus petite valeur possible ? On posera, pour simplifier les calculs, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, a étant une constante.

[On trouvera que le secteur sphérique cherché est tel que l'un des deux cônes qui le limitent se réduit à son axe.]

2° V conservant la même valeur, déterminer ensuite quel est, quand R varie, celui des secteurs obtenus dont la surface *totale* a la plus petite valeur possible.

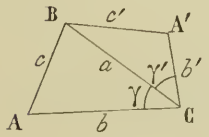
Observations. — On pourra traiter d'abord la seconde partie du problème, en admettant le résultat indiqué entre crochets pour la première partie.

Géométrie analytique

1897. — Étant donnés une section conique et deux points fixes A et B pris sur cette courbe, on forme le triangle AMB en joignant les points A et B à un troisième point M de position variable sur la conique, et l'on demande le lieu du point de rencontre P des trois hauteurs de ce triangle.

Calcul numérique.

I. — Soit le quadrilatère ABA'C. On connaît $AB = c$, $BA' = c'$ et $\widehat{ABA'} = \delta$. On a mesuré les angles $ACB = \gamma$, $A'CB = \gamma'$ sous lesquels on voit AB et A'B du point C.



Calculer les éléments des triangles ABC, A'BC.

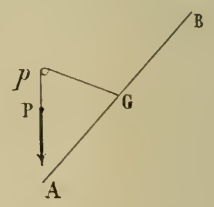
Application numérique :

$$c = 190^m, \qquad c' = 235^m, \qquad \gamma = 35°10'00'',$$
$$\gamma' = 44°15'27'', \qquad \widehat{ABA'} = 96°32'41''.$$

II. — **1898.** Calculer approximativement, à $\frac{1}{100}$ près autant que possible, la racine positive de l'équation $\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{21}{10}$ (e est la base des logarithmes népériens).

Mécanique.

I. — **1899.** Une tige pesante AB, mobile autour de son extrémité A dans un plan vertical, est maintenue par une corde flexible attachée à son centre de gravité G et qui, passant sur une poulie p située sur la verticale du point A, porte un contre-poids P.



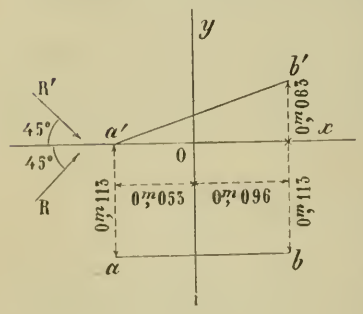
La distance Ap qui est égale à AG est connue, ainsi que le poids Q de la tige AB et la longueur l de la corde GpP dont on néglige le poids.

On demande de déterminer les positions d'équilibre que pourra prendre le système et de distinguer les positions d'équilibre stable des positions d'équilibre instable.

II. — **1900.** Toutes les fois que cinq forces se font équilibre sur un même solide, leurs lignes d'action rencontrent deux mêmes droites.

Epure de Géométrie descriptive.

1901. — Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (dont le premier est parallèle au petit côté de cette feuille, et qui n'auront pas à être passés à l'encre), les points (a, a') et (b, b') sont définis par le croquis ci-joint.



La droite (ab, $a'b'$) est diagonale d'un carré situé dans un plan de bout et dont le sommet (c, c') est situé en avant de cette diagonale ; et ce carré sert lui-même de base à un cube placé au-dessus de ce plan de bout.

On fait tourner l'arête de front du cube issue du sommet (c,c'), autour de la diagonale du cube issue du sommet (a,a').

On demande de représenter le segment d'hyperboloïde de révolution engendré par cette arête, et, en supposant opaques les plans des deux parallèles qui le comprennent, d'indiquer les ombres produites sur ce corps par des rayons parallèles à (R, R') dont les projections sont inclinées à 45° sur Ox.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1908-1909 ET 1909-1910

ALGÈBRE ET ANALYSE

Numéros des questions. — Pages.

1660 Les produits $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ sont convergents. Limite du premier. 28

1773 Si la série positive v_n est convergente, il en est de même de la série $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ et $\Sigma u_n = \Sigma v_n$. Applications. 437

1815 Calculer à $\frac{1}{100}$ près la somme de la série $1+\frac{\sin\varphi}{1}+\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^n+\dots$ où $\varphi = 29°$. 570

1735 Calculer le reste de la division de $x^{3m}+x^{2m}+x^m+1$ par x^3+x^2+x+1 262

1672 Soient $f(x) \equiv 1 - C^2_n x^2 + C^4_n x^4 - \dots$, $g(x) \equiv C^1_n x - C^3_n x^3 + \dots$; démontrer que $f^2(x)+g^2(x) \equiv n^2(1+x^2)^{n-1}$. 59

1752 Dérivées de $L\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, $L(x \pm \sqrt{x^2+a})$. . . . 338

1668 Relation entre la fonction $y = ax+b+\sqrt{cx^2+2dx+f}$ et ses dérivées, qui ne contient pas c, d, f . . 29

1675 Dérivée d'ordre n de $\cos^2 x$. 349

1766 Établir la formule $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$. 382

1760 Dans la formule
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(x+\theta h)}{(n-1)!\,p},$$
trouver la limite de θ quand h tend vers zéro. 381

1825 Résoudre $\mathrm{tg}\,\theta + 2\theta = 0$ 598

1746 Variation de la fonction $xe^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)}-1$. . 316

1700 Etude de la fonction $4e\frac{L\frac{x}{e}}{(Lx)^2}$. Aire. Exercices divers 189

1727 Variation de l'aire d'un trapèze 256

1675 Etude de la fonction $\frac{\alpha Lx - x}{x^\alpha}$ 70

Numéros des questions. — Pages.

1739 Variation des fonctions $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{e^x-1-x}{\frac{x^2}{2!}}$, ... $\frac{e^x-1-x-\dots-\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}}{\frac{x^p}{p!}}$, ... 291

1806 Déterminer le polynome $f(x) = x^3+px+q$ de façon que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$. Déterminer α et β tel que $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$. Développer en série $\frac{f(x)}{x^2-3x+2}$ 618

1768 Exercices sur la fonction $f(x) = \frac{e^x - x}{xe^x}$. Dérivée d'ordre n. Développer en série $f(1+x)$. 391

1717 Calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $\int_0^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(1+x^2)^3}dx$. 225

1728 Calculer $\int\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$ 257

1729 Calculer $\int_0^\alpha \cos^3\omega d\omega$ pour $\alpha = 53°\,27'\,11''$. Déterminer α pour que l'intégrale soit égale à $\frac{2}{3}$ 259

1745 Calculer $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-5x+6}}$ 315

1787 Etudier la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$. Calculer $\int y\,dx = F(x)$. Trouver les constantes P, Q, R de façon que $F(x) - Px^2 - Qx - RL\,|\,x\,|$ soit fini pour x infini 479

1718 Intégrer l'équation $y'' + a^2y = \sin x$. Cas où $a = 1$. 226

1742 Intégrer l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+y = \frac{1}{x}$; montrer qu'elle est vérifiée par $G = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}dt}{1+t^2}$,

Numéros des questions. Pages.

$H = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,dt$, et en conclure $G = H$. . 304

1747 Dans l'équation $y'' - 2y'f_1(x) + yf_2(x) = 0$ on pose $y = uv$; déterminer v de façon que l'équation en u manque de second terme. . . 319

1755 Former l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels à laquelle satisfait $y = \frac{\sin x}{x}$. Courbes intégrales. Lieu de leurs points d'inflexion 371

1804 Toute solution de $y' + Py + Q = 0$ vérifie $y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0$. Déterminer P et Q de façon que $P' - P^2 = \alpha$, $Q' - PQ = \beta$. 510

1831 La fonction $y = \operatorname{ch} nt$ de $x = \operatorname{ch} t$ vérifie $(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2y = 0$. Faire le changement de variables $x = \operatorname{ch} t$, et intégrer. Calculer $\operatorname{ch} nt$ en fonction de $\operatorname{ch} t$ 619

1662 Equation qui admet pour racines les valeurs de $y = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}$, α, β, γ, δ étant les racines d'une équation du quatrième degré . . . 6

1670 $f(x)$, polynome du quatrième degré. Les deux polynomes $2ff''' - f''^2$ et $2f''^3 - 6ff'f'' + 9f^2f^{\text{IV}}$ prennent, pour les racines de f des valeurs indépendantes de la racine. 37

1673 Déterminer un polynome $P(x)$ du cinquième degré tel que $P(x) + 10$ soit divisible par $(x+2)^3$ et $P(x) - 10$ par $(x-2)^3$. 60

1736 Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la partie réelle et le coefficient de i pour chacune des racines imaginaires de l'équation $z^6 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 = 0$. 284

1756 Equations du troisième degré dont l'équation dérivée admet la racine double 1. Discuter ces équations 348

1781 Etude de l'équation $x^3[ax^2 + (x-a)^3] - (x-a)^6 = 0$. 462

1812 Parmi les équations

$$a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} + a_3\sqrt{x_3 - x} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0,$$
$$a_1\sqrt{x_1 - x} + a_2\sqrt{x_2 - x} - a_3\sqrt{x - x_3} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0,$$
$$a_1\sqrt{x_1 - x} - a_2\sqrt{x - x_2} - a_3\sqrt{x - x_3} - a_4\sqrt{x - x_4} = 0,$$

il y en a une seule ayant une racine réelle . . 547

TRIGONOMÉTRIE

1711 Calculer les angles d'un triangle vérifiant les équations

$$\cos A = \frac{2}{3+\sqrt{2}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}} = \sqrt{\frac{22348 \sin A}{89825}}.$$ 201

1798 Résoudre

$$\sin x = \sqrt{\frac{42538}{86864}}, \quad \cos y = \frac{45286}{63435}, \quad \operatorname{tg} 2z = \frac{\sin 3x}{\sin 3y}.$$ 526

1751 Triangle ABC, b' projection de CA sur CB, c' projection de BA sur BC. Calculer $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, h_a et établir la formule $\frac{b+b'}{c-c'} = \frac{b+c+a}{b+c-a}$. 338

1710 OAB triangle rectangle en O, M point variable sur la bissectrice de $\widehat{AOB}$. $OA = a$, $OB = b$, $\widehat{OAM} = x$, $\widehat{OBM} = y$. Calculer $\operatorname{tg} y$ en fonction de $\operatorname{tg} x$. Calculer $\operatorname{tg} x$ de façon que $y = 2x$. 204

1763 Calculer les côtés d'un triangle connaissant $2p$, S, r_a 397

1797 ABC triangle rectangle en A, M milieu de AB, P projection de M sur BC. Calculer MP, CP en fonction de a et B. Etudier la variation de CP — MP. Déterminer B de façon que $\frac{MP + CP}{BC} = k$. 524

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

Numéros des questions. Pages.

1659 A et B, points communs à deux cercles. Par B on mène une sécante rencontrant les cercles en M et M'. Enveloppe du cercle AMM' et lieu du centre. 30

1650 M et M' points variables d'un cercle O, symétriques par rapport à un diamètre fixe. Lieu de la projection du point M' sur le rayon OM 31

1680 Un triangle ABC est inscrit dans un cercle fixe, le sommet A et l'angle A restant fixes. Lieu des centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle BAC 94

1677 AB, diamètre fixe d'un cercle ; AM, corde variable. Enveloppe du cercle de diamètre AM. Sur AB on prend BN = BM. Enveloppe du cercle MAN. Lieu du milieu de MN 99

1684 Sur un cercle : O point fixe, M point variable. La tangente en M rencontre la tangente en O au point A. Lieu du centre du cercle inscrit au triangle OAM. Enveloppe du cercle 103

1685 AB, diamètre fixe d'un cercle. La tangente en un point M rencontre la tangente en B au point I. Lieu du centre de gravité du triangle MIB. Points d'inflexion du lieu. Aire comprise entre la courbe et le cercle 128

1689 O point fixe, A point variable d'un cercle, B point de rencontre des tangentes en O et A. Lieu des centres des cercles inscrit et exinscrit au triangle OAB. Lieu du centre et enveloppe du cercle conjugué à ce triangle. 149

1694 A, point fixe sur Ox ; A', point fixe sur Oy ($OA = OA'$). Cercles variables tangents entre eux, touchant l'un Ox en A, l'autre Oy en A'. Exercices divers. 172

1765 Cercle de diamètre AB, de centre O ; M point variable du cercle, P projection de M sur AB, I symétrique de P par rapport à OM. Lieu de I, enveloppe de MI, lieu du point de rencontre de IP et OM 394

1785 On donne la base BC d'un triangle ABC et on sait que l'une des bissectrices de l'angle A, limitée à BC, AD, satisfait à AD.BC = AB.AC. Lieu de A et enveloppe de AD 463

1832 Cercles de centres C, C' tangents en O. On mène deux droites OA et OB également inclinées sur CC' et rencontrant le premier cercle en A, le deuxième en B. Lieu du milieu de AB. Enveloppe de AB 621

1653 Exercices sur la développée et les développantes d'une courbe. 9

1661 Trouver une courbe telle qu'il y ait un rapport constant entre la sous-tangente en un point quelconque M et le segment OP compris entre l'origine et le point P où la parallèle à la tangente en M, menée par le point de rencontre de la normale en M avec Oy, rencontre Ox. . . 58

1652 Un segment BC de longueur constante et glissant sur Ox est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le sommet A de l'angle droit décrit Oy. Enveloppe des côtés de l'angle droit. Lieu des sommets d'un polygone semblable à un polygone donné construit sur AB. 65

1681 Exercices sur les hypocycloïdes à trois rebroussements trois fois tangentes à une ellipse donnée 117

1720 Étudier la trajectoire du centre d'un contour convexe formé des côtés parallèles AB et A'B' d'un rectangle et des demi-cercles décrits sur AA' et BB' comme diamètres, et qui se déplace en restant tangent à un demi-cercle et à la droite indéfinie qui limite ce demi-cercle. 229

1721 Trajectoires orthogonales de cercles homothétiques par rapport à l'origine et ayant leurs centres sur Oy. Développées de ces courbes. . 249

1726 Enveloppe des droites $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \cos n\varphi$. 271

1740 Trouver une courbe telle que le cercle décrit de chaque point de la courbe comme centre avec le rayon de courbure comme rayon soit orthogonal à un cercle fixe 320

Numéros des questions — Pages.

1758 Trouver la courbe plane telle que dans le quadrilatère MTON ayant pour côtés la tangente MT, la normale MN, l'axe polaire ONx et la perpendiculaire OT à cet axe, les diagonales OM et TN soient perpendiculaires 349

1748 Exercices sur la courbe $\rho = \dfrac{a}{\operatorname{th}\omega}$ 352

1764 La normale en un point M d'une courbe rencontre Ox en N, et la tangente rencontre en T la parallèle à Oy menée par le centre de courbure C. Déterminer la courbe de façon que $\overline{2ON} = \overline{CT}$. Lieu des points de contact des tangentes issues du point O aux courbes intégrales. 374

1761 Propriétés des cercles bitangents à une strophoïde. 385

1770 Etude des courbes définies par les équations
$x = a(\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}\varphi')$, $y = a(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\varphi')$,
φ et φ' vérifiant $\operatorname{sh} 2\varphi - \operatorname{sh} 2\varphi' = 2\varphi - 2\varphi' + \alpha$. 410

1771 Ellipse dans laquelle $a = 2b$; MP, distance d'un point M au petit axe. Le cercle de diamètre MP enveloppe un épicycloïde à deux rebroussements. 413

1775 Les extrémités d'un segment AB décrivent un cercle et un diamètre. Lieu du milieu de AB, enveloppe de AB. Enveloppe de l'axe radical du cercle donné et du cercle de diamètre AB. Développée de cette enveloppe, la rectifier. . . . 429

1809 Trajectoires orthogonales des cercles passant par deux points fixes 555

1818 Calculer la différence de deux arcs d'ellipse par la méthode des trapèzes. 579

1824 Mouvement d'un plan mobile sur un plan fixe. Exercices variés. 594

1823 Courbes pour lesquelles le cercle décrit sur le rayon de courbure comme diamètre est tangent à une droite fixe. Exercices divers. 605

1674 D'un point M d'une ellipse on mène les trois normales MA, MB, MC. Lieu des centres des coniques passant par les points M, A, B, C et par un foyer. 80

1679 Enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes d'une ellipse qui passent par un point fixe du grand axe 92

1683 Exercices sur l'hyperbole
$y(y - mx) + bmx + \beta y - abm = 0$ . . . 143

1686 Exercices sur un triangle ABC inscrit à une parabole, AC et BC étant normaux en A et B . . 144

1696 Hyperboles équilatères ayant pour sommet le point O et passant par le point A. Lieu des centres. Enveloppe des axes non transverses 164

1722 Exercices sur les normales à une parabole. . . 234

1732 Triangle ABC, A et B fixes, le pied de l'une des bissectrices de A sur BC décrit une droite fixe D. Le lieu de C est une conique. Etudier le genre quand D varie 275

1743 Lieu du point équidistant d'une parabole et de son sommet 287

1733 M, M', ombilics conjugués à une conique fixe et à une parabole de foyer fixe. M décrivant une courbe donnée, trouver le lieu de M' 293

1767 Coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle. Lieu du centre; lieu du point de rencontre de deux coniques orthogonales. Parabole du faisceau : enveloppes de l'axe, de la tangente au sommet; lieu du sommet . . . 406

1779 C, conique de centre O; K, conique qui a pour sommets les rebroussements de la développée de C. M, point variable de K ; le cercle Γ de diamètre OM rencontre les axes en P et Q. Enveloppe de PQ. Γ rencontre K en trois points P_1, P_2, P_3. Enveloppe des côtés du triangle $P_1P_2P_3$ 452, 500

1799 Montrer qu'en leurs points de rencontre A, B, C, D les coniques
$x^2 - y^2 - R^2 = 0$, $x^2 + 3y^2 + 6Rty - 3R^2 = 0$
sont orthogonales. Cercles passant par A, B, C, D. Enveloppe des droites AB. 502

1814 Lieu du point d'où l'on peut mener à une parabole deux tangentes faisant un angle α. Enveloppe des cordes de contact. 568

1828 Coniques C, C', C'', ayant deux tangentes communes. Enveloppe des droites Δ dont les pôles par rapport à ces coniques sont en ligne droite Δ_1. Enveloppe de Δ_1. Lieu du point de rencontre de Δ et Δ_1 607

1834 La normale en A à une hyperbole équilatère rencontre la courbe en B, l'axe réel en M, l'axe imaginaire en N ; Q, milieu de AB. Sur AB on prend $\overline{MP} = \overline{QN}$. Lieu de P 61

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

1829 Une droite MM' s'appuie en M et M' sur deux droites fixes D et D', en étant perpendiculaire à D. V, angle des plans DMM', D'MM'. Montrer que MM' tg V = Cte 611

1663 Exercices sur les plans osculateurs à la courbe $x = \lambda^3$, $y = \lambda^3 + 3\lambda^2$, $z = \lambda^2 + 4\lambda$. . . . 11

1712 M et M', points variables du plan des xy conjugués par rapport à deux hyperboles, leur milieu étant situé sur une droite fixe. Exercices divers. 215

1713 Etudier la variation de la courbure à l'origine des sections de la surface $z = \dfrac{y^3 + xy^2 + \lambda x^3}{y + x}$ par le plan $y = mx$. 217

1813. Aire et volume engendrés par une cycloïde tournant autour de sa base. 566

1676 Exercices sur deux paraboles focales l'une de l'autre 73

1687 Exercices sur les centres de courbure principaux aux divers points d'un paraboloïde 123

1738 Enveloppe des plans coupant deux sphères données suivant des cercles orthogonaux. 306

1744 Lieu des centres des sphères coupant deux sphères données suivant des cercles orthogonaux et passant par le centre de l'une 309

1741 Exercices sur le roulement d'une ellipse sur un plan. 350

1780 Exercices sur le cylindroïde $z = \dfrac{2kxy}{x^2 + y^2}$. . . 456

1786 1° P plan fixe, O point fixe. Complexe des droites D qui rencontrent P en un point A tel que OA soit perpendiculaire à D.
2° Complexe des droites pour lesquelles le moment d'un système de forces est égal à une constante.
3° Complexe des droites qui ont un moment donné par rapport à une droite fixe 488

1808 Surface engendrée par une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur une parabole et une droite. Section plane. Volume. Trajectoires orthogonales des droites 532

1783 Quadriques circonscrites à une sphère le long d'un cercle dont le plan passe par une droite. Exercices divers. 584

1805 Enveloppe de quadriques variables. Elle se compose de surfaces réglées du quatrième ordre. Chaque quadrique touche son enveloppe suivant un quadrilatère gauche. 587

1835 Δ normale en A à une surface, Δ' conjuguée de Δ par rapport à une sphère, A' inverse de A par rapport a la sphère. Enveloppe du plan Δ'A'. . 613

ÉPURES

1702 Solide commun à deux cônes (Ecole polytechnique, 1908) 41

1731 Sphère et cônes de révolution circonscrits. Ombres. (Ecole des Ponts et Chaussées, 1908). . . 155

1709 Intersection de deux surfaces de révolution (Ecole Centrale, 1908) 181

1754 Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution (Ecole des Mines de St-Etienne, 1908). . . 238

1715 Solide commun à un tore et à un hyperboloïde (Ecole Normale, 1908). 278

1807 Intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un cône (Agrégation, 1908) 298

Numéros des questions. Pages.

1789 Ombres au flambeau d'une demi-sphère creuse (Ecole polytechnique, 1909) 387
1796 Intersection d'un cylindre et d'un cône (Ecole Centrale, 1909) 443
1759 Représentation d'un conoïde (Ecole des Ponts et Chaussées, places réservées aux conducteurs, 1908). 459
1817 Intersection d'un tétraèdre et d'un cône (Ecole des Ponts et Chaussées, 1909). 494
1826 Intersection de deux cônes (Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1909) 550
1801 Ombres d'un solide de révolution engendré par un cube (Ecole Normale, 1909) 559

MÉCANIQUE

1669 Exercice sur le mouvement d'un point qui décrit le cercle $x^2+y^2-2ax=0$, la vitesse angulaire relative au point O étant $\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{1+t^2}$ 61
1697 Un point M décrit la cardioïde $r=a(1+\cos\theta)$ de façon que l'accélération totale soit dirigée vers le pôle. Calculer en fonction de r la vitesse, l'accélération totale et sa composante normale. Rayon de courbure. Hodographe 166
1695 Mouvement d'un point qui décrit une lemniscate avec une vitesse angulaire égale à 1. Hodographe 178
1671 Déterminer le mouvement d'un point sur le paraboloïde $x^2+y^2=2pz$ de façon que la projection sur Oz ait un mouvement uniforme et que la projection sur yOx obéisse à la loi des aires. Trajectoire. Hodographe 38
1682 A tout point mobile M on fait correspondre l'extrémité G du moment par rapport au point O du vecteur vitesse du point M. Connaissant le mouvement du point G, déterminer celui du point M 94
1692 Les formules $x+\frac{d^2x}{d\theta^2}=p+a''\theta$,
$$y+\frac{d^2y}{d\theta^2}=q+b''\theta,\quad z+\frac{d^2z}{d\theta^2}=r+c''\theta,$$
où θ est fonction du temps, définissent un mouvement hélicoïdal. 139
1706 Mouvement d'un point sur la courbe
$$\rho=5a-4a\cos\omega-3a\sin\omega \quad . . . . . 199$$
1719 Mouvement d'une sphère à l'intérieur d'un parallélépipède rectangle 227
1734 Un point M se meut d'un mouvement vibratoire simple sur une génératrice G de la surface $x^2+y^2-z^2-1=0$, pendant que cette droite tourne autour de Oz d'un mouvement uniforme. Etudier le mouvement du point M. Trace sur le plan des xy du vecteur accélération . . . 294
1778 Trouver l'hodographe d'un mouvement plan dans lequel $\frac{\gamma_t}{V_y}=\pm\frac{\gamma_n}{V_x}$. Ces rapports étant constants, trouver la trajectoire et la loi du mouvement 418
1776 Trouver les courbes d'un corps solide en mouvement telles que la vitesse en chaque point soit dirigée suivant la binormale. Exercices divers. 433
1782 Mouvement d'un plan mobile sur un plan fixe de façon que deux points du plan mobile décrivent deux droites rectangulaires du plan fixe . . 439
1793 Etudier le mouvement
$$x=a\sqrt{3}\cos^3 t,\quad y=-2a\sqrt{2}\sin^3 t.$$
Exercices divers. 519
1819 Trajectoire d'un point, sachant que sa vitesse est la résultante de deux vecteurs constants, l'un de direction fixe, l'autre perpendiculaire au rayon qui joint le point à une origine fixe . . 582
1654 Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde. Exercices sur la parabole que décrit ce point après avoir quitté la cycloïde 13
1690 Exercices sur le mouvement d'un point pesant dans le vide 153

Numéros des questions. Pages.

1705 Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, avec frottement. Exercices 197
1723 Un point pesant est assujetti à décrire une courbe située dans un plan vertical. Déterminer la courbe de façon que la vitesse du point ait une projection constante sur la verticale . . . 245
1724 Mouvement d'une barre pesante dont les extrémités décrivent une horizontale et une verticale 246
1725 Mouvement d'un point attiré proportionnellement à la distance et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse 247
1730 Deux projectiles sont lancés d'un même point dans un plan vertical à des époques différentes. Conditions pour qu'ils se rencontrent. . . . 260
1753 Etude d'un champ de forces. Lignes de force. Potentiel 339
1777 Un point pesant M de masse un est assujetti à décrire la courbe $x=\frac{2}{3}t^3,\ y=t^2,\ z=t$ sous l'action d'une force tangente à la trajectoire. Déterminer cette force et la réaction. Exercices divers. 415
1788 Exercices divers sur une hélice circulaire . . . 482
1803 Mouvement d'un point matériel pesant qui tombe dans un milieu qui oppose à son mouvement une résistance proportionnelle à la vitesse . . 507
1810 Mouvement d'un point pesant qui glisse dans un plan P tournant avec une vitesse angulaire constante autour d'un axe vertical. 556
1811 Exercices sur le choc des sphères. 558
1816 Deux mobiles se déplacent sur deux droites de l'espace sous l'action de forces constantes. Minimum de leur distance. Cas particuliers. . . 571
1698 Réduction d'un système de trois forces rectangulaires non concourantes. Axe central 169
1701 Réduire un système de forces à deux, l'une normale à un plan, l'autre située dans ce plan. Exercices divers. 191
1792 Equilibre d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe 517
1820 Equilibre de deux sphères tangentes entre elles et reposant sur deux plans inclinés. 582

PHYSIQUE

1678 Exercices sur la variation de température dans un calorimètre 130
1693 Exercices sur un pendule 141
1691 Exercices sur une horloge à balancier 158
1699 Exercices sur une bouteille de Leyde. 170
1703 Détermination de la capacité et de l'énergie d'un condensateur. 194
1707 Calculer l'intensité d'un champ électrique . . . 203
1714 Exercices sur un baromètre 220
1716 Exercices sur un collimateur et une lunette . . 223
1750 Exercices sur la capillarité 336
1762 Déterminer les points nodaux et les foyers principaux d'une lentille formée par un ellipsoïde et une sphère 390
1790 Exercices sur une bulle soufflée avec de l'air . . 486
1821 Un faisceau lumineux tombe sur un système optique formé de deux prismes et d'une lentille convergente. Calculer la distance des deux points lumineux observés dans le plan focal de la lentille. 512
1822 Comparer les moyens de faire le vide dans un cylindre derrière un piston 513
1794 Calculer le potentiel de deux sphères chargées réunies par un fil long et fin. 522
1800 Exercice d'optique 541
1802 Déterminer la capacité et l'énergie d'un condensateur 543
1769 Exercices sur une boussole d'inclinaison . . . 599
1772 Dans un milieu où un mouvement vibratoire se propage avec une vitesse V, la source origine de ce mouvement a une vitesse v et l'observa-

Numéros des questions. Pages.

teur une vitesse v' en sens inverse. Quel est le mouvement perçu par l'observateur ? Applications acoustique et optique 613

CHIMIE

1704 Composition et formule d'un précipité ; réaction d'un iodure sur une solution de sulfate de cuivre. 195
1708 Déterminer le volume d'éthylène introduit dans une bombe calorimétrique 203
1749 Analyse d'un mélange gazeux 334
1791 Evaluer le titre d'un échantillon de permanganate de potasse. 487
1795 Déterminer la formule d'un hydrocarbure. . . 523
1827 Exercices sur un poids de bioxyde de manganèse. 573

NOTES ET COMMUNICATIONS

Sur une application des imaginaires à la géométrie, par M. Ch. Michel. 114
Sur les formules de récurrence, par M. J. Haag. . . 289
Note sur la continuité des racines d'une équation algébrique, par M. L. Leau 113
Sur les fonctions symétriques, par M. R. Bérard . . 269
Note sur l'équation de Riccati, par M. J. Haag . . . 68
Note sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, par M. P. Brizard 33
Sur une transformation géométrique étudiée par l'emploi des imaginaires, par M. A. Durand 473
Sur les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles, par M. J. Haag. 69
Sur les cubiques circulaires, par M. G. Pélissier. . . 91

Numéros des questions. Pages

Sur les trajectoires sous un angle constant de certaines familles de courbes, par M. J. Haag 137
Sur le rayon de courbure des courbes planes, par M. Louis Sire 161, 185, 209, 601
Trajectoires des divers points d'une droite, par M. A. Sainte-Lagüe 242
Sur les trajectoires orthogonales de cercles, par M. A. Durand 265
Trajectoires sous un angle constant de coniques homofocales, par M. A. Durand 313
Note sur la strophoïde, par M. Louis Sire 347
Sur les cubiques circulaires unicursales, par M.G.Cotty. 449
Note sur l'épicycloïde à un rebroussement, par M. Jean Bing 451
Sur une classe de quartiques gauches unicursales, par M. Ch. Michel 1
Nouvelle méthode de discussion de l'équation en S, par M. J. Haag 5
Sur les courbes dont les tangentes sont parallèles aux génératrices d'un cône du second degré, par M. Th. Caronnet. 345
Courbes gauches et surfaces, par M. A. Sainte-Lagüe 377, 401, 425
Note sur le développement des cônes et des cylindres, par M. Commissaire 497
Sur les surfaces réglées du troisième ordre, par M. Gaston Cotty 553, 577
Question de cinématique, par M. A. Durand 89
Sur les composantes de l'accélération, par M. G. Fontené 289
Question de cinématique, par M. G. Valiron. . . . 529

BIBLIOGRAPHIE

Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes, par W. Rouse Ball 88

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences mathématiques.

Pages.
1908 . . . . . 228, 298.
1909 . . . . . 301, 532.
1910 . . . . . 614.

Concours pour l'emploi de commissaire-contrôleur des Sociétés d'assurances sur la vie.

1908 . . . . . 79, 315, 316, 319.
1909 . . . . . 196.

Concours d'admission des agents des postes aux cours de l'Université.

1909 . . . . . 546.

ECOLES

Ecole normale supérieure.

1908 . . . . . 215, 217, 220, 223, 225, 226, 227, 278.

Pages.
1909 . . . . . 281, 502, 507, 510, 540, 543, 559.
1910 . . . . . 590.

Ecole Polytechnique.

1908 . . . . . 41, 189, 191, 194, 195.
1909 . . . . . 254, 387, 479, 482, 486, 487.
1910 564

Ecole Centrale.

1908 . . . . . 181, 197, 199, 201, 203, 204.
1909 . . . . . 263, 443, 517, 518, 522, 523, 526.
1910 . . . . . 574.

Ecole des Ponts et Chaussées.

1908. . Places réservées aux conducteurs 97, 347, 349, 459.
Cours spéciaux . 245, 246, 247.
Cours préparatoires . . . . 155, 256, 257, 259, 260.
1909. . Cours spéciaux . 304, 555, 556, 558.
Cours préparatoires . . . . 311, 494, 547, 566, 568, 570, 571.
1910. . Cours préparatoires . . . . 623.

Ecole nationale supérieure des Mines.

Pages.

1908 . . . . . 164, 166, 168, 170.
1909 . . . . . 332, 512, 513.
1910 . . . . . 617.

Ecole des Mines de Saint-Etienne.

1908 . . . . . 85, 238, 334, 336, 337, 339.
1909 . . . . . 342, 550, 573, 579, 582, 594, 598, 599.

Ecole professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes (2e section).

1908 . . . . . 515.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Ecole normale supérieure.

Pages.

1909 . . . . . 514, 544, 562.

Ecole Polytechnique.

1908 . . . . . 16, 45.
1909 . . . . . 325, 355.

Ecole Centrale.

1908 . . . . . 83, 104, 131.
1909 . . . . . 398, 420, 444, 466.

NOMS D'AUTEURS

ALBERTINI, (P), 32.
AMBLARD, 228, 374.
ARNAL, 447.
AUSCHER (R.), 44.
BARISIEN (E.-N.), 32, 64, 102, 143, 208, 398, 448, 500, 528, 623.
BAYET (Albert), 143, 413.
BEDOIN, 11.
BENOIT-GONIN, 160.
BÉRARD (R.), 269.
BERTHIOT (Henri), 177.
BICKART (L.), 28, 123, 275, 293.
BING (Jean), 451, 614.
BONNETÈTE, 414.
BOULIGAND (G.), 64, 112, 420.
BOUVAIST (R.), 262, 294, 319.
BRIZARD (P.), 32, 33, 64, 131.
BROS, 13, 30, 41, 155, 170, 233.
CARONNET (Th.), 345.
CARRIER (Louis), 217.
CLAIRIN, 514, 544.
COMMISSAIRE, 497.
CONSTANDAKI (Michel), 29.
COULANGE (J.), 600.
COURTOIS (André), 348, 487, 513, 522, 556, 598.
COTTY (G.), 28, 449, 553, 577.
D. (G.), 94.
D. (J.), 94.
DANBON, 194, 238.
DARMON, 8, 38, 60, 79, 257, 288, 382.
DECERF, 241.
DINAY (G.), 396.
DULAC, 545, 562.
DURAND (A.), 89, 265, 313, 391, 473.
ESTEBEN, 195.
F. (G.), 58, 141, 197, 240.
FONTENE (G.), 289.
FOUCRY, 83, 144, 241, 308.
G. (X.), 172.
GARBE (G.), 152.
GERARD, 83, 398.
GIUNCU (Ch.), 400.
GUILLERME (G.), 155, 246, 433.
GUILLOUD (J.), 338.
H. (E.), 88, 112, 127, 136, 184, 208, 288, 312, 424, 552.
H. (V.), 376.
HAAG (J.), 5, 58, 65, 68, 69, 80, 137, 253, 284, 289, 324, 334, 370, 415, 462, 607, 612.
JABLONSKI, 107, 422.
JANOIS (H.), 102.
L. (P.), 198, 201, 202, 207, 208, 259, 260, 518, 522, 526, 528.
L. (Th.), 28, 58.
LACH (G.), 226, 400, 472.
LAFOSSE (René), 306.
LAGUERRE, 197.
DE LAPIERRE (H.), 558, 559.
LASABATIE (R.), 621.
LEAU (L.), 113.
LEMAIRE (J.), 415, 488.
LEROUX (E.), 523.
LITON, 370.
LOISEAU (J.), 436.
MANEN (R.), 172, 204, 466.
MASSING (Camille) 148, 400, 463, 496.
MÉRIGOT (W.), 98, 127.
MICHEL (Ch), 1, 114.
MIQUEL (F.), 223.
NABOULET, 349.
NÉVEJANS, 350, 512.
NIOX-CHATEAU (Henry), 316, 350.
D'OCAGNE (M.), 241.
PAPELIER (Jacques), 181, 586.
PÉLISSIER (G.), 32, 64, 91, 99, 400.
PIGLOWSKI, 104, 387, 528.
RIEUMAJOU, 413, 418.
ROUSE-BALL, 88.
SAINTE-LAGUE (A.). 242, 377, 401, 425, 437.
SALLERON (Pierre), 544, 568.
SASPORTES (R.), 600.
SERVANTIE (P.), 438.
SIMON (L.), 29, 31, 320, 374.
SIRE (Louis), 161, 165, 185, 209, 220, 227, 247, 249, 308, 311, 347, 391, 462, 466, 556, 570, 601.
TELLIER (R.), 142.
TEULIÈRE (Camille), 574.
TREMBLOT (Richard), 459.
VALENSI (G.), 160.
VALIRON (G.), 529.
YÉROTS (J.), 600.
VINTÉJOUX (R.), 184, 424.
WAHL (Paul), 32.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

QA
1
R486
année 20

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY